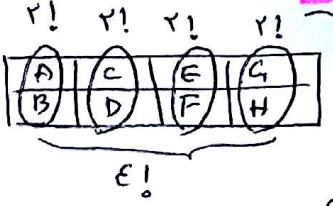
حل تمرین ① صفحه ۷۲ کتاب:



تعداد $= 4! \times (2!)^4 = 24 \times 16 = 384$

حل تمرین ۲ صفحه ۷۲ کتاب:

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ $\quad B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$

تعداد $= \binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 3! = 6 \times 10 \times 120 = 7200$

تعداد جایگشت‌ها ← تعداد انتخاب از B ↓ تعداد انتخاب از A ↙

حل تمرین ۳ صفحه ۷۲ کتاب:

حرف $\rightarrow$ ۴ تا
رقم $\rightarrow$ ۵ تا

الف) تعداد $= 9!$

ب) تعداد $= 6! \times 4!$

ج) تعداد $= 5! \times 4!$

د) تعداد $= 7! \times 3!$

حل تمرین ۴ صفحه ۷۲ کتاب:

به چند طریق می‌توان ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم را در یک صف قرار داد به طوری که دانش‌آموزان پایه دوازدهم همواره کنار هم باشند.

پاسخ: تعداد $= 7! \times 4!$

حل تمرین ۵ صفحه ۷۲ کتاب:

$n_1 = 2$ $\quad n_2 = 3$ $\quad n_3 = 1$ $\quad n = 6$

$2, 2 \quad 7, 7, 7 \quad 6$

تعداد $= \dfrac{n!}{n_1! n_2! n_3!} = \dfrac{6!}{2! \times 3! \times 1!} = 60$

حل تمرین ۶ صفحه ۷۲ کتاب:

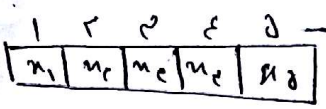
$a, a, a, b, c, c, d, d, d$

تعداد $= \dfrac{9!}{3! \times 1! \times 2! \times 3!} = 5040$

حل تمرین ۷ صفحه ۷۲ کتاب:

تعداد $= \binom{3}{2}\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = 210$

حل تمرین ۸ صفحه ۷۲ کتاب:



ردیف ← جایگاه $\quad$ تعداد ← رنگ

الف)

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 11 \quad n_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq 5$

تعداد $= \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11+5-1}{5-1} = \binom{15}{4}$

ب) $n_i \geq 1 \quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 11$

$\xrightarrow[k=5]{n=11}$ تعداد $= \binom{n-1}{k-1} = \binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4}$

پ) $\begin{cases} n_2 \geq 2 \\ n_5 > 3 \end{cases} \quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 11$

$\begin{cases} n_2 \geq 2 \rightarrow n_2 - 2 \geq 0 \rightarrow y_2 \geq 0 \\ n_5 > 3 \rightarrow n_5 \geq 4 \rightarrow n_5 - 4 = y_5 \geq 0 \end{cases}$

$\rightarrow n_1 + (n_2 - 2) + n_3 + n_4 + (n_5 - 4) = 11 - 6$

$n_1 + y_2 + n_3 + n_4 + y_5 = 5 \quad n_i, y_i \geq 0$

$1 \leq i \leq 5$

تعداد $= \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4}$

ت) $n_3 = 0 \quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 11 \quad \begin{cases} n_4 \geq 5 \end{cases}$

ادامه در صفحه بعد ←

Scanned by CamScanner

ادامه تمرین ۸ مثبت (ت) صفحه ۷۲ کتاب:

$n_2 = 0$ $\quad y_4 \geq 0 \rightarrow n_4 - 5 \geq 0 \rightarrow n_4 \geq 5$

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 11$

$n_1 + n_2 + 0 + (n_4 - 5) + n_5 = 11 - 5$

$n_1, n_2, n_3, n_4 \geq 0$ $\quad n_1 + n_2 + y_4 + y_5 = 6$

تعداد $= \binom{6}{3} = \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{n+k-1}{k-1} = 84$

حل تمرین ۹ صفحه ۷۲ کتاب:

الف) $n_1 + n_2 + \cdots + n_{10} = 15$ $\quad n_i > 0$ $\quad 1 \leq i \leq 10$

حل

$n_i > 0 \rightarrow n_i - 1 \geq 0 \rightarrow y_i \geq 0$

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} = 15$

$\downarrow -1 \quad \downarrow -1 \quad \downarrow -1 \quad \downarrow -1 \quad \downarrow -1 \quad \downarrow -1 \quad \downarrow -1 \quad \downarrow -1 \quad \downarrow -1 \quad \downarrow -1$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} = 5$

$n_i > 0$, $y_i \geq 0$

تعداد $= \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{10+5-1}{5} = \binom{14}{5}$

ب) $n_1 + n_2 + \cdots + n_6 = 12$ $\quad n_1 > 2$, $n_2 \geq 3$, $n_3 \geq 4$, $n_4 \geq 5$, $n_5 \geq 6$

حل:

$n_1 > 2 \rightarrow n_1 \geq 3 \rightarrow n_1 - 3 \geq 0 \rightarrow y_1 \geq 0$

$n_5 \geq 6 \rightarrow n_5 - 6 \geq 0 \rightarrow y_5 \geq 0$

$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 12$

$\downarrow -3 \quad \downarrow -2 \quad \downarrow -3 \quad \downarrow -4 \quad \downarrow -5 \quad \downarrow -6$

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 12 - 23$

$y_i \geq 0$

$\xrightarrow{n=6}$ تعداد $= \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{6+6-1}{6-1}$

$= \binom{11}{5}$

ادامه تمرین ۹ صفحه ۷۲ کتاب:

ت) $n_1 + n_2 + \cdots + n_6 = 11$ $\quad 1 \leq n_i$ $\quad 1 \leq i \leq 6$

حل:

تعداد جواب‌های طبیعی = تعداد $\binom{6-1}{11-1} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{11}{5}$

$= 330$

ث) $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 8$ $\quad n_i \geq 0$ $\quad 1 \leq i \leq 4$

حل: جمله n_3^2 را به حذف کنید.

$n_3 = 0 \rightarrow n_1 + n_2 + n_4 = 8 \xrightarrow{n=8} \binom{k+n-1}{k-1} = \binom{3+8-1}{3-1} = \binom{10}{2} = 45$

$n_3 = 1 \rightarrow n_1 + n_2 + n_4 = 7 \xrightarrow{n=7} \binom{3+7-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$

$n_3 = 2 \rightarrow n_1 + n_2 + n_4 = 4 \xrightarrow{n=4} \binom{3+4-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$

$n_3 = 3 \rightarrow n_1 + n_2 + n_4 = 1 \xrightarrow{n=1} \binom{3+1-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$

انتخاب ندارد.

پس تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی برابر است با:

$45 + 36 + 15 + 3 = 99$

ج) $n_1 + n_2 + n_3 + \sqrt{n_4} + 1 = 20$ $\quad n_i \geq 0$ $\quad 1 \leq i \leq 3$

حل: جمله $\sqrt{n_4}$ را به حذف کنید.

$n_4 = 0 \rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = 19 \xrightarrow{n=19} \binom{3+19-1}{3-1} = \binom{21}{2} = 210$

$n_4 = 1 \rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = 18 \xrightarrow{n=18} \binom{3+18-1}{3-1} = \binom{20}{2} = 190$

$n_4 = 4 \rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = 15 \xrightarrow{n=15} \binom{3+15-1}{3-1} = \binom{17}{2} = 136$

$n_4 = 9 \rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = 10 \xrightarrow{n=10} \binom{3+10-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66$

$n_4 = 16 \rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = 3 \xrightarrow{n=3} \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$

جواب ندارد.

پس تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی است با:

$210 + 190 + 136 + 66 + 10 = 610$

Scanned by CamScanner

تمرین ۱۰ صفحه ۷۳ کتاب

به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

حل: چون توپ‌ها یکسان هستند پس:

افراد →	۱	۲	۳
تعداد توپ →	x_1	x_2	x_3

$i=1,2,3$ $\quad x_i \geq 0$ $\quad x_1+x_2+x_3=5$

تعداد $= \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$

تمرین ۱۱ صفحه ۷۳ کتاب:

به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

حل: چون توپ‌ها یکسان هستند پس:

افراد →	۱	۲	۳	۴
تعداد توپ →	x_1	x_2	x_3	x_4

$i=1,2,3,4$ $\quad x_i \geq 1$ $\quad x_1+x_2+x_3+x_4=8$

$\xrightarrow[k=4]{n=8}$ تعداد جواب‌های طبیعی $= \binom{n-1}{k-1} = \binom{8-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$

تمرین ۱۲ صفحه ۷۳ کتاب:

آیا مربع لاتین حاصل از اعمال جابه‌جایی روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع لاتین اولیه متعامد باشد؟

حل: خیر زیرا هر دو درایه که در مربع اول برابر هستند درایه‌های نظیر آنها در مربع جدید هم برابر می‌شود مثلاً:

$$A_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&1&2\\\hline 2&4&1\\\hline\end{array} \quad \begin{array}{l}1\to 2\\2\to 4\\4\to 1\end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&4&1\\\hline 1&2&4\\\hline 4&1&2\\\hline\end{array} = B$$

ادامه تمرین ۱۲

دو مربع لاتین A و B متعامد نیستند زیرا در قطر اصلی A هم ۱ و در قطر اصلی B هم ۲ هستند و باید برابر باشند یا اینکه اگر A و B را کنار هم قرار دهیم در مربع AB اعداد ۲ رقمی یکسان تولید می‌شود پس A و B متعامد نیستند

$$AB = \begin{array}{|c|c|c|}\hline (11)&22&31\\\hline 31&(12)&23\\\hline 23&41&(13)\\\hline\end{array}$$

تمرین ۱۳ صفحه ۷۳ کتاب:

مربع لاتین 4×4 مقابل را در نظر بگیرید.

$$A_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&2\\\hline 1&2&3\\\hline 2&3&1\\\hline\end{array}$$

الف) سطر اول و سطر سوم مربع A را جابجا کنید و مربع حاصل را A_1 بنامید، آیا A و A_1 متعامدند؟

حل:

$$A_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&1\\\hline 1&2&3\\\hline 3&1&2\\\hline\end{array} \Longrightarrow AA_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 32&13&21\\\hline 11&22&33\\\hline 23&31&12\\\hline\end{array}$$

بله A و A_1 متعامدند زیرا در مربع AA_1 عدد تکراری نداریم.

ب) ابتدا سطر اول و سوم مربع A را جابجا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابجا کنید و مربع حاصل را A_2 بنامید آیا A و A_2 متعامدند؟

حل:

$$A_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&2\\\hline 1&2&3\\\hline 2&3&1\\\hline\end{array} \xrightarrow[\text{اول و سوم}]{\text{تعویض سطر}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&1\\\hline 1&2&3\\\hline 3&1&2\\\hline\end{array} \xrightarrow[\text{دوم و سوم}]{\text{تعویض سطر}}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&1\\\hline 3&1&2\\\hline 1&2&3\\\hline\end{array} = A_2 \longrightarrow AA_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 32&13&21\\\hline 13&21&32\\\hline 21&32&13\\\hline\end{array}$$

خیر A و A_2 متعامد نیستند زیرا AA_2 عدد تکراری دارد.

Scanned by CamScanner

ادامه حل تمرین ۱۳ صفحه ۷۳ کتاب

ب) با توجه به قسمت های الف و ب به سئوالات زیر پاسخ دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض سطرهای یک ماتریس همواره مربع لاتین متعامد با مربع لاتین اول بدست می‌آید؟

حل: خیر طبق (ب) دو مربع A و A_2 متعامد نیستند.

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتین غیرمتعامد با مربع لاتین اول بدست می‌آید؟

حل: خیر طبق الف A و A_1 متعامدند.

تمرین ۱۴ صفحه ۷۳ کتاب

قرار است ۶ مدرس T_1 و T_2 و ... و T_6 در ۶ جلسه متوالی در ۶ کلاس C_1 و C_2 و ... و C_6 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً در یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه ریزی کنید.

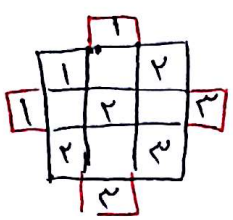
حل:

کلاس \ جلسه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
C_2	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
C_3	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3	T_4
C_4	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2	T_3
C_5	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1	T_2
C_6	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_1

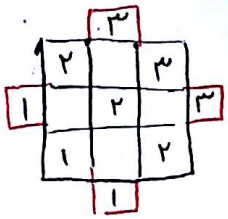
تمرین ۱۵ صفحه ۷۳ کتاب

دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.

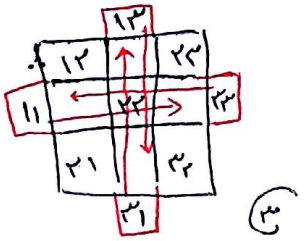
حل:



①



②



③

$\Rightarrow$

۱۲	۳۱	۲۳
۳۳	۲۲	۱۱
۲۱	۱۳	۳۲

④

$\Rightarrow$ $A=$

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

رقم کریت چپ ④

$B=$

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

رقم کریت راست ④

A و B دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ هستند.

برای مرتبه ۷ هم به طریق به می‌توان نوشت.

Scanned by CamScanner

حل تمرینات صفحه ۷۲ و ۷۳ کتاب — صفحه (۵)

تمرین ۱۲ صفحه ۷۳ کتاب:

در یک مسابقه اتومبیل‌رانی ۷ راننده در ۷ روز هفته با ۷ ماشین مختلف در ۷ مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد.

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند.

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند.

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند.

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار بکار گرفته شود.

برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

حل:

مربع لاتین برای ۷ مسیر

راننده ←

شنبه	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
شنبه	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱
یکشنبه	۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
دوشنبه	۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
سه‌شنبه	۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
چهارشنبه	۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵
پنجشنبه	۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶
جمعه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷

$B =$

مربع لاتین برای ۷ ماشین.

راننده →

شنبه	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
شنبه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
یکشنبه	۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دوشنبه	۶	۷	۱	۲	۳	۴	۵
سه‌شنبه	۵	۶	۷	۱	۲	۳	۴
چهارشنبه	۴	۵	۶	۷	۱	۲	۳
پنجشنبه	۳	۴	۵	۶	۷	۱	۲
جمعه	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۱

$A =$

A و B را متقابلاً پس مربع AB که ما برنامه‌ریزی ضرورتاً است.

مثلاً در روز چهارشنبه عدد ۵۷ به این معنی است که در روز چهارشنبه راننده R_5 با ماشین شماره ۵ در مسیر ۷ باید رانندگی کند.

$AB =$

شنبه	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7
شنبه	۱۲	۲۳	۳۴	۴۵	۵۶	۶۷	۷۱
یکشنبه	۷۳	۱۴	۲۵	۳۶	۴۷	۵۱	۶۲
دوشنبه	۶۴	۷۵	۱۶	۲۷	۳۱	۴۲	۵۳
سه‌شنبه	۵۱	۶۲	۷۳	۱۴	۲۵	۳۶	۴۴
چهارشنبه	۴۶	۵۷	۶۱	۷۲	۱۳	۲۴	۳۵
پنجشنبه	۳۷	۴۱	۵۲	۶۳	۷۴	۱۵	۲۶
جمعه	۲۱	۳۲	۴۳	۵۴	۶۵	۷۶	۱۷

Scanned by CamScanner

تمرین ۱ صفحه ۸۴ کتاب:

در بین اعداد طبیعی از ۱ تا ۹۰ ($1 \le n \le 90$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟

حل:

$S = \{1, 2, 3, \dots, 90\} \rightarrow |S| = 90$

مجموعه اعدادی از S که بر ۲ بخش پذیرند $= A$

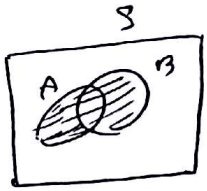
$B =$ " " " " " ۳ " " " " "

$|A| = \left[\frac{90}{2}\right] = 45$, $|B| = \left[\frac{90}{3}\right] = 30$

$|A \cap B| = \left[\frac{90}{6}\right] = 15$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$= 45 + 30 - 15 = 60$



تمرین ۲ صفحه ۸۴ کتاب:

در بین اعداد از ۱ تا ۲۰۰ ($1 \le n \le 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟

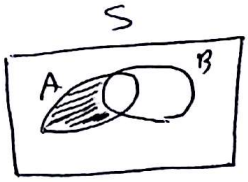
حل

$S = \{1, 2, 3, \dots, 200\} \rightarrow |S| = 200$

$A =$ مجموعه اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند $\rightarrow |A| = \left[\frac{200}{4}\right] = 50$

$B =$ مجموعه اعدادی که بر ۷ بخش پذیرند

$|A \cap B| = \left[\frac{200}{28}\right] = 7$



$|A \cap \bar{B}| = |A - B| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$

تمرین ۳ صفحه ۸۴ کتاب:

در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید.

الف) چند نفر هر سه رشته ورزشی را بازی می‌کنند.

ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند.

پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند

ت) چند نفر فقط دو یک رشته بازی می‌کنند.

حل: فرض کنید

$A =$ مجموعه افرادی که فوتبال بازی می‌کنند $\rightarrow |A| = 15$

$B =$ " " " والیبال " " $\rightarrow |B| = 11$

$C =$ " " " بسکتبال " " $\rightarrow |C| = 9$

$S =$ مجموعه کلیه افراد $\rightarrow |S| = 34$

$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = 10$, $|A \cap B| = 5$, $|B \cap C| = 6$

$|A \cap C| = 3$

$|A \cap B \cap C| = ?$

حل الف)

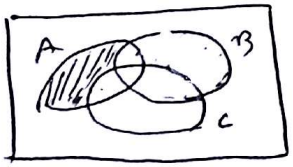
$10 = |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = \overline{|A \cup B \cup C|} = |S| - |A \cup B \cup C|$

$10 = |S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$

$10 = 34 - (15 + 11 + 9 - 5 - 6 - 3 + |A \cap B \cap C|)$

$\rightarrow |A \cap B \cap C| = 3$

حل (ب)

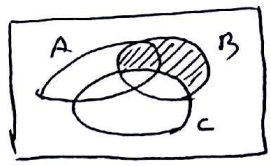


طبق شکل

تعداد $= |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$= 15 - 5 - 3 + 3 = 10$

حل (پ)



طبق شکل

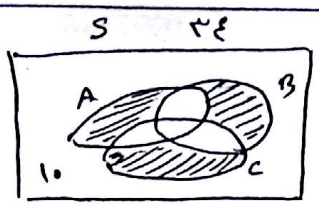
تعداد $= |B - C| = |B| - |B \cap C|$

$= 11 - 6 = 5$

ادامه ←

Scanned by CamScanner

ادامه حل تمرین ۳



قسمت ت)

طبق شکل

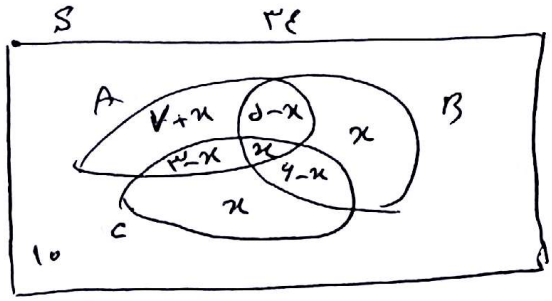
$|A\cup B\cup C| = ۳۴ - ۱۰ = ۲۴$

تعداد $= |A\cup B\cup C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + ۲|A\cap B\cap C|$

$= ۲۴ - ۵ - ۳ - ۴ + ۲(۳) = ۱۶$

روش دوم حل تمرین ۳:

به کمک نمودار ون داریم:



جمع همه $= (۷+x)+(۵-x)+(۳-x)+(۴-x)+۳x+۱۰ = ۳۴$

$۳۱ + x = ۳۴ \longrightarrow x = ۳$

طبق شکل

الف) $|A\cap B\cap C| = x = ۳$

ب) تعداد $= ۷+x = ۷+۳ = ۱۰$

پ) تعداد $= (۵-x)+x = ۵$

ت) تعداد $= (۷+x)+x+x = ۷+۳x = ۷+۳(۳) = ۱۶$

تذکر: این روش ممکن است در اتفاقات زیادی نمره نداشته باشد و برای کنکور مفید است.

ادامه تمرین ۴

اعداد ۵ رقمی و ۶ رقمی طبل مکث برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم.

حل:

S_2 مجموعه اعداد ۵ رقمی خانه صفر

$|S| = \boxed{۹}\boxed{۹}\boxed{۹}\boxed{۹}\boxed{۹} = ۹^۵$

A_2 مجموعه رمزهای ۵ رقمی خانه رقم ۲

B_2 ۳ " " " " " "

C_2 ۷ " " " " " "

$|A| = |B| = |C| = \boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۸}\boxed{۸} = ۸^۵$

$|A\cap B| = |A\cap C| = |B\cap C| = \boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷}\boxed{۷} = ۷^۵$

$|A\cap B\cap C| = \boxed{۶}\boxed{۶}\boxed{۶}\boxed{۶}\boxed{۶} = ۶^۵$

$|A\cup B\cup C| = ۸^۵+۸^۵+۸^۵-۷^۵-۷^۵-۷^۵+۶^۵ = ۳(۸^۵)-۳(۷^۵)+۶^۵$

$\overline{|A\cup B\cup C|} = ۹^۵ - \left(۳(۸^۵)-۳(۷^۵)+۶^۵\right) = ۳۳۹۰$ تعداد رمزهای مورد نظر

$۳۳۹۰ \times ۶ = ۲۰۳۴۰$

حداکثر زمان باز شدن به ثانیه.

تمرین ۵ صفحه ۸۴:

چه تعداد تابع $f: A\to B$ می‌توان تعریف کرد. اگر بدانیم $|A| = ۵$ و $|B| = ۴$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

حل:

تعداد توابع $f: A\to B$ $= |B|^{|A|} = ۴^۵$

چون تعداد اعضای A از تعداد اعضای B بیشتر است پس تعداد توابع یک به یک برابر صفر است. زیرا

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

تعداد توابع یک به یک $f: A\to B$ $=$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
۴	۳	۲	۱	۰

$= ۴\times ۳\times ۲\times ۱\times ۰ = ۰$

تمرین ۶ صفحه ۸۴ کتاب

اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و خانه صفر را که ۳ رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و اتفاق کردن هر یک از این ←

Scanned by CamScanner

تمرین ۶ صفحه ۸۴ کتاب:

به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد. اگر نخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب برسد؟

حل: این مسأله معادل این است که بخواهیم تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی را بیابیم که تعداد می‌شود

تعداد = $\boxed{8}\boxed{7}\boxed{6}\boxed{5}\boxed{4} = 6720$

یا: تعداد $= P(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 6720$

تمرین ۷ صفحه ۸۴ کتاب:

به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی بین ۳ داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

حل: تعداد حالات برابر است با تعداد توابع

$|A|=6,\ |B|=3$ و $R_f=B$ که $f: A \to B$

پس فرض کنید

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$

$S = \{$ همه توابع $f: A \to B \}$

$|S| = \boxed{a_1}\boxed{a_2}\boxed{a_3}\boxed{a_4}\boxed{a_5}\boxed{a_6} = \boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3}\boxed{3} = 3^6 = 729$

$A_i = \{ f: A \to B \mid f(a_i) \neq b_j ,\ 1 \le i \le 6,\ 1 \le j \le 3 \}$

$|A_1| = |A_2| = |A_3| = \boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2} = 2^6$

$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = \boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1} = 1^6 = 1$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

بقیه ←

ادامه حل تمرین ۷

طبق اصل شمول و عدم شمول برای ۳ مجموعه داریم:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 2^6+2^6+2^6-1-1-1+0 = 189$

$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

$= 729 - 189 = 540$

تمرین ۸ صفحه ۸۴ کتاب

ثابت کنید در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده‌اند.

حل:

۳۶۸ نفر را ۳۶۸ کبوتر فرض کرده، و تعداد روزهای سال که عبارتند از ۳۶۵ یا ۳۶۶ را تعداد لانه‌ها فرض می‌کنیم چون تعداد کبوترها از تعداد لانه‌ها بیشتر است پس طبق اصل لانه کبوتر حداقل ۲ کبوتر در یک لانه قرار می‌گیرند و این بدین معناست که حداقل ۲ نفر در یک روز سال متولد شده‌اند.

تمرین ۹ صفحه ۸۴ کتاب:

ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند لااقل ۷ نفر آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

حل: توسط ۷ روز هفته و ۱۲ ماه سال $7 \times 12 = 84$ لانه به صورت زیر داریم

روز \ ماه	۱	۲	۳	...	۱۲
۱					
۲					
⋮					
۷					

اگر ۵۰۵ دانش‌آموز را ۵۰۵ کبوتر فرض کنیم داریم:

$505 = 6 \times 84 + 41$

$505 - 420 = 85$

$85 - 84 = 1$

$\hookrightarrow$ حداقل تعداد در یک لانه $= 6+1 = 7$

Scanned by CamScanner

تمرین ۱۰ صفحه ۸۴ ک ـ

حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مستقل نماشی مس بقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یک ان است؟

حل کامیت به هر روز سال ۱۹ = ۱ - ۲۰ نفر بدهیم سپس یکی اضافه کنیم پس حداقل تعداد می‌شود:

۱) برای سال معمولی → $(۱۹ \times ۳۶۵) + ۱ = ۶۹۳۶$

یا

۲) برای سال کبیسه → $(۱۹ \times ۳۶۶) + ۱ = ۶۹۵۵$

تمرین ۱۱ صفحه ۸۴ ک ـ

ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل ۲ عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است.

حل: هر عدد طبیعی یا زوج است یا فرد که این دو وضعیت را دو لانه فرض می‌کنیم

اگر ۳ عدد طبیعی را ۳ کبوتر فرض کنیم چون تعداد کبوترمان از تعداد لانه‌ها بیشتر است پس حداقل ۲ کبوتر یا ۲ عدد در یک لانه هستند نیز این دو عدد هر ۲ زوج یا هر ۲ فرد هستند پس در هر دو حالت مجموعشان زوج می‌شود.

تمرین ۱۲ صفحه ۸۴ ک ـ

مجموعه اعداد $A = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۸۴\}$ را در نظر می‌گیریم. ثابت دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.

حل هر دو عددی که مجموعشان ۸۵ است را درون یک مجموعه گوشته و آن را یک لانه فرض می‌کنیم پس ۴۲ لانه به صورت زیر داریم:

$\{۱, ۸۵\}, \{۲, ۸۴\}, \{۳, ۸۳\}, \dots, \{۴۲, ۴۳\}$

حالا برای انتخاب زیرمجموعه‌های ۴۳ عضوی مثل این است که بخواهیم از ۴۲ لانه، ۴۳ کبوتر انتخاب کنیم پس مجبوریم از یک لانه ۲ تا انتخاب کنیم و این حال دو عددی است که مجموعشان ۸۵ است پس هر زیر مجموعه ۴۳ عضوی از این مجموعه حداقل ۲ عضو دارد که مجموعشان ۸۵ است.

تمرین ۱۳ صفحه ۸۵ ک ـ

مجموعه اعداد $A = \{۱, ۵, ۹, ۱۳, \dots, ۷۷, ۸۱, ۸۵\}$ را که به صورت یک تصاعد حسابی مرتب شده‌اند در نظر می‌گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم ثابت دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر ۹۰ است.

حل صفحه بعد ←

Scanned by CamScanner

حل تمرین ۱۳ صفحه ۸۵ کتاب

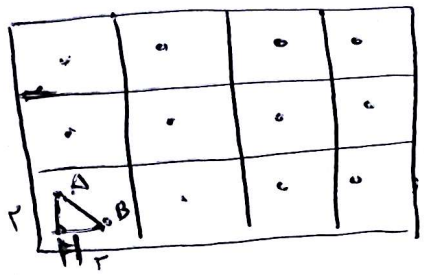
اعدادی که مجموعشان ۹۰ است را روی یک مجموعه نوشته و آن‌ها را لانه‌ها فرض می‌کنیم پس ۱۳ لانه به صورت زیر داریم که ۲ تا اعضای و ۱۰ تا ۲ عضوی هستند.

$\{1\}, \{5,85\}, \{9,81\}, \{13,77\}, \{17,73\}, \{21,69\}$
$\{25,65\}, \{29,61\}, \{33,57\}, \{37,53\}$
$\{41,49\}, \{45\}$

حالا برای انتخاب ۱۳ عضوی مثل این است که بخواهیم از ۱۲ لانه ۱۳ کبوتر انتخاب کنیم پس مجبوریم از یک لانه ۲ تا انتخاب کنیم و این همان دو عددی هستند که مجموعشان ۹۰ است. پس هر زیرمجموعه ۱۳ عضوی از این مجموعه، حداقل ۲ عضو دارد که مجموعشان ۹۰ است.

ادامه حل تمرین ۱۳

در یک مربع واحد می‌دانیم که طبق استدلال زیر فاصله آن‌ها یعنی فاصله A و B از $\sqrt{8}$ کمتر است.



$$\begin{cases} AH<2 \\ HB<2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AH^2<4 \\ HB^2<4 \end{cases} \xrightarrow{+}$$

$$AH^2+HB^2<8 \rightarrow AB^2<8 \rightarrow AB<\sqrt{8}$$

تمرین ۱۴ صفحه ۸۵ کتاب:

۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آن‌ها از هم کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.

حل: ۱۳ نقطه را ۱۲ کبوتر فرض کرده، و طبق شکل مستطیل را به ۱۲ مربع به ضلع ۲ تقسیم کرده و آن‌ها را ۱۲ لانه فرض می‌کنیم. حتماً لقاء کبوتران از لقاء لانه‌ها بیشتر است پس حداقل دو نقطه از ۱۳ نقطه در یک لانه قرار می‌گیرند پس حداکثر این دو نقطه فاصله‌شان از $\sqrt{8}$ کمتر است زیرا طول قطر هر مربع $\sqrt{8}$ است.

تمرین ۱۵ صفحه ۸۵ کتاب:

۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می‌گیریم، ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد، به طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح می‌باشد.

حل: ۵ نقطه با مختصات صحیح را ۵ کبوتر فرض کرده و برای هر نقطه با مختصات صحیح یکی از ۴ حالت زیر وجود دارد که آن‌ها را ۴ لانه فرض می‌کنیم

$$\begin{bmatrix} \text{فرد} \\ \text{فرد} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{فرد} \\ \text{زوج} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{زوج} \\ \text{فرد} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{زوج} \\ \text{زوج} \end{bmatrix}$$

چون تعداد کبوتران از تعداد لانه‌ها بیشتر است پس حداقل دو نقطه در یک لانه قرار می‌گیرند پس مختصات این دو نقطه از نظر زوج و فرد بودن مثل هم هستند یعنی مختصات اول هر دو زوج یا هر دو فرد و مختصات دوم هم هر دو زوج یا هر دو فرد هستند پس ←

ادامه حل ۱۵

طبق استدلال زیر محل تقاطع وسط این دو نقطه صبح می‌باشد.

$$A=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{نقطه وسط} = M = \begin{bmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{y_1+y_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2k_1}{2} \\ \frac{2k_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

که k_1 و k_2 دو عدد صحیح هستند.

Scanned by CamScanner