در تدوین و نگارش این جزوه از کتاب بسیار خوب آموزش شگفت انگیز هندسه ۱ نوشته ی مهندس علی منصف شکری به عنوان مرجع اصل استفاده شده است. همچنین از کتاب های زیر نیز استفاده شده است:

۱ـ نردبام ریاضی یازدهم خیلی سبز

۲ـ آی کیو گاج ریاضی یازدهم

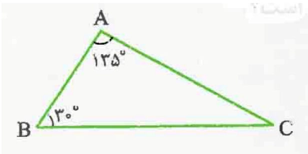
نسبت و تناسب در هندسه

تعریف نسبت: حاصل تقسیم عدد a بر عدد غیرصفر b ، یعنی $\frac{a}{b}$ را نسبت a به b می گوییم.

مثلاً اگر دو پاره خط به طول‌های $AB = ۶$ و $CD = ۸$ داشته باشیم، نسبت طول AB به طول CD برابر $\frac{۶}{۸}$ یا $\frac{۳}{۴}$ است.

حالا چند تست نسبتاً ساده از مفهوم و تعریف نسبت حل می کنیم و سپس به سراغ مفهوم تناسب می رویم.

سؤال۱: در مثلث ABC مطابق شکل نسبت کوچک ترین زاویه به بزرگ ترین زاویه کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

گزینه۲ـ همانطور که در شکل می بینید یکی از زاویه های مثلث معلوم نیست. اما می دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است بنابراین داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow ۱۳۵^\circ + ۳۰^\circ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۱۵^\circ \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{۱۵}{۱۳۵} = \frac{۱}{۹}$$

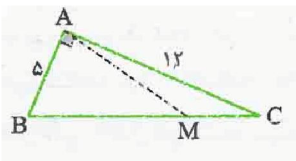
سؤال۲: در یک مثلث قائم الزاویه اختلاف دو زاویه‌ی نابرابر ۲۰° است. نسبت آن دو زاویه کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۱}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۷}{۱۱}$

پاسخ: گزینه ۴ـ فرض کنیم مثلث در رأس A قائمه باشد در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = ۹۰^\circ \\ \hat{B} - \hat{C} = ۲۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{+} ۲\hat{B} = ۱۱۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۵۵^\circ \Rightarrow \hat{C} = ۳۵^\circ \Rightarrow \frac{\hat{C}}{\hat{B}} = \frac{۳۵}{۵۵} = \frac{۷}{۱۱}$$

سؤال۳: در مثلث قائم الزاویه ABC مطابق شکل پاره خط AM آن را به دو مثلث با محیط های برابر تقسیم می کند. نقطه M وتر را به چه نسبتی تقسیم می کند.

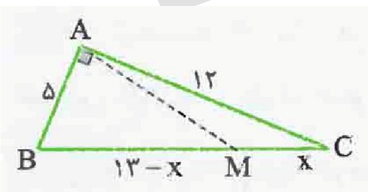


۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

پاسخ: گزینه۲ ـ ابتدا به کمک رابطهٔ فیثاغورس وتر را پیدا می کنیم:

$$BC^۲ = ۵^۲ + ۱۲^۲ = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۶۹ \Rightarrow BC = ۱۳$$

حال فرض کنیم یکی از قطعه های ایجاد شده روی وتر x باشد در این صورت قطعه دیگر $۱۳-x$ خواهد بود حال محیط های دو مثلث را برابر قرار می دهیم:



$$۵ + AM + ۱۳ - x = AM + ۱۲ + x \Rightarrow ۲x = ۶$$

$$\Rightarrow x = ۳ \Rightarrow \frac{x}{۱۳ - x} = \frac{۳}{۱۰}$$

همان طور که گفتیم تمرکز اصلی ما در بخش اول بر روی تناسب و خاصیت های آن است، بنابراین ابتدا با تعریف تناسب آشنا می شویم و سپس به سراغ خواص و ویژگی های آن می رویم:

تعریف تناسب:

اگر دو نسبت $\frac{c}{d}$ و $\frac{a}{b}$ برابر باشند، یعنی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ در این صورت این تساوی را یک تناسب می نامند. در تناسب به اعداد a و d اعداد طرفین و به اعداد c و b اعداد وسطین تناسب گفته می شود.

مثلاً تساوی $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ یک تناسب است ولی تساوی $\frac{3}{7}=\frac{2}{6}$ یک تناسب نیست، چون واقعاً $\frac{2}{6}$ برابر $\frac{3}{7}$ نیست اما خداییش $\frac{2}{6}$ با $\frac{1}{3}$ برابر است.

ویژگی‌های تناسب

① طرفین وسطین $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$	② معکوس‌کردن طرفین تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$
مثلن چون $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ است، می‌توان نتیجه گرفت: $4\times6=8\times3$	مثلن چون $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$، بنابراین: $\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$
③ تعویض جای طرفین و وسطین $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$	④ ترکیب صورت‌ها و مخرج‌ها $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$
مثلن از $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ می‌توان نتیجه گرفت $\frac{4}{8}=\frac{3}{6}$ یا برعکس.	مثلن چون $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$، می‌توان نتیجه گرفت: $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$
⑤ ترکیب نسبت در صورت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$	⑥ ترکیب نسبت در مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$
مثلن چون $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$، می‌توان نتیجه گرفت: $\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$	مثلن چون $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$، می‌توان نتیجه گرفت: $\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$
⑦ تفضیل نسبت در صورت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$	⑧ تفضیل نسبت در مخرج $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$
مثلن چون $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ می‌توان نتیجه‌گرفت $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$	مثلن چون $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$، می‌توان نتیجه گرفت: $\frac{6}{2}=\frac{3}{1}$
⑨ تعمیم ویژگی‌ها $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_1+a_2+\cdots}{b_1+b_2+\cdots}$	
مثلن از تناسب $\frac{9}{12}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ می‌توان نتیجه‌گرفت: $\frac{18}{24}=\frac{9}{12}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$	

البته این ویژگی ها هیچ وقت به طور مستقیم مورد سؤال قرار نمی گیرند، بلکه ابزاری هستند در خدمت تالس و تشابه و مسائلی از این قبیل. اما در همین مفاهیم ساده و پیش پا افتاده راه های هیجان انگیزی هم وجود دارد که دانستن آنها در حل تست ها واقعاً معجزه می کند. به عنوان مثال یکی از این راه های هیجان انگیز را بیان می کنیم، سپس تستی را یک بار با استفاده از خواص تناسب حل می کنیم و بار دیگر با روش هیجان انگیز تا تفاوت ها را احساس کنید.

راه های هیجان انگیز:

۱) در تناسب ها اگر یک طرف به صورت پارامتری و یک طرف به صورت عددی بود، می توانید صورت و مخرج طرف پارامتری را به صورت ضریبی مانند k از طرف معلوم فرض کنید.

مثلاً اگر $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ بود فرض کنید: $a=3k$ و $b=4k$

۲) اگر در یک تناسب صورت ها پارامتری و مخرج ها عددی بود (یا برعکس) صورت ها را به صورت ضریبی از k از اعداد مخرج فرض کنید (یا برعکس)

مثلاً اگر $\frac{x}{۲}=y=\frac{z}{۵}$ بود فرض کنید: $x=۲k, y=k$ و $z=۵k$

سؤال۴: اگر $\frac{a}{a+b}=\frac{۲}{۵}$ حاصل $\frac{b}{b-a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینه۴

راه معمولی: $\frac{a}{a+b}=\frac{۲}{۵}\xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل در}}\frac{a}{b}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل در}}\frac{b-a}{b}=\frac{۱}{۳}\xrightarrow{\text{معکوس کردن}}\frac{b}{b-a}=۳$

همان طور که می بینید طبق این روش ما باید به آن چه مسئله داده و آن چه می خواهد خوب دقت کنیم تا کشف کنیم که طراح سوال چه بلایی سر تناسب اول آورده که به شکل دوم تبدیل شده اما در راه هیجان انگیز نیازی به این ریاضت و کشف و شهود نیست:

راه هیجان انگیز: $\frac{a}{a+b}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow a=۲k, b=۳k\Rightarrow\frac{b}{b-a}=\frac{۳k}{k}=۳$

سؤال۵: اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۵}$ بوده و داشته باشیم $۲x-y+z=۱۲$ مقدار y کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳ــ تناسب داده شده را برابر k قرار می دهیم:

$$\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۵}=k\Rightarrow x=۲k, y=۳k, z=۵k$$

حال x،y و z را برحسب k در رابطه دوم قرار می دهیم تا k به دست آید:

$$۲(۲k)-(۳k)+(۵k)=۱۲\Rightarrow ۶k=۱۲\Rightarrow k=۲\Rightarrow y=۳k=۶$$

سؤال۶: زوایای مثلثی متناسب با اعداد ۲، ۵ و ۸است. مقدار تفاضل دو زاویه‌ی نابزرگ تر برحسب درجه کدام است؟

۱) ۳۶° ۲) ۲۴° ۳) ۴۶° ۴) ۴۴°

پاسخ: گزینه ۱ــ منظور مسئله این است که $\frac{C}{۲}=\frac{B}{۵}=\frac{A}{۸}$ بنابراین کافی است تناسب را برابر k قرار دهیم:

$$\frac{A}{۸}=\frac{B}{۵}=\frac{C}{۲}=k\Rightarrow A=۸k, B=۵k, C=۲k\Rightarrow ۸k+۵k+۲k=۱۸۰^\circ\Rightarrow k=۱۲$$
$$\Rightarrow\hat{B}-\hat{C}=۵k-۲k=۳k=۳۶^\circ$$

راه های هیجان انگیز

اگر یک سمت تناسب پارامتری و سمت دیگر آن عددی بود و در ادامه سوال از شما حاصل یک نسبت را خواستند که برحسب همان پارامترها بود، اعداد موجود در صورت و مرج طرف معلوم را به جای پارامترها در نظر بگیرید و در عبارت خواسته شده قرار دهید.

مثلاً اگر داده شود $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۵}$ و حاصل یک نسبت برحسب a و b را بخواهد کافی است $a=۳$ و $b=۵$ فرض شود و در نسبت خواسته شده قرار گیرد.

سؤال۷: اگر $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ باشد حاصل $\frac{a^2+2b^2}{b^2-a^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{22}{7}$ ۲) $\frac{19}{5}$ ۳) $\frac{22}{5}$ ۴) $\frac{19}{7}$

پاسخ: گزینه ۳ـ چون یک نسبت برحسب a و b داشده شده و یک نسبت دیگر برحسب همان a و b را میخواهد می توان فرض کرد $a=2$ و $b=3$ و حال حاصل عبارت خواسته شده به راحتی به دست می آید:

$$\frac{a^2+2b^2}{b^2-a^2}=\frac{4+18}{9-4}=\frac{22}{5}$$

توصیه های هیجان انگیز

اما گاهی اوقات هر دو طرف تناسب پارامتری هستند، در این موارد چه کار باید کرد؟! به توصیه های زیر خوب دقت کنید.

۱) اگر در یک تناسب، یک متغیر با ضرایب برابر هم در صورت و هم در مخرج کسر وجود داشت با تفضیل نسبت در طرف شلوغ تر، تناسب را خلوت کنید.

مثلاً اگر $\frac{y}{y+5}=\frac{x}{x+3}$ باشد با تفضیل نسبت در مخرج تناسب را خلوت می کنیم:

$$\frac{x}{x+3}=\frac{y}{y+5}\Rightarrow\frac{x}{3}=\frac{y}{5}\ \text{یا}\ \frac{x}{y}=\frac{3}{5}$$

۲) اگر در یک تنهاسب یک متغیر با ضرایب قرینه در صورت و مخرج وجود داشت، باید ترکیب نسبت در طرف شلوغ تر انجام دهید تا تناسب خلوت شود.

مثلاً اگر $\frac{y}{2x}=\frac{2-y}{5-2x}$ باشد ابتدا جای وسطین را عوض می کنیم و آن گاه با ترکیب نسبت تناسب را خلوت می کنیم:

$$\frac{2-y}{y}=\frac{5-2x}{2x}\Rightarrow\frac{2}{y}=\frac{5}{2x}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{5}{4}$$

سؤال۸: اگر $\frac{y}{y+2}=\frac{x}{x+3}$ باشد حاصل $\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$ کدام است.

۱) $\frac{6}{23}$ ۲) $\frac{6}{17}$ ۳) $\frac{7}{19}$ ۴) $\frac{6}{19}$

پاسخ: گزینه۴ـ چون هر دو طرف تناسب پارامتری و شلوغ هستند اول با تفضیل نسبت در مخرج تناسب را کمی ساده می کنیم:

$$\frac{x}{x+3}=\frac{y}{y+2}\Rightarrow\frac{x}{3}=\frac{y}{2}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$$

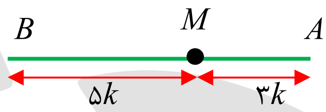
حالا می توانیم با فرض $x=3$ و $y=2$ به سراغ همان راه هیجان انگیز برویم:

$$\frac{xy}{x^2+xy+y^2}=\frac{3\times 2}{9+6+4}=\frac{6}{19}$$

سؤال۹: اگر طول پاره خط $AB=24$ و نقطهٔ M روی پاره خط AB چنان قرار گرفته باشد که $\frac{AM}{MB}=\frac{3}{5}$ باشد اندازهٔ $MB-MA$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴ـ باز هم با یک تناسب مواجه هستیم که یک طرف پارامتری و یک طرف عددی است. کافی است فرض کنیم $MA=3k$ و $MB=5k$ بنابراین مطابق شکل خواهیم داشت:



$۳k + ۵k = ۲۴ \Rightarrow k = ۳$

$\Rightarrow MB - MA = ۵k - ۳k = ۲k = ۶$

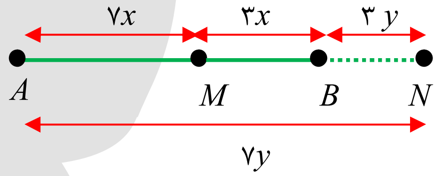
راه هیجان انگیز

اگر یک تناسب برابر نسبت معلومی باشد مثلاً $\frac{a}{c} = \frac{c}{d} = \frac{۳}{۴}$ در این صورت اگر فرض کنید: $a = ۳k$ و $b = ۴k$ باید **c** و **d** را برحسب ضریبی از پارامتر دیگر فرض کنید، مثلاً: $c = ۳t$ و $d = ۴t$

سؤال۱۰: روی پاره خط AB نقطه m و روی امتداد آن نقطهٔ N را طوری انتخاب می کنیم که $\frac{MB}{MA} = \frac{NB}{NA} = \frac{۳}{۷}$ باشد. اگر اندازهٔ پاره خط $AB = ۲۰$ باشد، فاصلهٔ دو نقطهٔ M و N از هم چقدر است؟

۱) ۲۳   ۲) ۲۱   ۳) ۱۷   ۴) ۱۹

☜ پاسخ: گزینه۲ـ ابتدا طبق راهکار گفته شده پاره خط ها را برحسب دو پارامتر نشان می دهیم یعنی:



$MA = ۷x , MB = ۳x, NB = ۳y , NA = ۷y$

$$\begin{cases} ۳x + ۷x = ۲۰ \Rightarrow x = ۲ \\ ۷y - ۳y = ۲۰ \Rightarrow y = ۵ \end{cases} \Rightarrow MN = ۳x + ۳y = ۶ + ۱۵ = ۲۱$$

واسطهٔ هندسی (میانگین هندسی)

اگر طرفین یا وسطین یک تناسب یکسان باشند، یعنی $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ در این صورت با طرفین وسطین کردن تناسب به یک رابطهٔ جدید می رسیم که در این صورت **b** را واسطه هندسی بین **a** و **c** می نامند.

$$\boxed{b^۲ = ac}$$

مثلاً واسطهٔ هندسی بین دو عدد ۴ و ۹ را **b** فرض کنیم $b^۲ = ۴ \times ۹$ و در نتیجه $b = ۶$ خواهد بود؛ به عبارت دیگر:

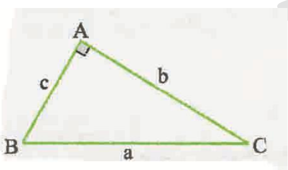
$b = \sqrt{۴ \times ۹} = ۶$

اگر **a** و **b** دو عدد حقیقی باشند در این صورت عدد $\frac{a+b}{۲}$ واسطهٔ حسابی (عددی) **a** و **b** خواهد بود.

سؤال۱۱: در یک مثلث قائم الزاویه وتر واسطه هندسی بین یک ضلع و دو برابر ضلع دیگر است. زاویه های مثلث به چه نسبتی تقسیم می شوند؟

۱) ۱، ۲، ۳   ۲) ۱، ۱، ۲   ۳) ۵، ۳، ۲   ۴) ۶، ۵، ۱

☜ پاسخ: گزینه ۲ـ فرض کنید اضلاع مثلث مطابق شکل روبه رو باشد حال طبق داده های مسئله داریم:



$a^۲ = (۲b)(c) \Rightarrow a^۲ = ۲bc$

از طرفی چون مثلث قائم الزاویه است $a^۲ = b^۲ + c^۲$ می باشد و در نتیجه:

$b^۲ + c^۲ = ۲bc \Rightarrow b^۲ + c^۲ - ۲bc = ۰ \Rightarrow (b - c)^۲ = ۰ \Rightarrow b = c$

بنابراین مثل قائم الزاویه متساوی الساقین است یعنی زاویه های آن ۴۵ و ۴۵ و ۹۰ است که متناسب با اعداد ۱، ۱ و ۲ می باشد.

سؤال۱۲: دو پاره خط با طول های x و $۱۳-x$ مفروض اند. اگر طول پاره خط واسطهٔ هندسی بین آن دو ۶ باشد طول پاره خط بزرگتر کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینه ۴ـ $۶^۲ = x(۱۳-x) \Rightarrow x(۱۳-x) = ۳۶ = ۴\times۹ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ ۱۳-x = ۹ \end{cases}$

تمرین ویژه فردورزان: نشان‌دهید اگر واسطهٔ هندسی و حسابی بین‌دو عدد با هم برابر باشند، آن دو عدد نیز با هم برابرند.

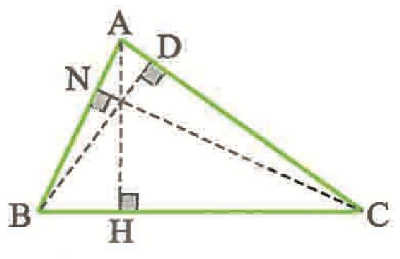
حالا با یادگیری کامل تناسب، خواص و ویژگی هایش می توانیم آن را در مسائل مختلف هندسه مورد استفاده قرار دهیم.

اولین و دم دستی ترین کاربرد تناسب رابطهٔ بین اضلاع و ارتفاع های یک مثلث است.

رابطهٔ اضلاع و ارتفاع ها در مثلث

مثلث ABC را مطابق کل در نظر بگیرید. اگر ارتفاع های وارد بر اضلاع BC , AC و AB را به ترتیب با h_a, h_b, h_c نشان دهیم خواهیم داشت:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}ah_a = \frac{۱}{۲}bh_b = \frac{۱}{۲}ch_c \Rightarrow \boxed{a\times h_a = b\times h_b = c\times h_c}$$



نتیجهٔ هیجان انگیز

چون همیشه در یک مثلث مشخص مساحت مقدار ثابتی است، بنابراین هر چه یک ضلع بزرگتر باشد ارتفاع وارد بر آن کوچکتر است و برعکس. یعنی در تمام مثلث ها بزرگترین ارتفاع همواره بر کوچکترین ضلع و کوچکترین ارتفاع نیز بر بزرگترین ضلع فرود می آید و در این میان ارتفاع متوسط از فرصت استفاده کرده و دقیقاً روی ضلع متوسط فرد می آید.

حواست باشه! این نتیجهٔ جالب دربارهٔ نیمساز و میانه نیز در تمام مثلث ها صادق است.

سؤال۱۳: در یک مثلث به اضلاع ۱۰، ۱۷ و ۲۱ اندازهٔ کوتاه ترین ارتفاع ۸ است. اندازهٔ بلندترین ارتفاع این مثلث کدام است؟

۱) ۱۵/۸ ۲) ۱۶/۸ ۳) ۱۷/۸ ۴) ۱۴/۸

پاسخ: گزینه ۲ـ می دانیم که کوتاه ترین ارتفاع بر بلندترین ضلع فرود می آید، بنابراین ارتفاع ۸ بر ضلع ۲۱ و بلندترین ارتفاع بر ضلع ۱۰ فرود می آید، بنابراین:

$$ah_a = bh_b \Rightarrow ۸\times۲۱ = ۱۰\times h_b \Rightarrow h_b = ۱۶/۸$$

سؤال۱۴: در مثلثی به اضلاع $a+۸, a+۱$ و a اندازهٔ بزرگترین ارتفاع ها ۸ و ۷/۲ است. در این مثلث اندازهٔ کوتاهترین ارتفاع کدام است؟

۱) $\frac{۷۲}{۱۷}$ ۲) $\frac{۶۴}{۱۷}$ ۳) $\frac{۸۰}{۱۷}$ ۴) $\frac{۵۴}{۱۷}$

پاسخ: گزینه ۱ـ بزرگترین ارتفاع ها بر کوچکترین اضلاع فرود می آید؛ یعنی ارتفاع به طول ۸ بر ضلع a و ارتفاع به طول ۷/۲ بر ضلع $a+1$ در نتیجه:

$$8\times a=7/2\times(a+1)\Rightarrow 8a=7/2a+7/2\Rightarrow 0/8a=7/2\Rightarrow a=\frac{72}{8}=9$$

حال کوتاهترین ارتفاع بر بلندترین ضلع فرود می آید یعنی بر ضلع $a+8$ بنابراین:

$$h\times(a+8)=8\times a\Rightarrow h\times(9+8)=8\times 9\Rightarrow h=\frac{72}{17}$$

راه هیجان انگیز

با توجه به این که $a\times h_a=b\times h_b$ می باشد با استفاده از عکس طرفین وسطین به نتیجهٔ جالب زیر می رسیم:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}}$$

یعنی «نسبت اضلاع مثلث متناسب با عکس نسبت ارتفاع ها است» بنابراین همیشه به جای نسبت ارتفاع های یک مثلث می توانیم عکس نسبت اضلاع را قرار دهیم و یک نتیجهٔ هیجان انگیز رابطه به دست آمده این است که «اگر رابطهٔ ه درجه ای بین اضلاع مثلثی برقرار باشد، عین همان رابطه بین عکس ارتفاع ها برقرار است و برعکس.»

حواست باشه! این رابطه به جای تساوی حتی می تواند یک نامساوی هم درجه هم باشد.

مثلاً اگر در مثلثی $a^2>b^2+c^2$ باشد آنگاه $\frac{1}{h_a^2}>\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$ خواهد بود و...

سؤال۱۵: در مثلثی به اضلاع $a=6, b=3, c=5$ حاصل $\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}$ کدام است؟

۱) $\frac{13}{8}$ ۲) $\frac{6}{13}$ ۳) $\frac{8}{13}$ ۴) $\frac{13}{6}$

پاسخ: گزینه۴ـ همان طور که دیدید نسبت دو ارتفاع مثلث متناسب با عکس نسبت اضلاع است بنابراین داریم:

$$\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}=\frac{3}{6}+\frac{5}{3}=\frac{3+10}{6}=\frac{13}{6}$$

سؤال۱۶: در مثلث ABC اگر a و c اضلاع h_a و h_c ارتفاع های وارد بر آن ها باشند و $\frac{h_a}{h_c}=\frac{a}{c}$ نوع مثلث کدام است؟

۱) قائم الزاویه ۲) متساوی الساقین ۳) متساوی الاضلاع ۴) نامشخص

پاسخ: گزینه ۲ـ $\frac{h_a}{h_c}=\frac{a}{c}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{a}{c}\Rightarrow c^2=a^2\Rightarrow a=c\Rightarrow$ متساوی الساقین

سؤال۱۷: در مثلثی اندازه های دو ضلع ۱۰ و ۱۵ واحد است. مجموع ارتفاع های وارد بر این دو ضلع برابر ارتفاع ضلع سوم است. اندازهٔ ضلع سوم کدام است؟ (خارج تجربی ۹۵)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۷/۵ ۴) ۸

پاسخ: گزینه۱ـ فرض کنیم $a=10$ و $b=15$ باشد در این صورت:

$$h_a+b_b=h_c\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}\Rightarrow\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{c}\Rightarrow c=\frac{10\times 15}{10+15}=\frac{150}{25}=6$$

سؤال۱۸: در مثلث قائم الزاویهٔ ABC اگر h_a, h_b و h_c ارتفاع ها باشند، کدام رابطه درست است؟ $(\hat{A}=۹۰^\circ)$

۱) $h_a^۲ = h_b \times h_c$ ۲) $h_a^۲ = h_b^۲ + h_c^۲$ ۳) $\frac{۱}{h_a^۲} = \frac{۱}{h_b^۲} + \frac{۱}{h_c^۲}$ ۴) $۲h_a = h_b + h_c$

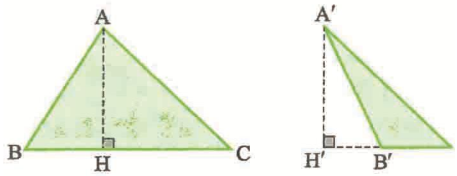
پاسخ: گزینه ۳ـ $\hat{A}=۹۰^\circ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \frac{۱}{h_a^۲} = \frac{۱}{h_b^۲} + \frac{۱}{h_c^۲}$

در ادامه، کاربردهای دیگری از تناسب را با هم می بینیم اما این بار در دو مثلث مختلف.

مثلث های هم ارتفاع

فرض کنید دو مثلث مانند ABC و $A'B'C'$ داریم که ارتفاع های برابر دارند حال مساحت دو مثلث را حساب می کنیم و بر هم تقسیم می کنیم:

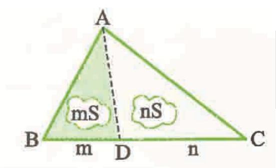
$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC \\ S_{A'B'C'} = \frac{۱}{۲} A'H' \times B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{BC}{B'C'}$$



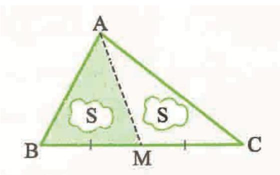
یعنی می توان گفت: در دو مثلث هم ارتفاع، نسبت مساحت ها برابر است با نسبت قاعده ها.

نتایج هیجان انگیز

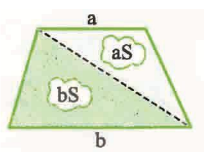
۱) اگر یک پاره خط از رأس مثلث به نقطه ای روی قاعده وصل شود و قاعده را به نسبت m و n تقسیم کند، مثلث های ایجاد شده هم ارتفاع هستند و مساحت را نیز به همان نسبت تقسیم می کنند:



۲) میانه ها در هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کنند. چون مثلث های ایجاد شده ارتفاع و قاعدهٔ برابر دارند.



۳) در هرذوزنقه هر قطر آن را به دو مثلث هم ارتفاع تقسیم می کند.



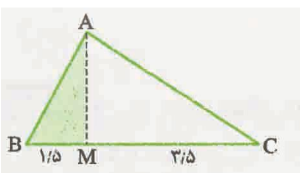
سؤال۱۹: در شکل زیر مساحت مثلث رنگ شده چند درصد مساحت مثلث ABC است؟

۱) ۳۰

۲) ۱۵

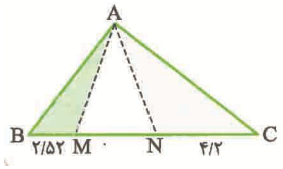
۳) ۲۵

۴) ۳۵



☜ پاسخ: گزینه ۱ـ مثلث های AMB و ABC هم ارتفاع هستند بنابراین نسبت مساحت های آنها با نسبت قاعده های آنها برابر است. یعنی: $\frac{S_{AMB}}{S_{ABC}} = \frac{1/5}{5} = \frac{15}{50} = \%30$

سؤال۲۰: در شکل مقابل مساحت AMB چند درصد مساحت مثلث ANC است؟



۱) ۵۰

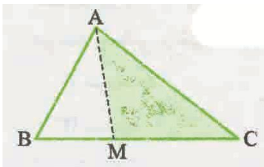
۲) ۸۰

۳) ۶۰

۴) ۳۰

☜ پاسخ: گزینه ۴ـ $\frac{S_{ABM}}{S_{ANC}} = \frac{2/52}{4/2} = \frac{252}{420} = \frac{6}{10} = \%60$

سؤال۲۱: در شکل زیر مساحت مثلث AMC شصت درصد مساحت مثلث ABC است. حاصل $\frac{MB}{MC}$ کدام است؟



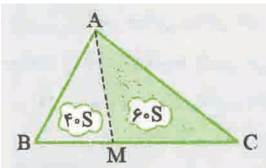
۱) $\frac{2}{5}$

۲) $\frac{3}{2}$

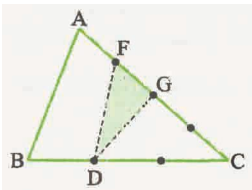
۳) $\frac{3}{5}$

۴) $\frac{2}{3}$

☜ پاسخ: گزینه ۴ـ اگر مساحت AMC را $60s$ فرض کنیم مساحت AMB برابر $40s$ خواهد بود بنابراین: $\frac{2}{3} = \frac{40s}{60s} = \frac{MB}{MC} \Leftarrow$



سؤال۲۲: در شکل مقابل ضلع AC به ۴ قسمت مساوی و ضلع BC به ۳ قسمت مساوی تقسیم شده است. مساحت مثلث DFG چه کسری از مساحت ABC است؟



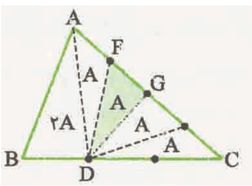
۱) $\frac{3}{16}$

۲) $\frac{1}{5}$

۳) $\frac{1}{7}$

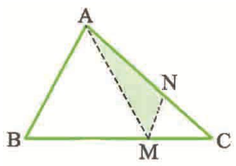
۴) $\frac{1}{6}$

☜ پاسخ: گزینه ۴ـ ابتدا به مثلث ADC نگاه کنید. قاعده به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است، پس مساحت هر ۴ قسمت برابر است. حال به مثلث های ADC و ABD نگاه کنید. باز هم هم ارتفاع هستند ولی $DC = 2BD$ پس مساحت ABD نصف مساحت ADC یعنی برابر $2A$ می شود (چون قاعده اش نصف قاعدهٔ ADC است) بنابراین:



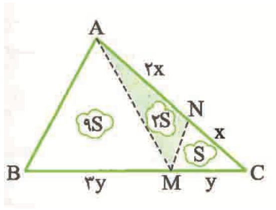
$$\frac{S_{FDG}}{S_{ABC}} = \frac{A}{6A} = \frac{1}{6}$$

سؤال۲۳: در شکل مقابل $AN=2NC$ و $BM=3MC$ می باشد. مساحت رنگ شده چه کسری از مساحت ABC است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$

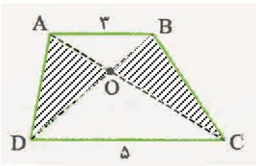
۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$



پاسخ: گزینه ۲ـ

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\frac{۲S}{۱۲S}=\frac{۱}{۶}$$

سؤال۲۴: در ذوزنقه $ABCD$ مطابق شکل نسبت مساحت دو مثلث رنگ شده کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$

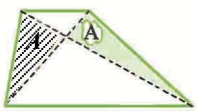
۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

پاسخ: گزینه۴ـ مثلث های DBC و ADC هم ارتفاع برابر دارند و هم قاعدهٔ برابر پس هم مساحت هستند. از طرفی مثلث ODC در هر دو مشترک است پس اگر آن را برداریم دو مثلث رنگی می مانند که هم مساحت هستند.

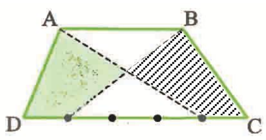
البته این خاصیت یکی از خاصیت های مهم ذوزنقه است که می توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

خاصیت پروانه ای ذوزنقه ها

با رسم دو قطر هر ذوزنقه، ۲ پروانه متولد می شود (یکی پروانهٔ رنگی و یکی هم پروانهٔ سفید رنگ) که مساحت بال های پروانهٔ رنگی که دو ضلع آن ساق های ذوزنقه هستند،با هم برابر است و بعدها بیشتر دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد.

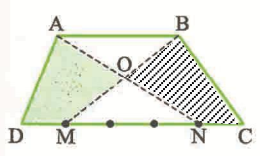


سؤال۲۵: دردر ذوزنقهٔ $ABCD$ مطابق شکل قاعدهٔ بزرگ به ۵ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی رنگی نسبت به هم کدام وضع را دارند؟



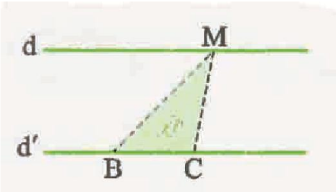
۱) هم محیط ۲) همنهشت

۳) متشابه ۴) هم مساحت



پاسخ: گزینه ۴ـ مثلث های ADN و BMC دارای ارتفاع ها و قاعده های برابر هستند و در نتیجه مساحت های برابر دارند. از طرفی مثلث OMN در هر دوی آن ها مشترک است که اگر آن را کنار بگذاریم مساحت چهارضلعی های سایه زده شده برابر خواهد بود.

سؤال۲۶: در شکل مقابل دو خط d و d' موازی اند. با تغییر نقطهٔ M روی خط d محیط و مساحت مثلث MBC چگونه تغییر می کند؟



۱) محیط ثابت ـ مساحت ثابت

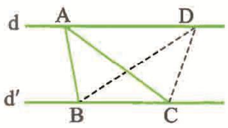
۲) محیط متغیر ـ مساحت ثابت

۳) محیط متغیر ـ مساحت متغیر

۴) محیط ثابت ـ مساحت متغیر

پاسخ: گزینه ۲ـ چون قاعدهٔ BC ثابت است و M روی خطی موازی قاعدهٔ BC حرکت می کند، با تغییرات M روی خط d ارتفاع مثلث MBC تغییر نمی کند، اما با دور شدن M از رأس های B و C محیط رفته رفته افزایش می یابد.

سؤال۲۷: در شکل مقابل $d \parallel d'$ است و مساحت مثلث ABC برابر $8cm^2$ است. اگر $BD = 6cm$ باشد فاصلهٔ رأس C از ضلع BD کدام است؟



۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{8}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ـ مثلث های ABC و DBC دارای قاعده ها و ارتفاع های برابر هستند پس هم مساحت هستند یعنی $S_{BDC} = 8cm^2$ می باشد حال فاصلهٔ رأس C از ضلع BD همان ارتفاع وارد بر ضلع BD است بنابراین:

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} BD \times CH \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \times 6 \times CH \Rightarrow CH = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

تست های نسبت و تناسب

سؤال ۱: اگر $\frac{y}{3+y}=\frac{2x}{5+2x}$ و $\frac{4b+2}{2+3b}=\frac{4a+5}{5+3a}$ آنگاه $\frac{x}{y}-\frac{a}{b}$ برابر کدام است؟

۱) $-\frac{5}{9}$ ۲) $-\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{5}{9}$

سؤال ۲: اگر $\frac{1}{10}=\frac{3z-x}{9}=\frac{2(y-z)}{5}=\frac{2x-3y}{2}$ حاصل $x-y+z$ کدام است؟

۱) ۱/۶ ۲) ۱/۴ ۳) ۱/۸ ۴) ۱/۲

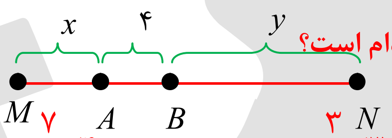
سؤال ۳: از تساوی $\frac{2\sin^4 x-6\sin x}{2\cos^4 x-6\cos x}=\frac{2\sin^4 x-5\sin x}{2\cos^4 x-5\cos x}$ حاصل عبارت کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{1}{4}$

سؤال ۴: پاره خط MN را طوری در نظر بگیرید که نقاط B,A روی آن و در یک طرفِ وسط MN واقع باشند. اگر $\frac{3}{5}=\frac{MB}{NB},\frac{1}{3}=\frac{MA}{NA}$ و $AB=4$ باشد، طول پاره خط MN چند برابر طول پاره خط MA است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

سؤال ۵: اگر $\frac{3b+7}{7+2b}=\frac{3a+10}{10+2a}$ باشد $\frac{a}{b}$ کدام است؟



۱) $\frac{10}{7}$ ۲) $\frac{7}{10}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{7}{3}$

سؤال ۶: اگر $\frac{3}{4}=\frac{x}{y},\frac{x+3}{y+4}=a$ آنگاه a کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{2x}{3y}$ ۴) $\frac{2y}{3x}$

سؤال ۷: اگر $\frac{a}{2b-a}=-3,\frac{2b-c}{2b+c}=\frac{1}{3}$ باشد محیط مثلثی به اضلاع a , b , c چند برابر b است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

سؤال ۸: اگر $\frac{x}{y}=\frac{z}{t}$ کدامیک از گزینه های زیر درست است؟

۱) $\frac{x-y}{x+y}=\frac{z-t}{z+t}$ ۲) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{z+t}{t-z}$

۳) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{z-t}{z+t}$ ۴) $\frac{x-y}{x+y}=\frac{t-z}{z+t}$

سؤال ۹: نقطه های P , Q روی پاره خط AB و در یک طرف وسط AB قرار دارند. نقطهٔ P پاره خط AB را به نسبت $\frac{2}{3}$ و نقطهٔ Q پاره خط AB را به نسبت $\frac{3}{4}$ تقسیم می کند. اگر $PQ=2$ باشد، آنگاه طول پاره خط AB برابر است با:

۱) ۱۲ ۲) ۲۸ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

سؤال ۱۰: اگر $\frac{1}{c}+\frac{2}{b}=\frac{3}{a}$ حاصل $\frac{a}{c}$ کدام است؟

۱) $\frac{3b-a}{2b}$ ۲) $\frac{2b-3a}{b}$ ۳) $\frac{3b-2a}{b}$ ۴) $\frac{b-3a}{2b}$

سؤال ۱۱: اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\lambda>0$ آنگاه $\frac{3\sqrt{b^2+d^2}}{\sqrt{a^2+c^2}}$ کدام است؟

۱) λ ۲) $\frac{3}{\lambda}$ ۳) 3λ ۴) $\frac{\lambda}{3}$

سؤال ۱۲: اگر $\frac{a}{2b-a}=-3 , \frac{2b-c}{2b+c}=\frac{1}{3}$ باشد محیط مثلثی به اضلاع a , b , c چند برابر b است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

سؤال ۱۳: اگر $\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{2}=\dots=\frac{a_n}{n}$ آنگاه حاصل $a_1+a_2+\dots+a_n$ چند برابر a_1 است؟

۱) n ۲) $n(n+1)$ ۳) $\frac{n(n+1)}{2}$ ۴) $2n(n+1)$

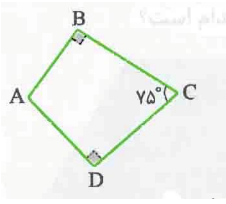
سؤال ۱۴: روی پاره خط $AB=a$ دو نقطهٔ M و N را طوری اختیار می کنیم که $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{AN}=2$. در این صورت طول پاره خط MN چقدر است؟

۱) $\frac{a}{4}$ ۲) $\frac{a}{2}$ ۳) $\frac{a}{3}$ ۴) $\frac{2a}{3}$

سؤال ۱۵: بر روی پاره خط AB و امتداد آن دو نقطهٔ M و N چنان اختیار شده اند که $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=k$ نسبت $\frac{AM}{AN}$ کدام است؟ $(k>1)$

۱) $\frac{k}{k+1}$ ۲) $\frac{k-1}{k}$ ۳) $\frac{k-1}{k+1}$ ۴) $\frac{k}{k-1}$

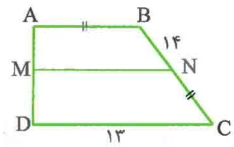
سؤال۱۶: در چهارضلعی داده شده مطابق شکل نسبت زاویه‌ی کوچکتر به زاویه‌ی بزرگتر کدام است؟



۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{3}{7}$

۳) $\frac{5}{9}$ ۴) $\frac{5}{7}$

سؤال۱۷: در دوزنقه‌ی قائم الزاویه ای مطابق شکل اندازهٔ ساق قائم ۵ است. پاره خط MN موازی قاعده که دو ساق را به هم وصل می کند آن را به دو ذوزنقه با محیط های برابر تقسیم می کند. این پاره خط ساق ها را به چه نسبتی تقسیم می کند؟



۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

سؤال۱۸: اگر $\frac{x}{y}=\frac{2}{5}$ باشد حاصل $\frac{3x-y}{2y-x}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{7}$ ۳) $\frac{2}{7}$ ۴) $\frac{1}{6}$

سؤال۱۹: اگر $\frac{x}{3}=y=z+1$ باشد و داشته باشیم $x+3y+z=20$ مقدار z کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۲

سؤال۲۰: زوایای‌یک‌چهارضلعی برحسب درجه‌متناسب با اعداد۳، ۳ ، ۴ و ۵ هستند. تفاضل‌دو زاویهٔ‌بزرگتر کدام-است؟

۱) 36° ۲) 24° ۳) 30° ۴) 18°

سؤال۲۱: اگر $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ باشد حاصل $\frac{xy}{x^2+y^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{16}$ ۲) $\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{7}{25}$ ۴) $\frac{12}{25}$

سؤال۲۲: اگر $\frac{y-4}{y}=\frac{x-3}{x}$ باشد حاصل $\frac{2x-y}{x+y}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{2}{7}$ ۴) $\frac{3}{5}$

سؤال۲۳: پاره خط AB به طول ۱۵ مفروض است. اگر نقطه M روی امتداد AB چنان قرار گرفته باشد که $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{8}$ باشد در این صورت اندازه MB کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۳۰

سؤال۲۴: روی پاره خط AB به طول ۱۲ دو نقطهٔ M و N را طوری انتخاب می کنیم که رابطهٔ $\frac{MA}{MB}=\frac{BN}{AN}=۳$ بین آنها برقرار باشد. اندازهٔ پاره خط MN کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۳

سؤال۲۵: دو پاره خط با طول های a و ۸ مفروض اند. اندازهٔ پاره خطی که واسطهٔ هندسی بین این دو پاره خط است برابر ۱۲ می باشد. a کدام است؟

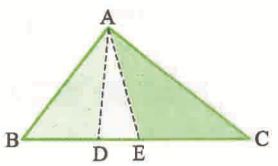
۱) ۲۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

سؤال۲۶: اگر $\frac{a}{b}=\frac{۴}{۹}$ باشد و عدد ۱۲ واسطهٔ هندسی بین a و b باشد $b-a$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

سؤال۲۷: در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است.

حاصل $\frac{DE}{DC}+\frac{BE}{CE}$ کدام است؟



۱) $\frac{۶}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$

۳) $\frac{۶}{۵}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۲}$

تست های نسبت و تناسب

۱ـ پاسخ: گزینه۲

از روی تساوی $\frac{y}{۳+y}=\frac{۲x}{۵+۲x}$ به سه روش نسبت $\frac{x}{y}$ را به دست می آوریم:

❖ راه اول

$$\text{طرفین وسطین}:(۲x)(۳+y)=(y)(۵+۲x)\Rightarrow ۶x+۲xy=۵y+۲xy\Rightarrow ۶x=۵y\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۵}{۶}$$

❖ راه دوم

$$\text{تفضیل نسبت در مفرج}:\frac{۲x}{۲x-(۵+۲x)}=\frac{y}{y-(۳+y)}\Rightarrow \frac{۲x}{-۵}=\frac{y}{-۳}\Rightarrow -۶x=-۵y\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{-۵}{-۶}=\frac{۵}{۶}$$

❖ راه سوم

$$\text{معکوس کردن تناسب}:\frac{۵+۲x}{۲x}=\frac{۳+y}{y}\Rightarrow \text{تفکیک کسر}\Rightarrow \frac{۵}{۲x}+\frac{۲x}{۲x}=\frac{۳}{y}+\frac{y}{y}\Rightarrow \frac{۵}{۲x}=\frac{۳}{y}\Rightarrow$$

$$\text{تعویض جای طرفین با وسطین}\Rightarrow \frac{۲x}{y}=\frac{۵}{۳}\xrightarrow{\times\frac{۱}{۲}}\frac{x}{y}=\frac{۵}{۶}$$

حال برویم سراغ تساوی $\frac{۴b+۲}{۲+۳b}=\frac{۴a+۵}{۵+۳a}$ و نسبت $\frac{a}{b}$ را به دست آوریم:

$$\frac{۴a+۵}{(۴a+۵)(۵+۳a)}=\frac{۴b+۲}{(۴b+۲)-(۲+۳b)}\Rightarrow \frac{۴a+۵}{a}=\frac{۴b+۲}{b}\Rightarrow \frac{۴a}{a}+\frac{۵}{a}=\frac{۴b}{b}+\frac{۲}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{a}=\frac{۲}{b}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۵}{۲}$$

بنابراین خواهیم داشت: $\frac{x}{y}-\frac{a}{b}=\frac{۵}{۶}-\frac{۵}{۲}=\frac{۵-۱۵}{۶}=-\frac{۱۰}{۶}=-\frac{۵}{۳}$

۲ـ پاسخ: گزینه۱

اگر صورت نسبت ها را با هم و مفرج آنها را با هم جمع کنیم مسئله به راحتی حل می شود ببینید:

$$\frac{۲x-۳y}{۲}=\frac{۲y-۲z}{۵}=\frac{۳z-x}{۹}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow \frac{(۲x-۳y)+(۲y-۲z)+(۳z-x)}{۲+۵+۹}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$\Rightarrow \frac{x-y+z}{۱۶}=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow ۱۰(x-y+z)=۱۶\Rightarrow x-y+z=\frac{۱۶}{۱۰}=۱/۶$$

۳ـ پاسخ: گزینه۱

$$\frac{۲\sin^۴ x-۵\sin x}{۲\cos^۴ x-۵\sin x}=\frac{۲\sin^۴ x-۶\sin x}{۲\cos^۴ x-۶\cos x}\Rightarrow\frac{۲\sin^۴ x-۵\sin x}{۲\sin^۴ x-۶\sin x}=\frac{۲\cos^۴ x-۵\cos x}{۲\cos^۴ x-۶\cos x}$$

$$\Rightarrow\frac{۲\sin^۴ x-۵\sin x}{(۲\sin^۴ x-۵\sin x)-(۲\sin^۴ x-۶\sin x)}=\frac{۲\cos^۴ x-۵\cos x}{(۲\cos^۴ x-۵\cos x)-(۲\cos^۴ x-۶\cos x)}$$

$$\Rightarrow\frac{۲\sin^۴ x-۵\sin x}{\sin x}=\frac{۲\cos^۴ x-۵\cos x}{\cos x}\Rightarrow\frac{۲\sin^۴ x}{\sin x}-\frac{۵\sin x}{\sin x}=\frac{۲\cos^۴ x}{\cos x}-\frac{۵\cos x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow ۲\sin^۳ x-۵=۲\cos^۳ x-۵\Rightarrow ۲\sin^۳ x=۲\cos^۳ x\Rightarrow\frac{\sin^۳ x}{\cos^۳ x}=۱\Rightarrow\tan^۳ x=۱\Rightarrow\tan x=۱$$

بنابراین $\cot x=\frac{۱}{\tan x}=۱$ و در نتیجه: $\tan x+\cot x=۱+۱=۲$

۴ـ ☜ پاسخ: گزینه۳

براساس گفته های مسأله شکل زیر را خواهیم داشت:

در نتیجه می توان نوشت:

$$\begin{cases}\frac{MB}{NB}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\frac{x+۴}{y}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow ۵x+۲۰=۳y\Rightarrow ۵x-۳y=-۲۰\quad(۱)\\ \frac{MA}{NA}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{x}{y+۴}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳x=y+۴\Rightarrow ۳x-y=۴\quad(۲)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}\begin{matrix}\\ \times(-۳)\end{matrix}\begin{cases}۵x-۳y=-۲۰\\ ۳x-y=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۵x-۳y=-۲۰\\ -۹x+۳y=-۱۲\end{cases}\Rightarrow -۴x=-۳۲\Rightarrow x=۸\Rightarrow y=۲۰$$

بنابراین طول پاره خط MN *برابر می شود:* $x+۴+y=۸+۴+۲۰=۳۲$

پس طول پاره خط MN *، چهار برابر طول پاره خط* MA *است.*

۵ـ ☜ پاسخ: گزینه۱

عبارت را طرفین وسطین می کنیم:

$$(۳a+۱۰)(۷+۲b)=(۳b+۷)(۱۰+۲a)\Rightarrow ۲۱a+۶ab+۷۰+۲۰b=۳۰b+۶ab+۷۰+۱۴a$$

$$\Rightarrow ۷a=۱۰b\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۷}$$

۶ـ ☜ پاسخ: گزینه۱

قبلاً یاد گرفتیم: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$ *(یعنی در تساوی کسرها، مجموع صورت ها تقسیم بر مجموع مخرج ها، با هر کدام از کسرها برابر است)*

بنابراین: $\frac{x}{y}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{x+۳}{y+۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$

۷ـ پاسخ: گزینه۴

مسئله از ما نسبت محیط مثبت (مجموع طول اضلاع) بر طول ضلع b را خواسته، بنابراین باید طول اضلاع را برحسب b به دست آوریم و با هم جمع کنیم. آن وقت مشخص می شود که محیط چند برابر b است:

$$\frac{a}{۲b-a}=-۳ \Rightarrow a=-۶b+۳a \Rightarrow ۲a=۶b \Rightarrow a=۳b$$

$$\frac{۲b-c}{۲b+c}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۶b-۳c=۲b+c \Rightarrow ۴b=۴c \Rightarrow c=b$$

$$\frac{\text{محیط مثلث}}{\text{طول ضلع } b}=\frac{a+b+c}{b}=\frac{۳b+b+b}{b}=\frac{۵b}{b}=۵$$

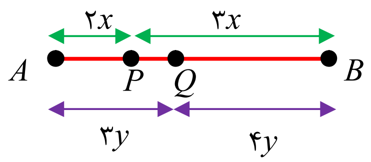
۸ـ پاسخ: گزینه۱

اگر در صورت و مخرج کسرهای یک تناسب به طور همزمان ترکیب و تفاضل انجام دهیم، داریم:

$$\frac{x}{y}=\frac{z}{t} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{z+t}{t-z} & \text{(ترکیب در صورت و تفضیل در مخرج)} \\ \dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{z-t}{z+t} & \text{(تفضیل در صورت و ترکیب در مخرج)} \end{cases}$$

۹ـ پاسخ: گزینه۳

کافی است به فرض مسئله که نقاط P و Q در یک طرف وسط AB هستند توجه کنید و از نسبت های داده شده استفاده کنید. چون $\frac{AP}{PB}=\frac{۲}{۳}$ پس $PB=۳x, AP=۲x$ است. همچنین چون $\frac{AQ}{QB}=\frac{۳}{۴}$ است پس $QB=۴y, AQ=۳y$ است بنابراین:



$$\left.\begin{aligned} AP&=\frac{۲}{۵}AB \\ AQ&=\frac{۳}{۷}AB \end{aligned}\right\} \Rightarrow PQ=AQ-AP=\frac{۳}{۷}AB-\frac{۲}{۵}AB=\frac{AB}{۳۵}$$

$$\Rightarrow PQ=\frac{AB}{۳۵} \xrightarrow{PQ=۲} ۲=\frac{AB}{۳۵} \Rightarrow AB=۷۰$$

۱۰ـ پاسخ: گزینه۳

با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\frac{۳}{a}=\frac{۲}{b}+\frac{۱}{c} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{۳}{a}=\frac{۲c+b}{bc} \xrightarrow{\times(a)\ \text{طرفین تساوی}} ۳=\frac{۲ac+ab}{bc} \xrightarrow{\text{تفکیک کسرها}}$$

$$۳=\frac{۲a}{b}+\frac{a}{c} \xrightarrow{\text{جداسازی کسر مطلوب}} \frac{a}{c}=۳-\frac{۲a}{b} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{a}{c}=\frac{۳b-۲a}{b}$$

۱۱ـ پاسخ: گزینه۲

با استفاده از ویژگی های تناسب داریم:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\lambda \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}=\lambda^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{d^2}{c^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2+d^2}{a^2+c^2}=\frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{b^2+d^2}{a^2+c^2}}=\frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{3\sqrt{b^2+d^2}}{\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{3}{\lambda}$$

۱۲ـ پاسخ: گزینه۴

هر کدام از نسبت ها را جداگانه نوشته با طرفین وسطین، اضلاع c , a را برحسب b به دست می آوریم و....

$$\frac{a}{2b-a}=-3 \Rightarrow a=-6b+3a \Rightarrow 2a=6b \Rightarrow a=3b \ \ (\mathrm{I})$$

$$\frac{2b-c}{2b+c}=\frac{1}{3} \Rightarrow 6b-3c=2b+c \Rightarrow 4b=4c \Rightarrow c=b \ \ (II)$$

$$\frac{\text{محیط مثلث}}{\text{ضلع } b}=\frac{P}{b}=\frac{a+b+c}{b}\xrightarrow{(I),(II)}\frac{3b+b+b}{b}=\frac{5b}{b}=5$$

۱۳ـ پاسخ: گزینه۳

از درس دنباله می دانیم که برای هر n طبیعی داریم: $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

با استفاده از ویژگی پنجم تناسب داریم:

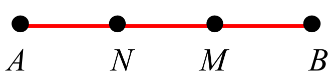
$$\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{2}=\ldots=\frac{a_n}{n} \Rightarrow \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{1+2+3+\ldots+n}=\frac{a_1}{1} \Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_n=(1+2+3+\ldots+\mathrm{n})\mathrm{a}_1$$

$$\Rightarrow a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n(n+1)}{2}a_1$$

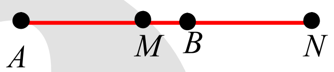
۱۴ـ پاسخ: گزینه۴

به وضوح $AN=MB=\frac{a}{3}$ پس داریم:

$$MN=a-(AN+MB)=a-\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{3}\right)=a-\frac{2a}{3}=\frac{a}{3}$$



۱۵ـ پاسخ: گزینه۳



چون $k>1$ پس N به B نزدیکتر است.

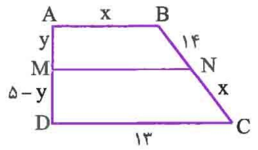
با توجه به فرض مسئله و ویژگی های تناسب داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{MA}{MB}=k=\dfrac{k}{1} \Rightarrow \dfrac{MA}{MA+MB}=\dfrac{k}{k+1} \Rightarrow \dfrac{MA}{AB}=\dfrac{k}{k+1}\\[2ex] \dfrac{NA}{NB}=k=\dfrac{k}{1} \Rightarrow \dfrac{NA}{NA-NB}=\dfrac{k}{k-1} \Rightarrow \dfrac{NA}{AB}=\dfrac{k}{k-1}\end{cases} \Rightarrow \frac{MA}{NA}=\frac{k-1}{k+1}$$

۱۶ـ ☜ پاسخ: گزینه ۴ ـ می دانیم مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی ۳۶۰° است بنابراین:

$$\hat{A}+۹۰^\circ+۹۰^\circ+۷۵^\circ=۳۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}=۱۰۵^\circ \Rightarrow \frac{\hat{C}}{\hat{A}}=\frac{۷۵}{۱۰۵}=\frac{۵}{۷}$$

۱۷ـ ☜ پاسخ: گزینه ۴ـ



$$x+۱۴+y+MN=MN+x+۱۳+۵-y \Rightarrow ۲y=۴$$

$$\Rightarrow y=۲ \Rightarrow \frac{AM}{MD}=\frac{y}{۵-y}=\frac{۲}{۳}$$

۱۸ـ ☜ پاسخ: گزینه ۱ ـ فرض کنیم $x=۲k$ و $y=۵k$ در نتیجه: $\frac{۳x-y}{۲y-x}=\frac{۶k-۵k}{۱۰k-۲k}=\frac{۱}{۸}$

۱۹ـ ☜ پاسخ: گزینه ۴ـ

$$\frac{x}{۳}=y=z+۱=k \Rightarrow x=۳k, y=k, z=k-۱$$

حال به جای x, y و z در رابطه $x+۳y+z=۲۰$ مقادیرشان را جایگذاری می کنیم:

$$(۳k)+۳(k)+(k-۱)=۲۰ \Rightarrow ۷k=۲۱ \Rightarrow k=۳ \Rightarrow z=k-۱=۲$$

۲۰ـ ☜ پاسخ: گزینه ۲ـ اگر زاویه های چهارضلعی $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ و $\hat{D}$ باشند داریم:

$$\frac{A}{۳}=\frac{B}{۳}=\frac{C}{۵}=\frac{D}{۵}=k \Rightarrow A=۳k, B=۳k, C=۴k, =۵k$$

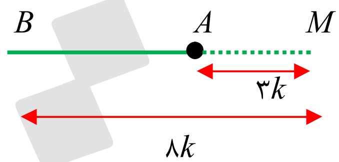
$$\Rightarrow ۳k+۳k+۴k+۵k=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۵k=۳۶۰^\circ \Rightarrow k=۲۴^\circ \Rightarrow \hat{D}-\hat{C}=۵k-۴k=k=۲۴^\circ$$

۲۱ـ ☜ پاسخ: گزینه ۴ـ با فرض $x=۳$ و $y=۴$ داریم: $\frac{xy}{x^۲+y^۲}=\frac{۳\times۴}{۹+۱۶}=\frac{۱۲}{۲۵}$

۲۲ـ ☜ پاسخ: گزینه ۳ـ

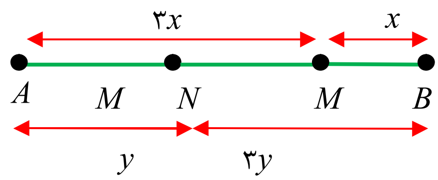
$$\frac{x-۳}{x}=\frac{y-۴}{y} \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل در}} \frac{۳}{x}=\frac{۴}{y} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{۴}{۳} \xrightarrow{\text{فرض}} \begin{cases} y=۴ \\ x=۳ \end{cases} \Rightarrow \frac{۲x-y}{x+y}=\frac{۶-۴}{۳+۴}=\frac{۲}{۷}$$

۲۳ـ ☜ پاسخ: گزینه ۲ـ



$$AB=۱۵ \Rightarrow ۸k-۳k=۱۵ \Rightarrow ۵k=۱۵$$
$$\Rightarrow k=۳ \Rightarrow MB=۸k=۲۴$$

۲۴ـ ☜ پاسخ: گزینه ۲ـ



$$\begin{cases} ۳x+x=۱۲ \Rightarrow x=۳ \\ ۳y+y=۱۲ \Rightarrow y=۳ \end{cases} \Rightarrow MN=AB-x-y=۱۲-۳-۳=۶$$

۲۵ـ ☜ پاسخ: گزینه ۳ ـ $۱۲^۲=a\times۸ \Rightarrow ۱۴۴=۸a \Rightarrow a=\frac{۱۴۴}{۸}=۱۸$

۲۶ـ ☜ پاسخ: گزینه ۱ـ چون $\frac{a}{b}=\frac{4}{9}$ است فرض می کنیم $a=4k$ و $b=9k$ حال سوال گفته ۱۲ واسطه هندسی بین a و b است بنابراین:

$$12^2=a\times b\Rightarrow 144=(4k)(9k)\Rightarrow k^2=4\Rightarrow k=2\Rightarrow\begin{cases}a=8\\ b=18\end{cases}\Rightarrow b-a=10$$

۲۷ـ ☜ پاسخ: گزینه ۴ـ

$$\begin{cases}S_{ACE}=3S_{ADE}\Rightarrow CE=3DE\\ S_{ACE}=2S_{ABD}\Rightarrow CE=2BD\end{cases}\xrightarrow{CE=k}$$

$$\begin{cases}DE=\dfrac{k}{3}\\ BD=\dfrac{k}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{BE}{CE}+\frac{DE}{DC}=\frac{\frac{k}{2}+\frac{k}{3}}{k}+\frac{\frac{k}{3}}{\frac{k}{3}+k}=\frac{5}{6}+\frac{1}{4}=\frac{10+3}{12}=\frac{13}{12}$$