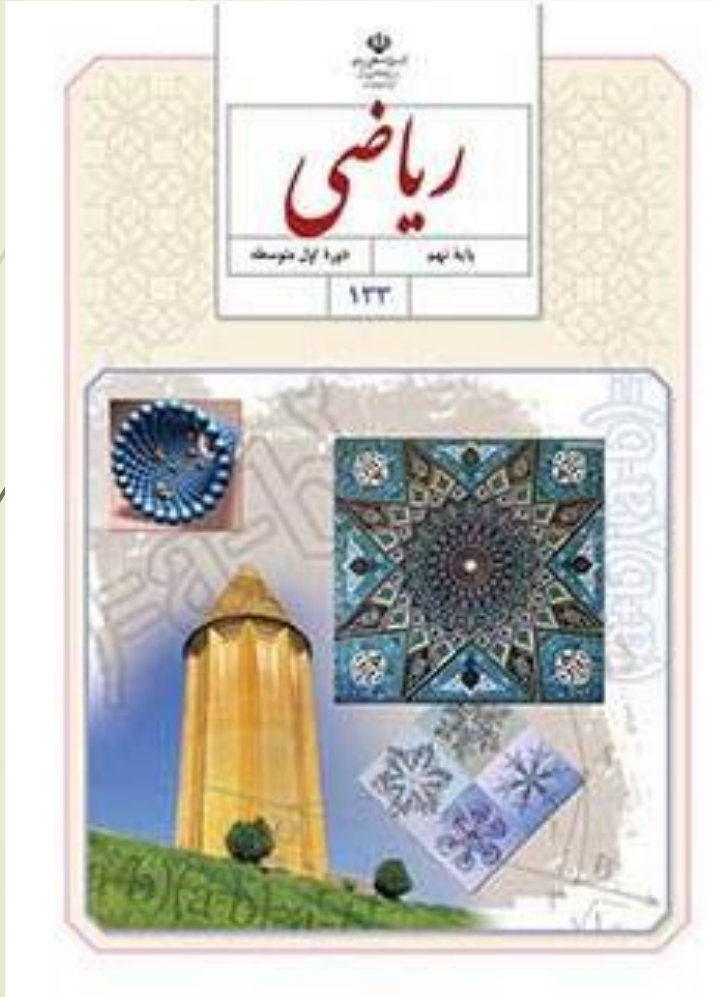


به نام اول معلم انسان

ریاضی پایه نهم فصل اول



مدرس : علی مصطفی

دیر ریاضی مقاطع متوسط شهرستان اشنویه

@riazisaeedamini

کانال ریاضی متوسطه اول

کانالی برای یادگیری درس شیرین ریاضی

ریاضی هر سه پایه هفتم و هشتم و نهم

جزوه ، درسنامه ، فیلم های آموزشی و نمونه سوالات امتحانی

<https://t.me/riazisaeedamini>

فصل اول

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

فعالیت

۱۰	-۱۰	۱۲
۶	۴	۲
-۴	۱۸	-۲

$$A = \{2, 4, 6\}$$

۱- جدول عددهای صحیح روبه‌رو را طوری کامل کنید که مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر قطر آن برابر ۱۲ شود؛ سپس مجموعه عددهای سطر دوم جدول را بنویسید و آن را A بنامید.

اکنون مجموعه B را چنان بنویسید که شامل سه عدد زوج متوالی و میانگین عضوهای آن با ۴ برابر باشد. هریک از مجموعه‌های A و B چند عضو دارد؟ $B = \{2, 4, 6\}$

هریک از مجموعه‌های A و B دارای ۳ عضو هستند.

آیا هر عضو A در مجموعه B است؟ آیا هر عضو B در مجموعه A است؟ **بله**

دو مجموعه برابر

همان طور که ملاحظه کردید، عضوهای دو مجموعه A و B یکسان اند و هر عضو A ، عضوی از B و هر عضو B ، عضوی از A است؛ در این صورت دو مجموعه A و B برابراند و می نویسیم $A = B$.

تعداد اعضای دو مجموعه برابر باشند.

۱

برای اینکه دو مجموعه برابر باشند

تمام عضوهای مجموعه A در B باشند و برعکس.

۲

مثال: فرض کنید A مجموعه شمارنده های اول ۱۵ باشد. در این صورت $A = \{3, 5\}$. همچنین، فرض کنید B مجموعه شمارنده های اول ۴۵ باشد. در این صورت $B = \{3, 5\}$. بنابراین $A = B$.

نکته

اگر عضوی در A باشد که در B نباشد یا عضوی در B باشد که عضو A نباشد، در این صورت مجموعه A با B برابر نیست و می نویسیم $A \neq B$.

مثال

فرض کنید A مجموعه شماره‌های اول 30 باشد. در این صورت $A = \{2, 3, 5\}$. همچنین فرض کنید B مجموعه شماره‌های اول 42 باشد. در این صورت $B = \{2, 3, 7\}$. توجه کنید که $5 \in A$ اما $5 \notin B$ ، پس $A \neq B$. همین طور، می توانستیم بگوییم $7 \in B$ اما $7 \notin A$ ، پس $A \neq B$.

یادآوری

ترتیب اعضای یک مجموعه مهم نیست. مثلاً $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 1, 2\}$
تکرار اعضا در یک مجموعه مهم نیست. مثلاً $\{2, 3\} = \{2, 2, 2, 3, 3\}$

مثال: x و y را طوری تعیین کنید تا دو مجموعه‌ی $A = \{7, x+1, 2\}$ و $B = \{y-1, 7, 5\}$ با هم برابر باشند.

$$x+1=5 \rightarrow x=5-1 \rightarrow \boxed{x=4}$$

$$y-1=2 \rightarrow y=2+1 \rightarrow \boxed{y=3}$$

باشند.

۱- جاهای خالی را در مجموعه‌های زیر طوری پر کنید که مجموعه‌ها برابر باشد :

$$\frac{-\sqrt{144}}{(-2)^2} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$\left\{ 5, \frac{-3}{5}, \frac{2}{5}, 4, \frac{9}{3} \right\} = \left\{ \frac{2}{5}, 3, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)^2}, \frac{4}{4}, \sqrt{25} \right\} \quad (\text{الف})$$

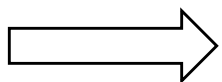
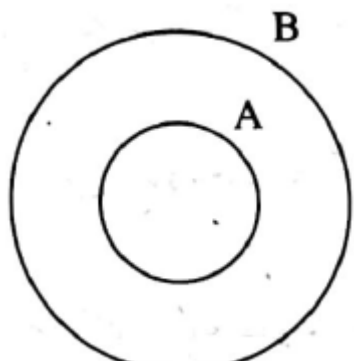
در پاسخ این سوال ابتدا عددها را در صورت امکان به ساده ترین فرم آن می نویسیم.

حال به هر دو مجموعه نگاه کرده، عضوهای را که در مجموعه سمت راست وجود دارند ولی در مجموعه سمت چپ وجود ندارند را پیدا می کنیم. عدد -3 در مجموعه سمت راست وجود دارد و در مجموعه سمت چپ وجود ندارد. همچنین عدد 4 در مجموعه سمت چپ وجود دارد و در مجموعه سمت راست نیست.

فرض کنید مجموعه‌هایی مثل $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{2, 3\}$ داریم. اگر خوب دقت کنید متوجه می‌شوید که همه اعضای مجموعه B در مجموعه A نیز وجود دارند. در این جا اصطلاحاً گفته می‌شود، B زیر مجموعه A است.

برای نمایش زیر مجموعه بودن، از علامت $\subseteq$ استفاده می‌کنیم. در این جا $B \subseteq A$. اما اگر B عضو یا عضوهایی داشته باشد که در مجموعه A وجود نداشته باشد (حتی یک عضو) آن گاه دیگر B زیر مجموعه A به حساب نمی‌آید. برای نمایش زیر مجموعه نبودن از علامت $\not\subseteq$ استفاده می‌کنیم.

مثلاً اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 2, 5\}$ باشد، B زیرمجموعه A نیست. زیرا B دارای عضو ۵ است که در A وجود ندارد. بنابراین می‌نویسیم $B \not\subseteq A$.



$$A \subseteq B$$

اگر مجموعه A زیرمجموعه B باشد (و مجموعه‌های A و B ناتهی باشند)، نمودار و آن‌ها به صورت مقابل است:



با توجه به تعریف زیر مجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیر مجموعه خودش هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم: $A \subseteq A$.

زیرا تمامی عضوهای مجموعه‌ای مانند A در داخل مجموعه‌ی A وجود دارند.

مجموعه تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای دلخواه مانند A است؛ یعنی: $\emptyset \subseteq A$.

زیرا تهی عضوی ندارد که در مجموعه‌ی دلخواهی مانند A وجود نداشته باشد. بنابراین: $\emptyset \subseteq A$

مثال: مجموعه‌ی $A = \{1, \{2\}, \{\{3\}\}\}$ سه عضو دارد که برای نشان دادن عضویت هر کدام، خود

آنها را با نماد عضویت استفاده می‌کنیم: $\{\{3\}\} \in A$ و $\{2\} \in A$ و $1 \in A$

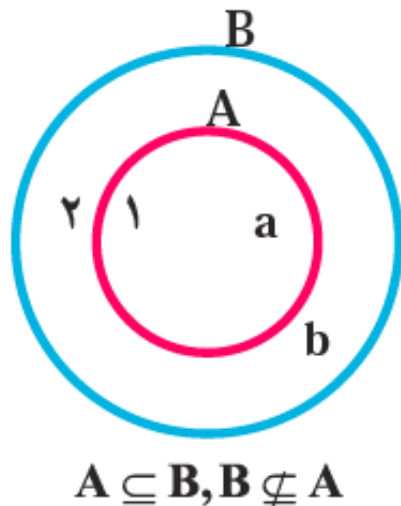
اما برای نشان دادن زیرمجموعه‌های یک عضوی A ، یک علامت آکولاد دور عضوها می‌گذاریم (علاوه

بر آکولادی که بعضی عضوها دارند). $\{\{\{3\}\}\} \subseteq A$ و $\{\{2\}\} \subseteq A$ و $\{1\} \subseteq A$

مثال : دلیل درستی رابطه‌های زیر مشخص شده است.

الف) $\{a,b,d\} \not\subseteq \{a,b,c,e\}$ ؛ زیرا در مجموعه سمت چپ، d هست که در مجموعه سمت راست نیست.

ب) $\{-1,0,1,3\} \subseteq \{4,3,0,1,-1,2\}$ ؛ زیرا هر عضو مجموعه سمت چپ، عضوی از مجموعه سمت راست است.



ج) با توجه به شکل مقابل $A \subseteq B$ درست است؛ زیرا همه عضوهای A در B قرار دارند و $B \not\subseteq A$ درست است؛ زیرا عضوی در B مانند ۲ می‌توان یافت که در A وجود ندارد.

نوشتن زیرمجموعه‌های یک مجموعه و تعداد آن‌ها

فرض کنید یک مجموعه مثل $A = \{1, 2, 3\}$ داریم. برای نوشتن همهٔ مجموعه‌هایی که زیرمجموعهٔ A هستند، باید از راهبرد **الگوسازی** که در سال هفتم آموختیم، استفاده کنیم. (یعنی کار را با یک نظم خاص انجام دهیم). برای این منظور، از مجموعهٔ تهی شروع می‌کنیم. (مجموعه‌ای که هیچ عضوی **ندارد** و زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است). بعد به سراغ مجموعه‌های یک‌عضوی می‌رویم. می‌دانیم برای A مجموعه‌های یک‌عضوی که زیرمجموعهٔ A هستند (عضوهای آن‌ها در A وجود دارد) $\{1\}$ ، $\{2\}$ و $\{3\}$ می‌باشند.

بعد از آن به سراغ مجموعه‌های ۲‌عضوی می‌رویم که عضوهای آن‌ها درون A هستند. (باید با اعداد ۱، ۲ و ۳ مجموعه‌های ۲‌عضوی بنویسیم). این مجموعه‌ها شامل $\{1, 2\}$ ، $\{1, 3\}$ و $\{2, 3\}$ هستند. اکنون به سراغ مجموعه‌های ۳‌عضوی می‌رویم که عضوهای آن‌ها، در مجموعهٔ A حضور دارند. تنها مجموعه‌ای که می‌توانیم بنویسیم، $\{1, 2, 3\}$ ، یعنی خود A است. هرگاه در نوشتن زیرمجموعه‌های یک مجموعه، به خود مجموعه برسیم، کار تمام است و همهٔ زیرمجموعه‌ها را نوشته‌ایم.

$$\text{زیرمجموعه‌های } A = \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

همه زیرمجموعه‌های مجموعه $\{1, 2, 3, 4\}$ را در زیر نوشته‌ایم:

$\emptyset$: صفر عضوی

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$: یک عضوی

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$: دو عضوی

$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}$: سه عضوی

$\{1, 2, 3, 4\}$: چهار عضوی

اگر مجموعه‌ای n عضو داشته باشد، 2^n زیرمجموعه خواهد داشت.

نتیجه

یک مجموعه ۵ عضوی، چند زیرمجموعه دارد؟

مثال

$$\text{تعداد زیرمجموعه} \Rightarrow \text{تعداد عضو} = 2^5 = 32 \quad \Rightarrow \quad n = 5 \quad \text{تعداد عضو}$$

نمایش مجموعه‌های اعداد

هر مجموعه را می‌توان به ۴ صورت نمایش داد.

۱ به صورت عبارت کلامی (به زبان فارسی).

۲ با اعضا

۳ با نمودار ون

۴ به زبان ریاضی (نمادهای ریاضی)

۱- عبارت کلامی (به زبان فارسی): ویژگی مشترک اعضای یک مجموعه را با یک عبارت فارسی بیان می کنیم.

مثال

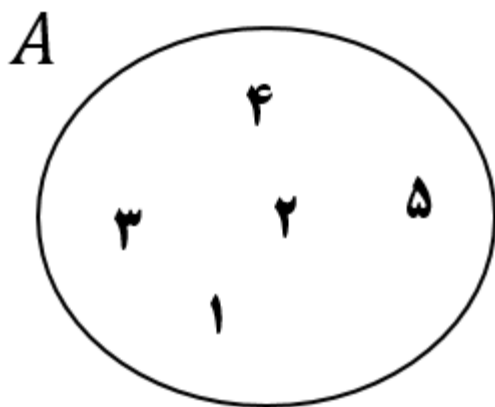
مجموعه عددهای طبیعی کوچکتر از ۶.

۲- با اعضا : عضوهای مجموعه را داخل دو آکلاد می نویسیم.

مثال

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

۳- با نمودار ون : اعضای یک مجموعه را داخل خط بسته می نویسیم.



مثال

۴- نمایش مجموعه به زبان ریاضی (نمادهای ریاضی)

مجموعه عددهای طبیعی را با $\mathbb{N}$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر می نویسیم :

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

تاکنون نمایش مجموعه ها را با عضو ها و نمودار ون آموخته اید. یک روش دیگر برای نمایش مجموعه ها استفاده از نمادهای ریاضی است؛ برای مثال : مجموعه عددهای طبیعی زوج $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ را در نظر بگیرید. می دانیم عضوهای این مجموعه خاصیت مشترکی دارد؛ یعنی همگی آنها مضرب ۲، است و از قبل می دانیم که هر عدد زوج طبیعی به صورت $2k$ قابل نمایش است که در آن $k \in \mathbb{N}$ ، پس می نویسیم :

$$E = \{2k | k \in \mathbb{N}\}$$

و می خوانیم E برابر است با مجموعه عددهایی به شکل $2k$ به طوری که k متعلق به مجموعه عددهای طبیعی است. در مجموعه E علامت « $|$ » خوانده می شود : «به طوری که».



اگر بخواهیم مجموعه‌ای را به صورت $\{...|...\}$ نشان دهیم، در سمت چپ نماد «|» صورت کلی عضوهای مجموعه و در سمت راست نماد «|» شرطهایی را که این عضو را به طور کامل توصیف می‌کنند، می‌نویسیم.

مثال

اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ باشد، می‌توان آن را با نمادهای ریاضی به صورت زیر نوشت:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\} \text{ یا } A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$$

مثال

برای نوشتن مجموعه ضرب‌های طبیعی عدد ۵ با نمادهای ریاضی، $5k$ را به عنوان نماینده اعضا در نظر می‌گیریم که در آن $k \in \mathbb{N}$ است و می‌نویسیم $\{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$ که خوانده می‌شود مجموعه اعدادی که به شکل $5k$ هستند، به طوری که k متعلق به مجموعه اعداد طبیعی است.

مثال

مجموعه $A = \{-7, -6, -5, \dots, 11\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

مشاهده می‌کنید اعضای این مجموعه همگی عضو مجموعه اعداد صحیح ($x \in \mathbb{Z}$) و از -7 تا $+11$ هستند ($-7 \leq x \leq 11$). پس می‌توانیم بنویسیم:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -7 \leq x \leq 11\}$$

دقت کنید در مثال قبل، به جای $-7 \leq x \leq 11$ می‌توانستیم عبارت‌های $-8 < x < 12$ یا $-7 \leq x < 12$ یا $-8 < x \leq 11$ را هم بنویسیم.

در زیر چند مجموعه را به ۳ صورت (عبارت فارسی، نوشتن اعضا و نمادهای ریاضی) نشان می دهیم.

$$\{2k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \text{مجموعه اعداد طبیعی زوج}$$

$$\{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} = \text{مجموعه اعداد طبیعی فرد}$$

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid -9 \leq x \leq 9\} = \{-9, -8, -7, \dots, 8, 9\} = \text{مجموعه اعداد صحیح یک رقمی}$$

$$\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{20}{x} \in \mathbb{N}\right\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} = \text{مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰}$$

$$\{x \in \mathbb{N} \mid 12 \leq x \leq 16\} \text{ یا } \{x \in \mathbb{N} \mid 11 < x < 17\} = \{12, 13, 14, 15, 16\} = \text{مجموعه اعداد طبیعی بین ۱۱ و ۱۷}$$

مثال : مجموعه $A = \{5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ را با عضوهایش مشخص کنید :

برای این منظور جدول زیر را کامل کنید و در هر مرحله به جای n یک عدد طبیعی در $5n + 3$ قرار دهید.

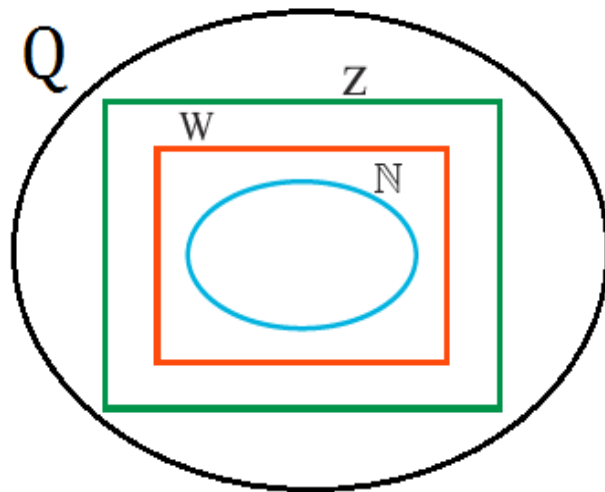
n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
$5n + 3$	$\underbrace{5(1) + 3}_8$	$\underbrace{5(2) + 3}_{13}$	$\underbrace{5(3) + 3}_{18}$	$\underbrace{5(4) + 3}_{23}$	$\underbrace{5 \times 5 + 3}_{28}$			...

بنابراین داریم : $A = \{8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, \dots\}$

اعضای مجموعه $\{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z}, -3 < x \leq 2\}$ را بنویسید.

$x \in \mathbb{Z}$ ، یعنی اعداد مورد نظر ما عدد صحیح هستند. $-3 < x \leq 2$ یعنی اعداد مورد نظر ما از -3 بزرگتر و از 2 کوچکترند و خود 2 هم عضو اعداد است $(-2, -1, 0, 1, 2)$. هم چنین عبارت $2x+1$ نشان می دهد که ما باید این اعداد را در این رابطه قرار دهیم (2 برابر کرده و یک واحد به آن اضافه کنیم) تا اعضای مجموعه A به دست آید:

$$A = \{\underbrace{2 \times (-2) + 1}_{-3}, \underbrace{2 \times (-1) + 1}_{-1}, \underbrace{2 \times (0) + 1}_{+1}, \underbrace{2 \times (1) + 1}_{+3}, \underbrace{2 \times (2) + 1}_{+5}\} \Rightarrow A = \{-3, -1, +1, +3, +5\}$$



هر عدد طبیعی یک عدد حسابی است؛ یعنی $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$

همه اعدادهای طبیعی و حسابی، عضو $\mathbb{Z}$ هم هستند؛ پس: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$

از طرفی هر عدد صحیح نیز خود یک عدد گویا است. پس $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

(زیرا برای هر عدد صحیح می توان مخرج ۱ را در نظر گرفت.)

سوالات امتحانی فصل اول درس دوم خرداد ۱۴۰۲ و ۱۴۰۳

درس دوم: (مجموعه های برابر و نمایش مجموعه ها)

- ۲۰) مجموعه تهی زیرمجموعه ی همه مجموعه هاست. ☐ ص ☐ غ (۰/۲۵) (هرمزگان خ ۱۴۰۲)
- ۲۱) مجموعه ای که ۳ عضو داشته باشد ۹ زیرمجموعه دارد. ☐ ص ☐ غ (۰/۲۵) (البرز خ ۱۴۰۲)
- ۲۲) مجموعه اعداد طبیعی زیرمجموعه ی اعداد صحیح است. ☐ ص ☐ غ (۰/۲۵) (آذربایجان غربی خ ۱۴۰۲)

(۲۳) مجموعه «شمارنده های عدد ۸» دارای ۴ زیرمجموعه است. ☐ ص ☐ غ (۰/۲۵) (بوشهر خ ۱۴۰۲)

(۲۴) مجموعه ای که سه عضو داشته باشد دارای ۶ زیرمجموعه است. ☐ ص ☐ غ (۰/۲۵) (فارس خ ۱۴۰۲)

(۲۵) مجموعه زیرمجموعه ی همه مجموعه هاست. (۰/۲۵) (لرستان، مرکزی، ش تهران خ ۱۴۰۲)

(۲۶) یک مجموعه ۳ عضوی دارای زیرمجموعه است. (۰/۲۵) (خراسان جنوبی، یزد خ ۱۴۰۲)

(۲۷) تعداد اعضای مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^p \leq 1\}$ برابر با است. (۰/۲۵) (ایلام خ ۱۴۰۲)

(۲۸) اگر یک مجموعه دارای ۴ عضو باشد تعداد زیرمجموعه های آن برابر است. (۰/۲۵) (آذربایجان غربی خ ۱۴۰۲)

(۲۹) کدام گزینه درست است؟ (۰/۲۵) (آذربایجان شرقی خ ۱۴۰۲)

الف) ☐ $0 \in \mathbb{N}$ ب) ☐ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$ ج) ☐ $\sqrt{15} \in \mathbb{Q}$ د) ☐ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

۳۰) کدامیک از مجموعه های زیر، زیرمجموعه ی مجموعه $\{۲, ۵, ۱, ۳, ۶\}$ است ؟ (۰/۲۵) (کرمانشاه خ ۱۴۰۲)

الف) $\{ ۱, ۳, ۶, ۴ \}$ □ ب) $\{ ۳, ۶, ۵, ۱ \}$ □ ج) $\{ ۲, ۵, ۶, ۴ \}$ □ د) $\{ ۵, ۲, ۷, ۳ \}$ □

۳۱) جای خالی را در مجموعه زیر طوری کامل کنید که دو مجموعه برابر باشند. (۰/۲۵) (همدان خ ۱۴۰۲)

$$\{-\sqrt{۲۵}, -\frac{۲۴}{۳}\} = \{-۸, \dots\dots\dots\}$$

۳۲) باتوجه به دومجموعه ی برابر زیر، جاهای خالی را کامل کنید. (۰/۵) (تهران خ ۱۴۰۲)

$$\{۵, \dots\dots\dots, ۳, -۱\} = \{۲, \sqrt{۲۵}, \dots\dots\dots, ۳\}$$

۳۳) باتوجه به برابری دومجموعه، جای خالی را با عدد مناسب کامل کنید. (۰/۵) (خوزستان خ ۱۴۰۲)

$$\{-۷, ۱۱, \dots\dots\dots, -\sqrt{۲۵}\} = \{-۵, ۱۱, \dots\dots\dots, ۲\}$$

۳۴) اگر دومجموعه $\{۱۳, ۸\}$, $\{۲X + ۱, ۸\}$ برابر باشند، مقدار X را به دست آورید. (۰/۵) (آذربایجان غربی خ ۱۴۰۲)

۳۵) اگر مجموعه $A = \{a, b, c\}$ و B زیرمجموعه ای از A باشد، حداقل تعداد اعضا B چند است؟ (۵/۰) (اصفهان خ ۱۴۰۲)

۳۶) تمام زیرمجموعه های مجموعه $M = \{p\}$ را بنویسید. (۵/۰) (کرمانشاه خ ۱۴۰۲)

۳۷) همه ی زیرمجموعه های مجموعه $A = \{a, b\}$ را بنویسید. (۵/۰) (لرستان خ ۱۴۰۲)

۳۸) مجموعه زیر را به زبان ریاضی بنویسید. (۷۵/۰) (لرستان خ ۱۴۰۲)

$$B = \{p, q, r, s, \dots, 50\} =$$

۳۹) مجموعه D را با اعضا بنویسید. (۵/۰) (آذربایجان شرقی خ ۱۴۰۲)

$$D = \{px - 3 \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x < p\} =$$

۴۰) نمایش عددی مجموعه E را بنویسید. (۵/۰) (چهارمحال و بختیاری خ ۱۴۰۲)

$$E = \{p^x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\} =$$

(۴۱) مجموعه A را با نوشتن اعضا مشخص کنید. (۵/۰) (سمان خ ۱۴۰۲)

$$A = \{ \lfloor x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 3 \} =$$

(۴۲) مجموعه زیر را با اعضا مشخص کنید. (۵/۰) (فارس خ ۱۴۰۲)

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x \leq 2\} =$$

(۴۳) عضوهای مجموعه ی زیر را بنویسید. (۵/۰) (قزوین خ ۱۴۰۲)

$$\{ \lfloor x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 2 \} =$$

(۴۴) عضوهای مجموعه مقابل را مشخص کنید. (۵/۰) (کردستان خ ۱۴۰۲)

$$D = \{ \lfloor x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, -2 \leq x < 3 \} =$$

(۴۵) مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < 4\}$ را نوشتن اعضا مشخص کنید. (۵/۰) (مرکزی خ ۱۴۰۲)