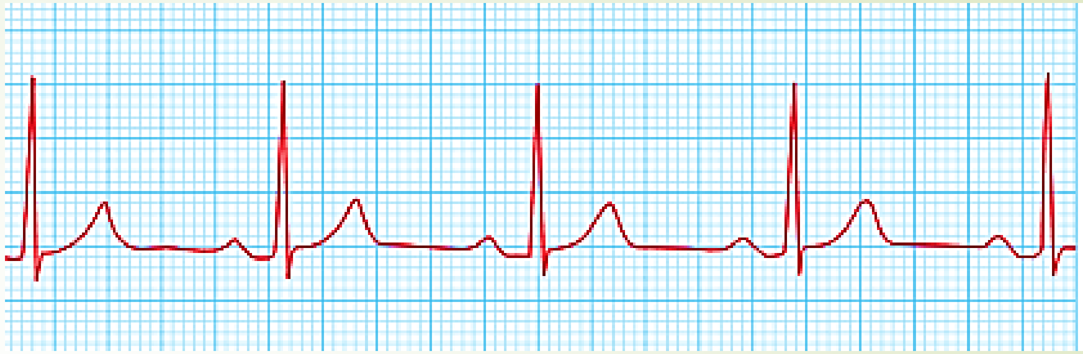
فیزیک پایه دوازدهم

حرکت نوسانی

ابوالقاسم کریمی

شهریور ۹۷ ---- ویرایش جدید

استفاده بلامانع فقط در جلسات ذکر صلوات فراموش نشود




(ب)


(پ)

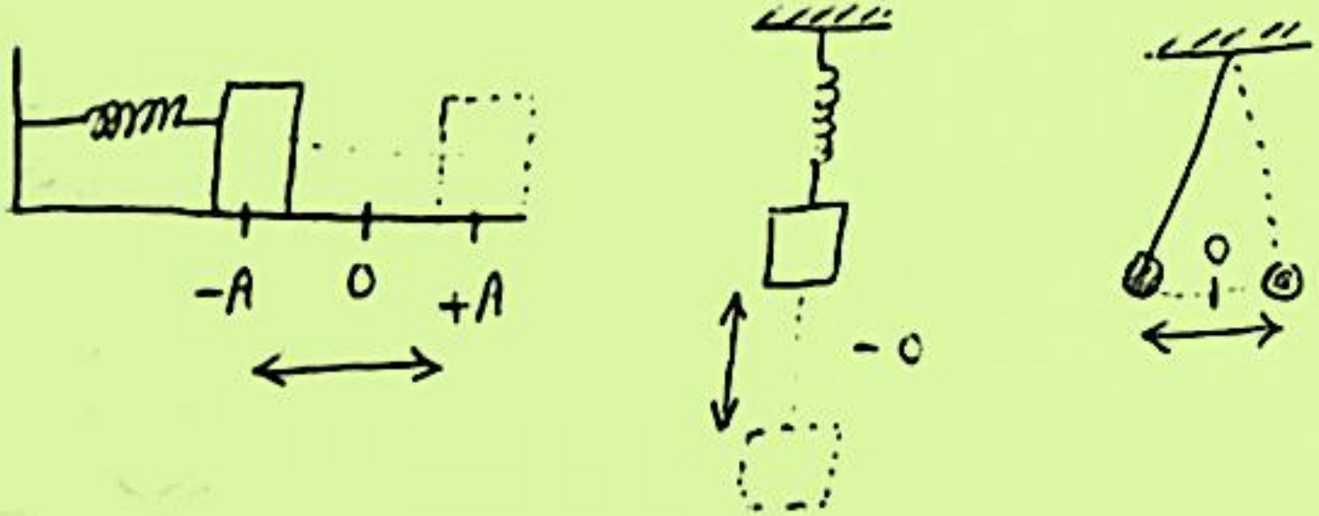

(ت)

حرکت تناوبی :

هر حرکت نوسانی که حرکت آن در بازه‌های زمانی مساوی عیناً تکرار می‌شود. مثل: شب و روز، چرخش ماه د

حرکت نوسانی ساده :

حرکت تناوبی حول یک نقطه روی یک پاره‌خط مستقیم را می‌گویند. (حرکت به صورت رفت و برگشتی است)



حرکت های تناوبی

هر حرکتی که در بازه‌های زمانی مساوی تکرار شود حرکت تناوبی است.

جابجایی هر ذره در حرکت تناوبی را همیشه می‌توان بر حسب توابع سینوسی یاکسینوسی بیان کرد.

اگر ذره‌ای که حرکت تناوبی دارد روی یک مسیر واحد پس و پیش برود، حرکت آن را نوسانی یا ارتعاشی می‌نامند.

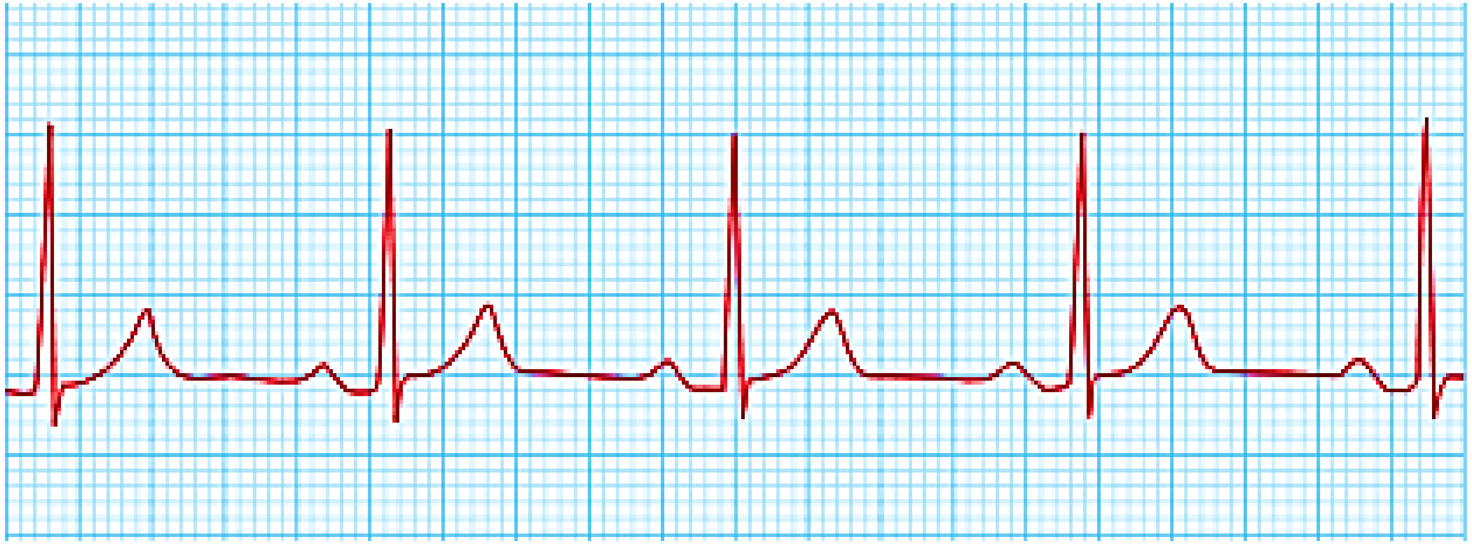
جهان پر از حرکتهای نوسانی است که از آن جمله می‌توان به نوسانهای رقاصک ساعت ، سیم ویولن ، جرم متصل به فنر و ...اشاره کرد.

انواع نوسان ها

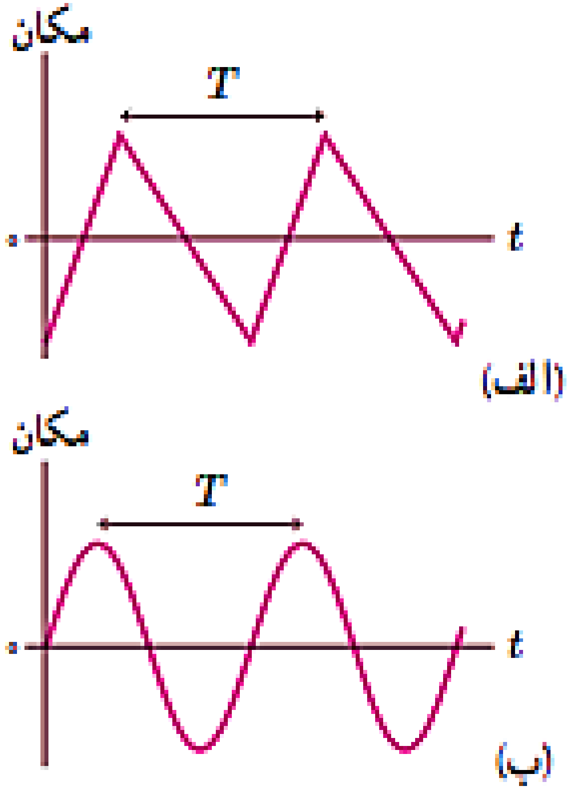
دوره ای : نوسان هایی که هر چرخه آن در دوره های دیگر تکرار شود. مثل : آونگ - وزنه و فنر - تاب - شب و روز - گردش ماه به دور زمین و ....

غیر دوره ای : نوسان هایی که در دوره ی دیگر تکرار نمی شود. مثل : زلزله - موج دریا و...

نوسان‌ها می‌توانند دوره‌ای یا غیردوره‌ای باشند؛ مثلاً شکل ۳ـ۲ تصویری از ضرباهنگِ (ریتمِ) قلب یک شخص را نشان می‌دهد که در هر دقیقه ۶۵ بار می‌زند. نقش‌های این تصویر به‌طور منظم تکرار می‌شوند، که به آن چرخهٔ (سیکل) نوسان گفته می‌شود. چنین نوسان‌هایی را که هر چرخهٔ آن در دورهای دیگر تکرار شود نوسان‌های دوره‌ای می‌نامند. مدت زمان یک چرخه، دورهٔ تناوب حرکت نامیده می‌شود و آن را با T نشان می‌دهند. بنابه این تعریف، دورهٔ تناوب ضربان قلب این شخص $\frac{۱}{۶۵}$ دقیقه، یا ۰/۹۲ ثانیه است.



شکل ۳ـ۲ نمونه‌ای از نمودار الکتروقلب نگاره[1] (نوار قلب) یک شخص[2]



شکل ۳ـ۳ نمودار مکان ـ زمان برای دو نمونه از نوسان دوره‌ای

به نوسان‌های سینوسی، حرکت هماهنگ ساده (SHM)[2] گفته می‌شود

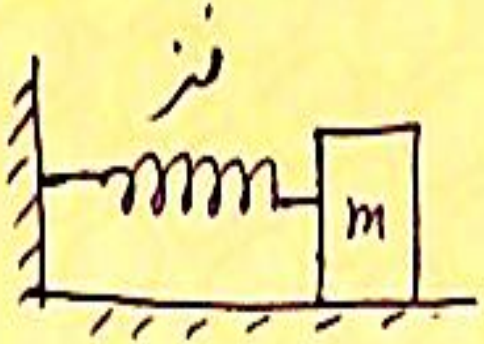
حرکت نوسانی ساده(هماهنگ ساده):

هر حرکت رفت و برگشت بر روی یک پاره‌خط حول نقطـــه‌ای در وســـط پـــاره‌خط (مرکـــز نوسان) را که در بازه های زمانی عیناً تکرار می شود را می گویند.

مثل نوسان آونگ ساده با دامنه کم و یا سیستم وزنه و فنر

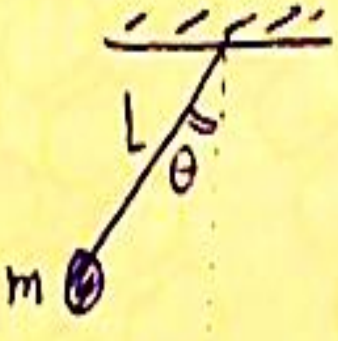
بعد حرکت یا مکان نوسانگر:

فاصله نوسانگر یا متحرک در هر لحظه تا مرکز نوسان **بعد حرکت یا مکان نوسانگر** نام دارد.



سیستم وزنه - فنر: شامل فنر و یک جسم به جرم m که به آن متصل است.

آونگ ساده: شامل یک نخ به همراه یک گلوله متصل به آن است که زاویه انحراف ناچیزی دارد.

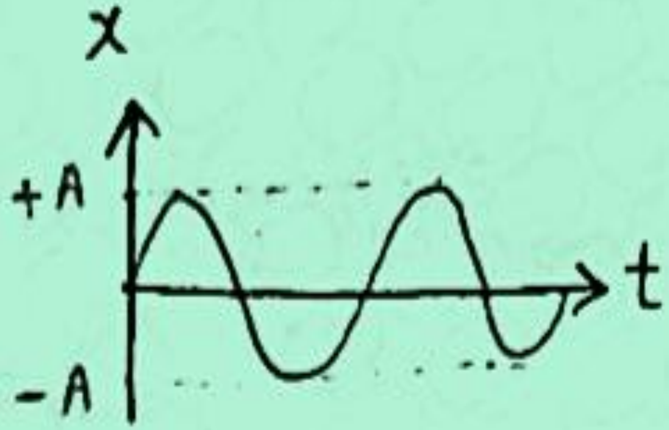


$\theta < 6^\circ$

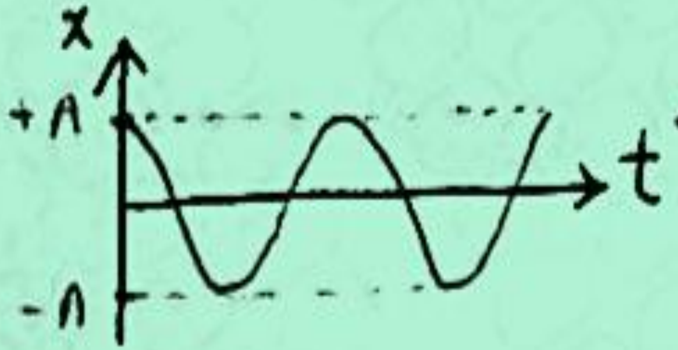
زاویه انحراف خیلی کوچک است.

نکته : به حرکت نوسانی ساده، حرکت هماهنگ ساده هم می‌گویند.

نکته : نمودار حرکت نوسانی ساده، به شکل سینوسی یا کسینوسی است.



شکل سینوسی

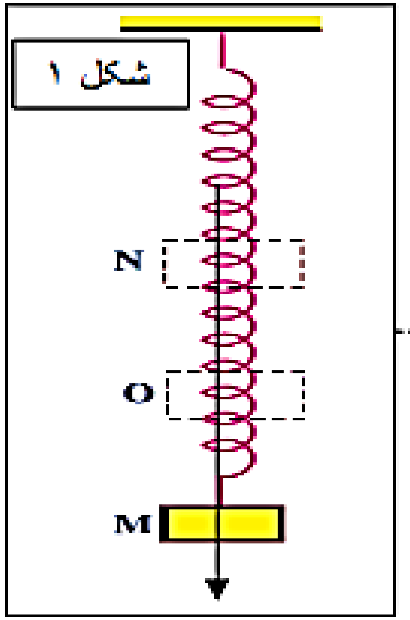


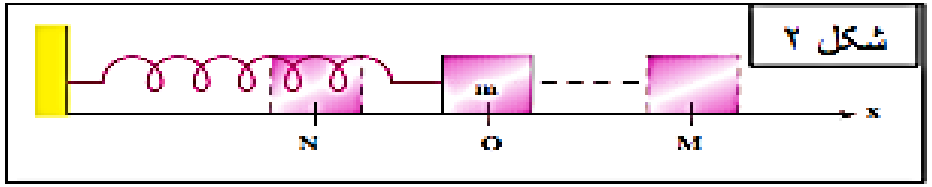
شکل کسینوسی

۱- **تعریف حرکت های دوره ای** : به حرکتهایی گفته می شود که بعد از مدتی عینا تکرار می شوند . مانند حرکت ماه به دور زمین ، حرکت یک آونگ ، وزنه ای متصل به فنر ، ضربان قلب انسان ، ارتعاش سیم های سازهای سیمی مانند تار و سه تار و ....

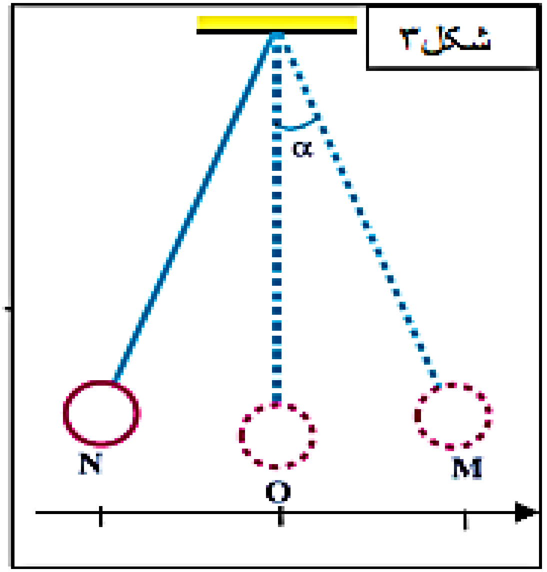
۲- **حرکت نوسانی هماهنگ ساده** : به حرکتی دوره ایی گفته می شود که متحرک روی پاره خطی با طول ثابت حول نقطه وسط آن انجام می دهد.

نکته : به متحرکی که دارای حرکت هماهنگ ساده است نوسانگر ساده گفته می شود.





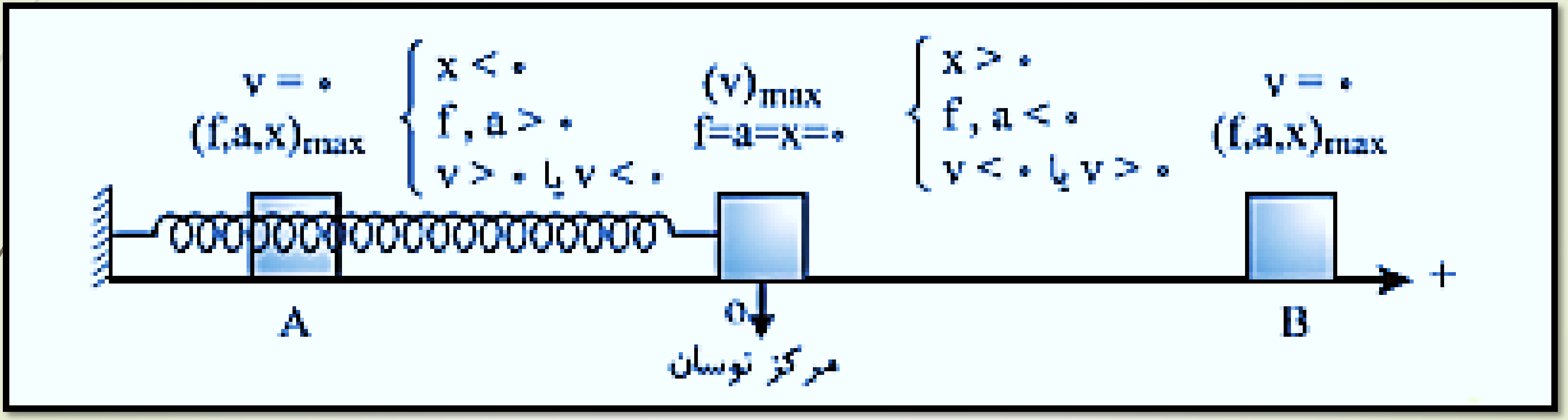
حرکت نوسانی وزنه – فنر روی یک سطح افقی بدون اصطکاک روی پاره خط NM و حول نقطه O در وسط پاره خط ، یک حرکت هماهنگ ساده است. برای بررسی این حرکت محور x را منطبق بر پاره خط NM طوری انتخاب می کنیم که مبدا آن نقطه O باشد.



حرکت وزنه آویزان از یک فنر در راستای قائم با صرف نظر از مقاومت هوا نیز یک حرکت هماهنگ ساده است. در این حرکت محور y را روی پاره خط NM طوری انتخاب می کنیم که وسط پاره خط مبدا باشد.

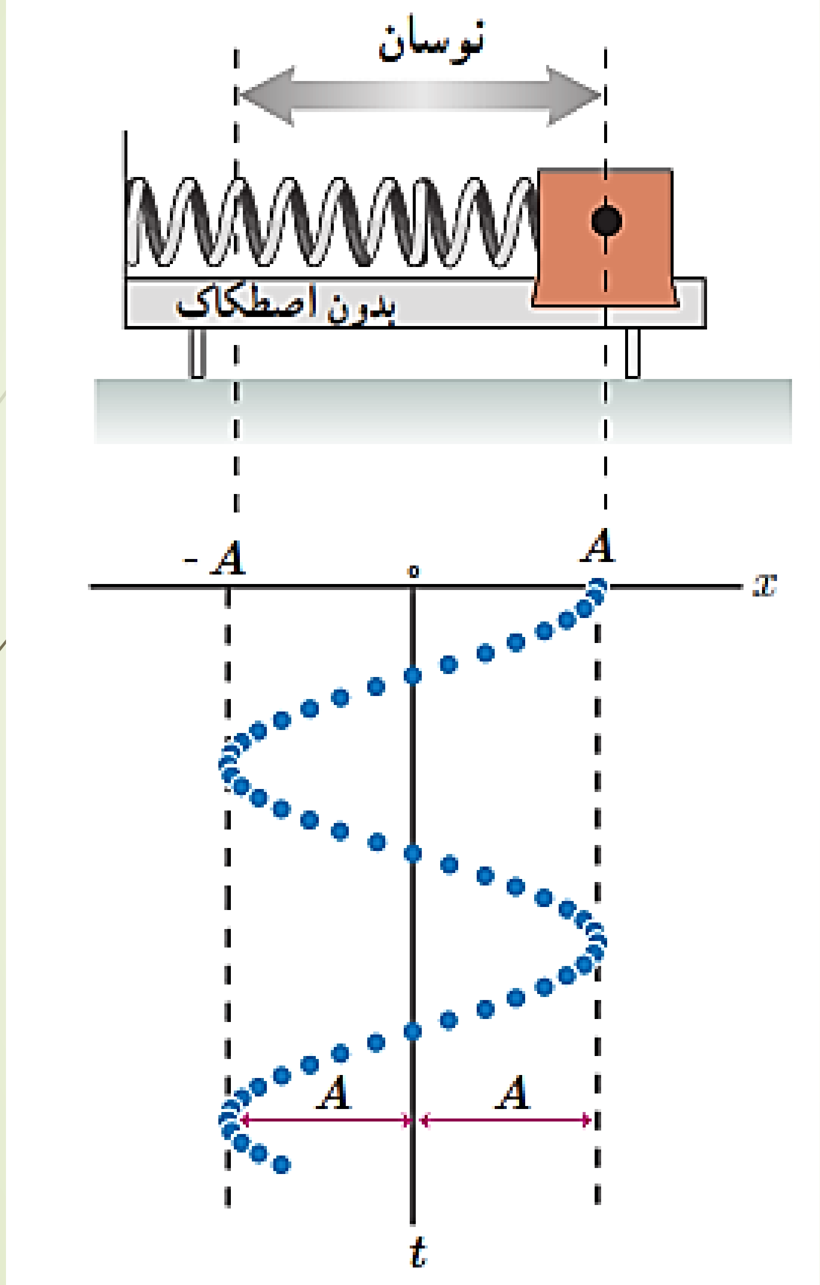
حرکت یک آونگ ساده با زاویه انحراف کوچکتر از ۶ درجه از وضع تعادل خود ، در صورتی که از جرم نخ و مقاومت هوا چشم پوشی شود، یک حرکت هماهنگ ساده است. در این حرکت نیز محور x را روی پاره خط NM طوری انتخاب می کنیم که وسط پاره خط مبدا باشد.

❖ **حرکت نوسانی:** حرکتی است که یک متحرک رو یک پاره خط (AB) حول وسط آن (نقطهٔ O) چنان انجام می دهد که همواره شتابی متناسب با فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان و به طرف مرکز نوسان داشته باشد.



دامنه نوسان (A) :

بیش‌ترین فاصله نوسانگر تا مرکز نوسان یـــا بیشترین بعد نوسان را گویند. (دامنه برابر با شعاع دایره نوسان می‌باشد.) به بیان دیگـــر دامنه نصف پاره‌خط نوسان می‌باشد.



تعریف دامنه نوسان : بیشترین جابه جایی نوسانگر از وضع تعادل خود را دامنه ی نوسان می نامیم. آن را با نماد A نشان داده و یکای آن متر است.

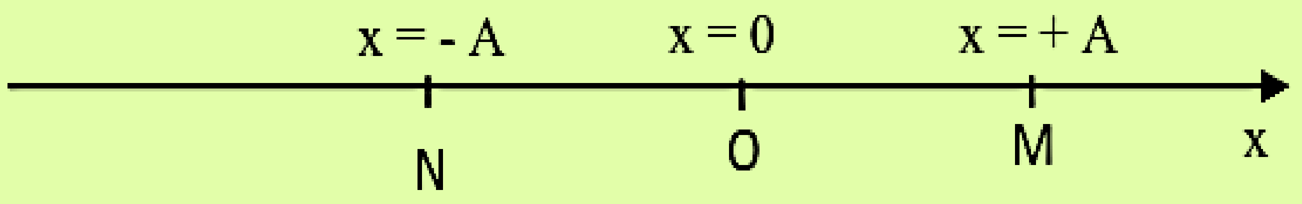
نکته : اگر طول پاره خط نوسان (NM) داده شده باشد ، دامنه نصف آن است. یعنی ($A = \frac{MN}{2}$)

تغییرات مکان : همچنانکه در شکل های بالا ملاحظه می شود ، محور x یا y روی پاره خط نوسان به گونه ای انتخاب می شود که وسط آن مبدا محور باشد ، در این صورت مکان های بین OM با x های مثبت و مکان های بین ON با X های منفی بیان می شوند. در نتیجه می توان نوشت:

$$-A \leq x \leq +A$$

$$|ON| = |OM| = A = \frac{|MN|}{2}$$

$$x_{max} = A$$



نکته : اگر نوسانگر وزنه – فنر در راستای قائم باشد، به جای x از y استفاده می کنیم.

دوره (T) :

مدت زمانی است که نوسانگر یک حرکت رفت و برگشت کامل را انجام می‌دهد یعنـــی دو بـــار پاره‌خط نوسان را طی می‌کند. (مدت زمان یک دور کامل در دایره نوسان فرضی)

تعداد نوسان‌های انجام شده (تعداد چرخه) در هر ثانیه بسامد (فرکانس) نامیده می‌شود و آن را با f نشان می‌دهند. بنابراین :

(۳ـ۱) (بسامد) $$f = \frac{1}{T}$$

یکای بسامد در SI، هرتز (Hz) است که به افتخار فیزیک‌دان آلمانی، هاینریش هرتز، نام‌گذاری شده است. طبق تعریف :

۱ Hz = ۱ چرخه بر ثانیه = $1\,s^{-1}$

نکته : هرگاه نوسانگری در مدت t ثانیه تعداد n نوسان کامل انجام دهد، دوره و بسامد آن از رابطه های زیر به دست می آیند.

$$T = \frac{t}{n} \quad , \quad f = \frac{n}{t}$$

حرکت هماهنگ ساده حرکتی شتابدار با **شتاب متغیر** است

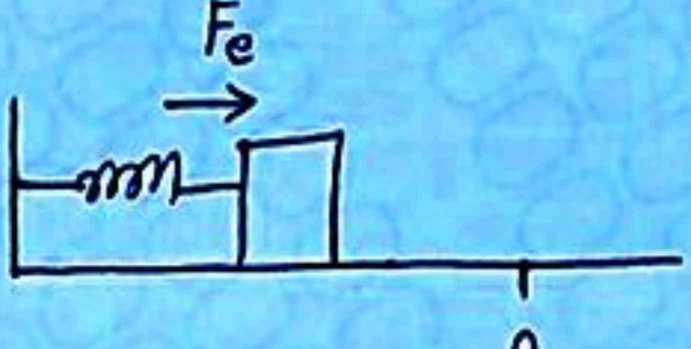
اندازه شتاب نیز متناسب با فاصله متحرک تامرکز نوسان می‌باشد.

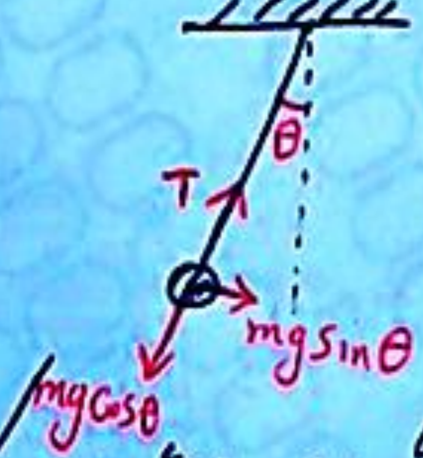
پرسش ۳ــ۱

بسامد ضربان قلب مربوط به نمودار شکل ۳ــ۲ چقدر است؟

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.92} = 1.08\ HZ$$

نیروی بازگرداننده : نیرویی که نوسانگر را به مرکز نوسان برمی‌گرداند .



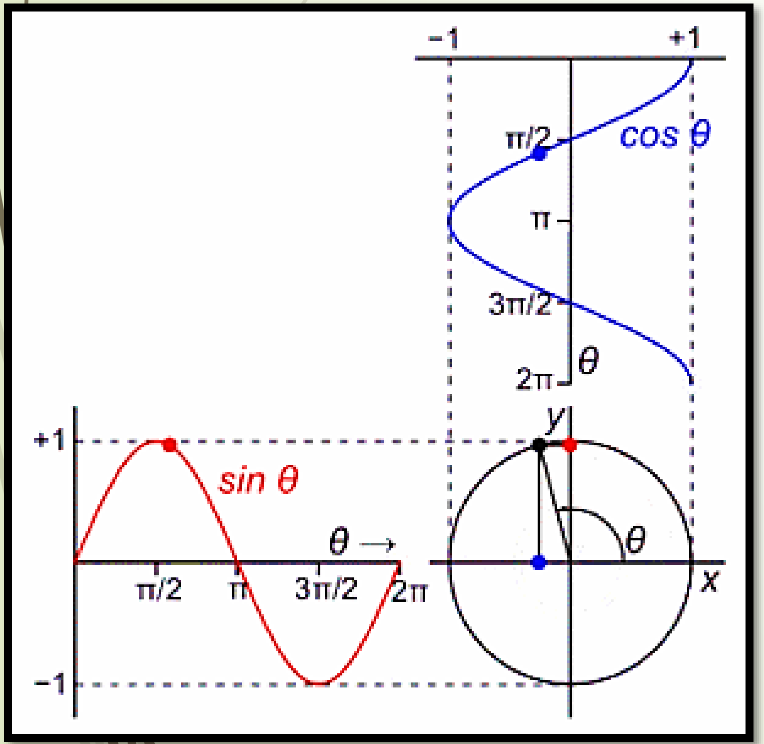


نکته : در سیستم وزنه - فنر نیروی کشسانی فنر در حکم نیروی بازگرداننده است ولی در آونگ مؤلفه وزن ($mg\sin\theta$) نیروی بازگرداننده را تأمین می‌کند.

نکته : همواره جهت نیروی بازگرداننده به سمت مرکز نوسان است .

معادله‌ی حرکت نوسانی ساده:

اگر متحرکی را فرض کنیم که روی محیط یک دایره به نام دایره مرجع با سرعت زاویه‌ای ثابت در حال چرخیدن باشد، تصویر آن روی محور xها حرکت نوسانی ساده خواهد بود. پس می‌توان نوشت:



$$\cos\theta = \frac{x}{R} \rightarrow x = R\ \cos\theta \xrightarrow{\theta=\omega t\ ,R=A}$$

$$x = A\ \cos\omega t$$

بعد

دامنه

سرعت زاویه ای

معادله حرکت نوسانی ساده :

دامنه نوسان (m)

زمان (s)

مکان جسم نوسانگر
(تابعی از زمان) برحسب متر m

$$x_{(t)} = A\cos(\omega t)$$

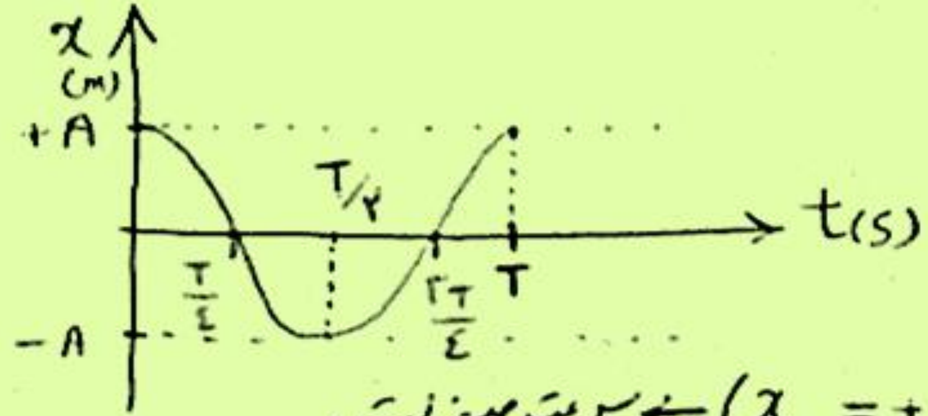
بسامد زاویه‌ای
rad/s

فاز حرکت نوسانی $\theta = \omega t$
(شناسه تابع)

رادیان rad

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ یا $\omega = 2\pi f$

نمودار مکان - زمان حرکت نوسانی :



$$x_{(t)} = A\cos(\omega t)$$

در لحظه $t=0$ ⟸ متحرک نوسانگر در $(+A)$ قرار دارد. $(x_{max}=+A)$ ← سرعت صفر است.

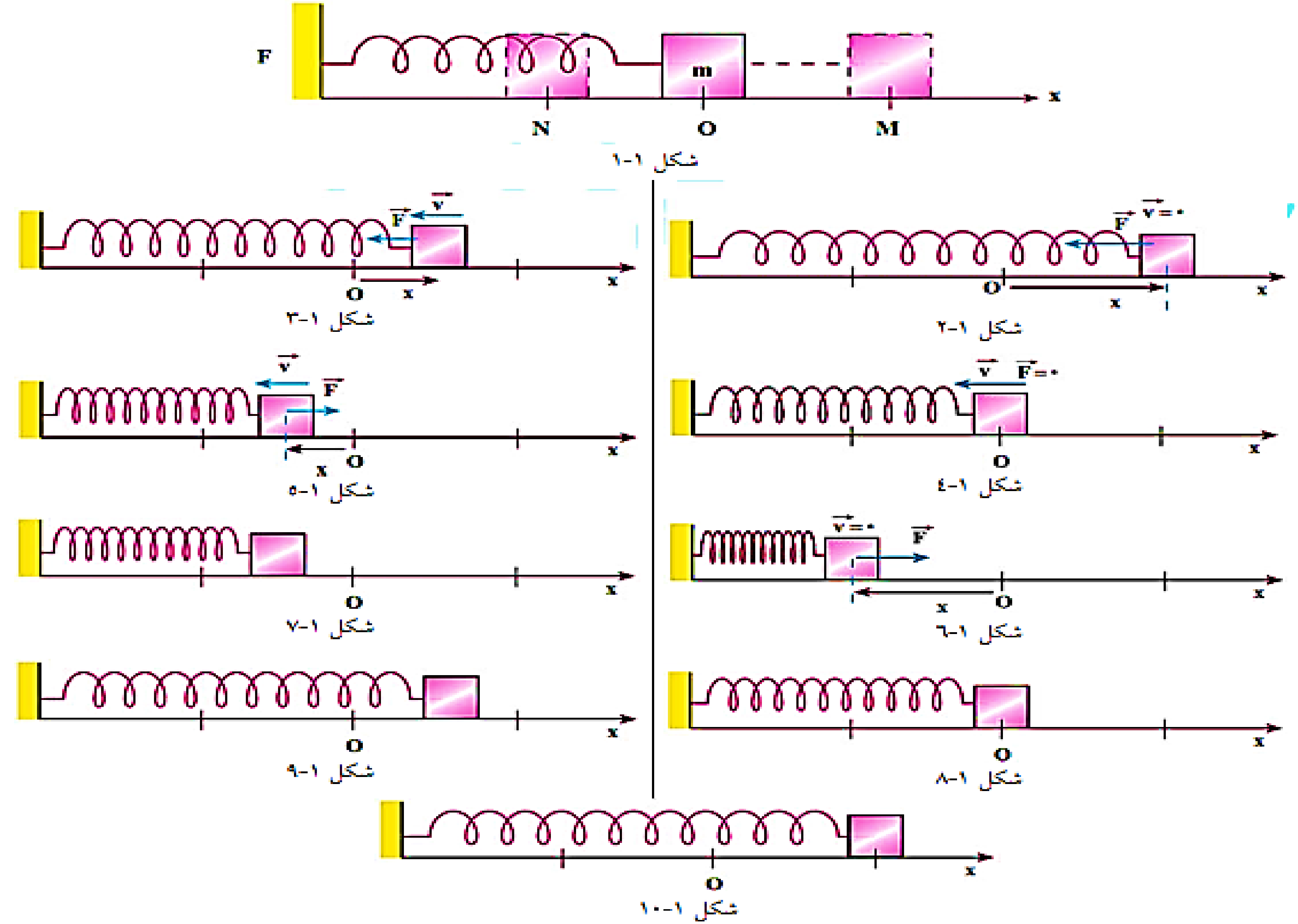
در لحظه $t=T/4$ ⟸ نوسانگر از مبدا می‌گذرد. ← در این جا سرعت حرکت آن بیشترین مقدار است: (V_{max})

در لحظه $t=T/2$ ⟸ نوسانگر در بیشترین فاصله از مرکز نوسان است $(x_{max}=-A)$ ← سرعت نوسانگر صفر است

در لحظه $t=3T/4$ ⟸ نوسانگر مجدداً از مرکز نوسان گذشته و سرعت آن بیشترین مقدار خلاف قبل است.

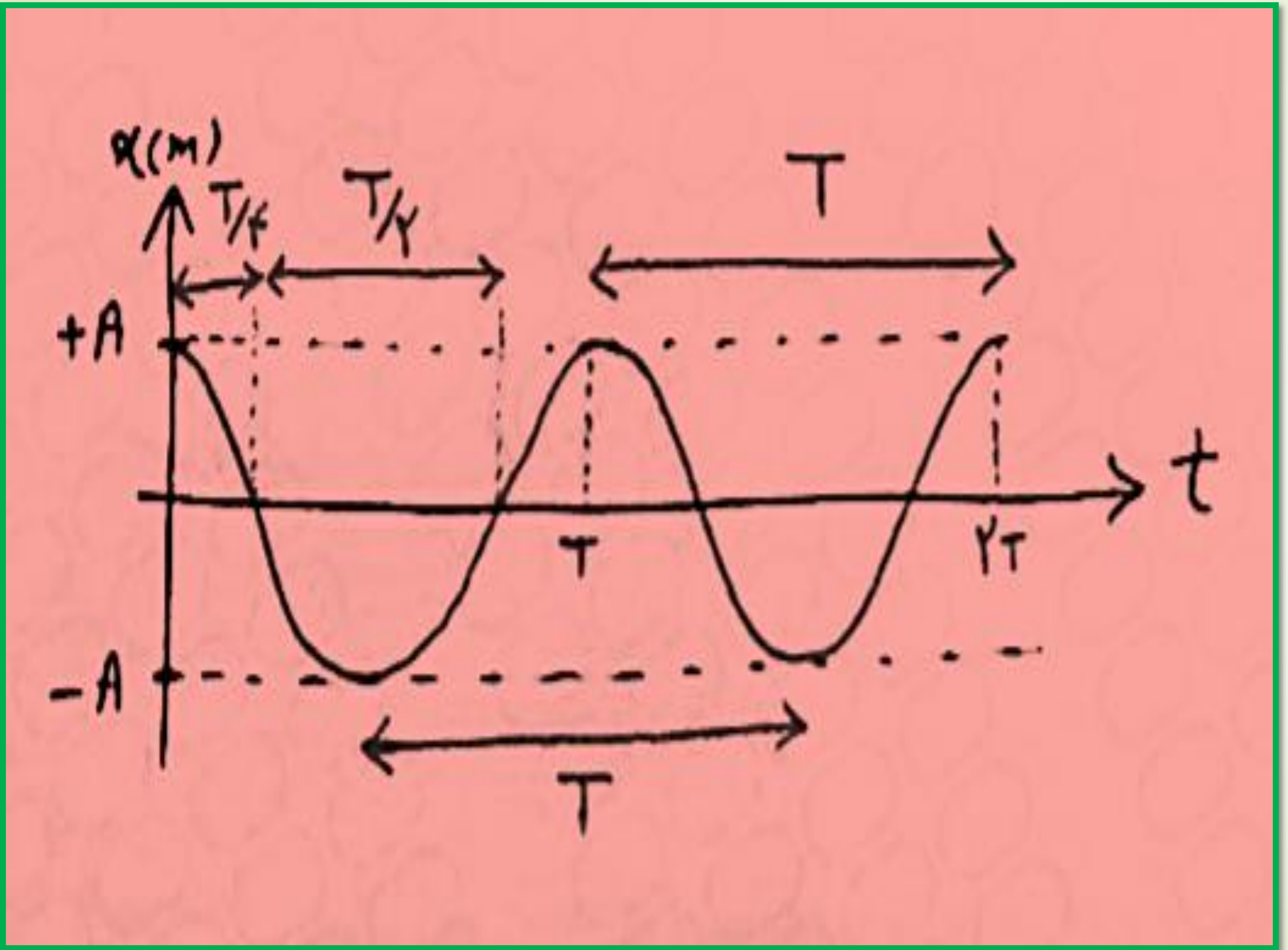
در لحظه $t=T$ ⟸ نوسانگر مجدداً به نقطه اولیه حرکت برگشته است و سرعت آن صفر است.

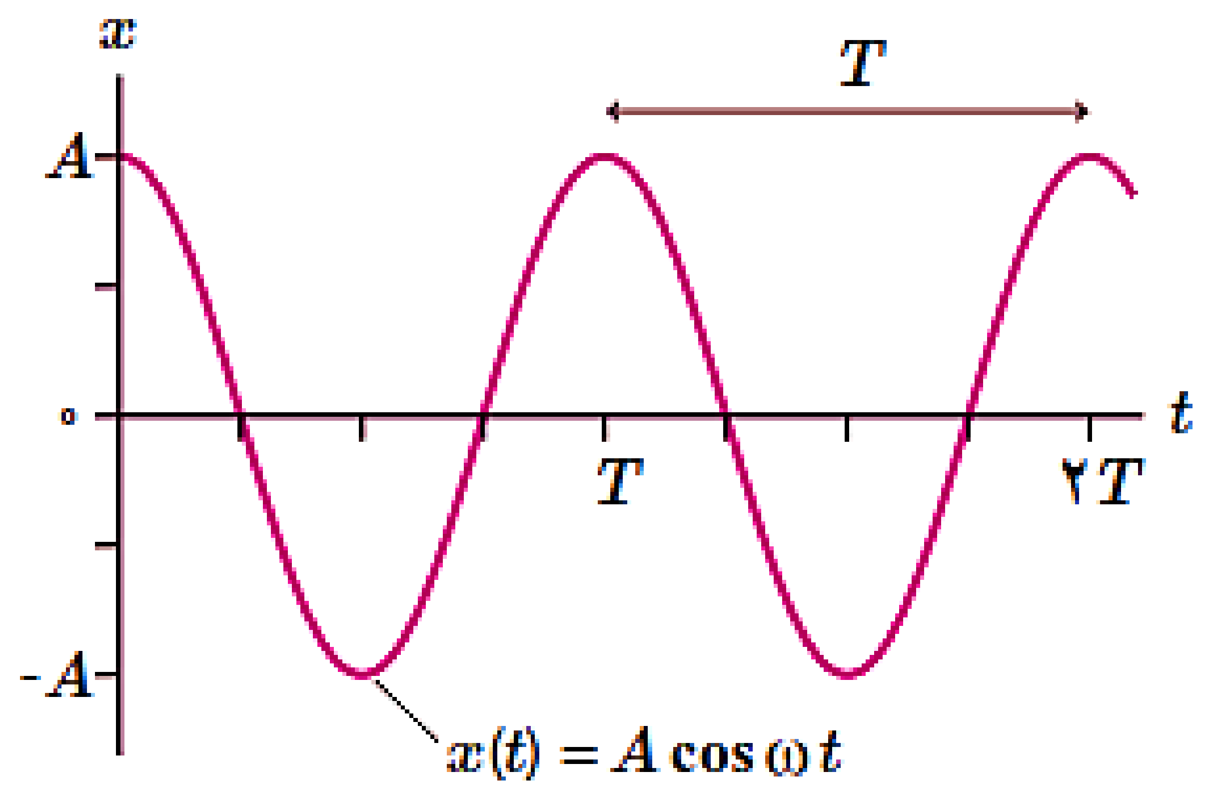
$$\begin{cases} x=\pm A \longrightarrow V=0 \quad \text{و} \quad F_{\text{بازگرداننده}} = \text{بیشترین مقدار} \quad \text{و} \quad a = \text{بیشترین مقدار} \\ x=0 \longrightarrow V_{max} \quad \text{و} \quad F_{\text{بازگرداننده}} = 0 \qquad a=0 \end{cases}$$


F
m
N
O
M
x
شكل ١-١
شكل ١-٢
شكل ١-٣
شكل ١-٤
شكل ١-٥
شكل ١-٦
شكل ١-٧
شكل ١-٨
شكل ١-٩
شكل ١-١٠

$$F = -kx$$

نمودار حرکت نوسانی برای دو دوره تناوب





وقتی نوسانگر در $x = \pm A$ است، سرعت آن برابر با صفر است. به این نقطه‌ها اصطلاحاً *نقطه‌های بازگشتِ*[۳] حرکت می‌گویند. همچنین وقتی $x = ۰$ است (یعنی نوسانگر از نقطهٔ تعادل می‌گذرد) اندازهٔ سرعت بیشینه است، یعنی بسته به اینکه جسم در جهت $+x$ یا $-x$ از نقطهٔ تعادل بگذرد، $v = +v_{max}$ یا $v = -v_{max}$ خواهد بود

رابطه فاز حرکت با دوره تناوب :

θ	۲π	π	۲π/۳	π/۲	π/۳	...
t	T	T/۲	T/۳	T/۴	T/۶	...

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = ۲\pi f$$

$$\begin{cases} \Delta\theta = \omega t & \text{تغییر فاز} \\ \theta = \omega t & \text{فاز نوسان} \end{cases}$$

$$\cos\theta = \frac{y}{R}$$

فاز نوسان

استفاده از تبدیلات زمانی و فازی زیر بسیار مهم است:

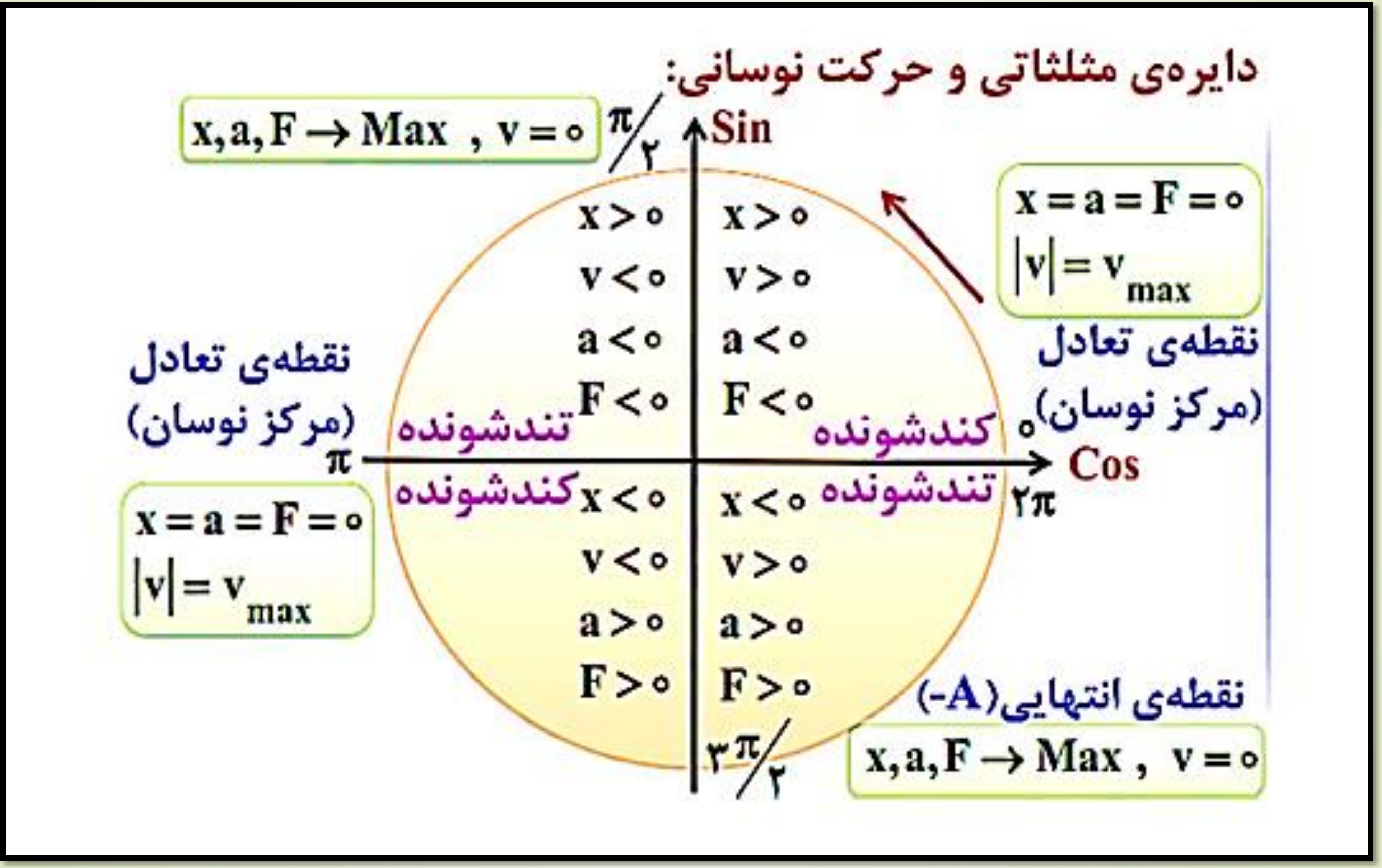
$$\frac{T}{۲} \equiv \pi \qquad \frac{T}{۳} \equiv \frac{۲\pi}{۳} \qquad \frac{T}{۴} \equiv \frac{\pi}{۲} \qquad \frac{T}{۶} \equiv \frac{\pi}{۳} \qquad \frac{T}{۸} \equiv \frac{\pi}{۴}$$

مطالعه آزاد

مهـــــم! چند تبدیل مثلثاتی

$$\sin \underset{+\frac{\pi}{۲}}{\overset{-\frac{\pi}{۲}}{\rightleftarrows}} \cos \underset{+\frac{\pi}{۲}}{\overset{-\frac{\pi}{۲}}{\rightleftarrows}} -\sin$$

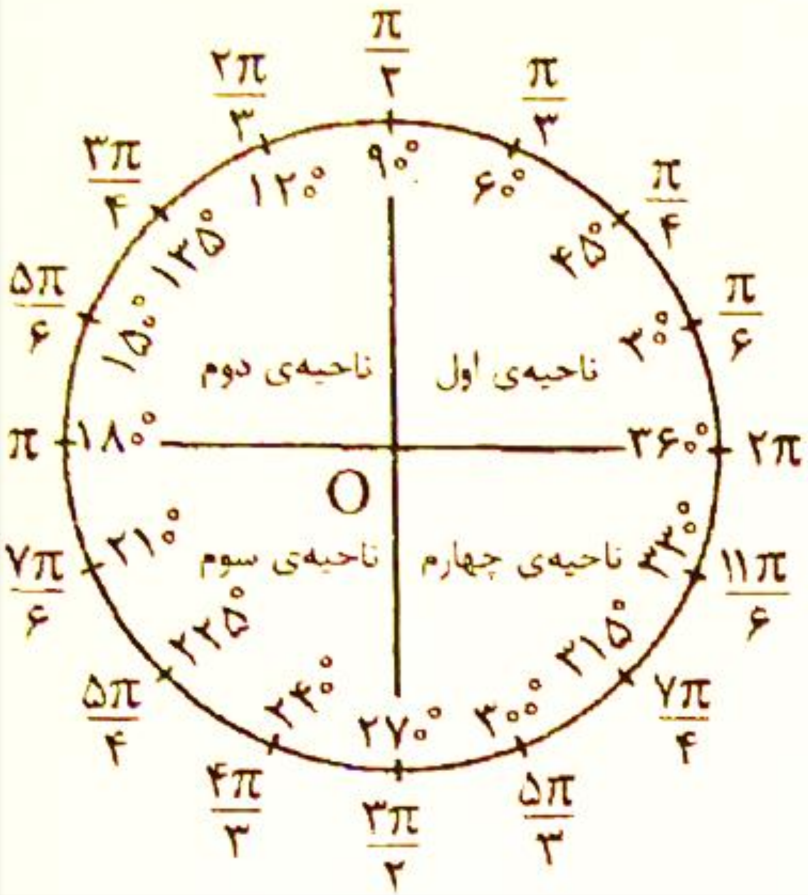
مطالعه آزاد



دایره‌ی مثلثاتی و حرکت نوسانی:
x,a,F → Max , v = ۰
π/۲
Sin
x = a = F = ۰
|v| = v max
نقطه‌ی تعادل
(مرکز نوسان)
x > ۰
v < ۰
a < ۰
F < ۰
x > ۰
v > ۰
a < ۰
F < ۰
تندشونده
کندشونده
۰
π
Cos
۲π
کندشونده
تندشونده
x < ۰
v < ۰
a > ۰
F > ۰
x < ۰
v > ۰
a > ۰
F > ۰
نقطه‌ی تعادل
(مرکز نوسان)
x = a = F = ۰
|v| = v max
۳π/۲
نقطه‌ی انتهایی(A-)
x,a,F → Max , v = ۰

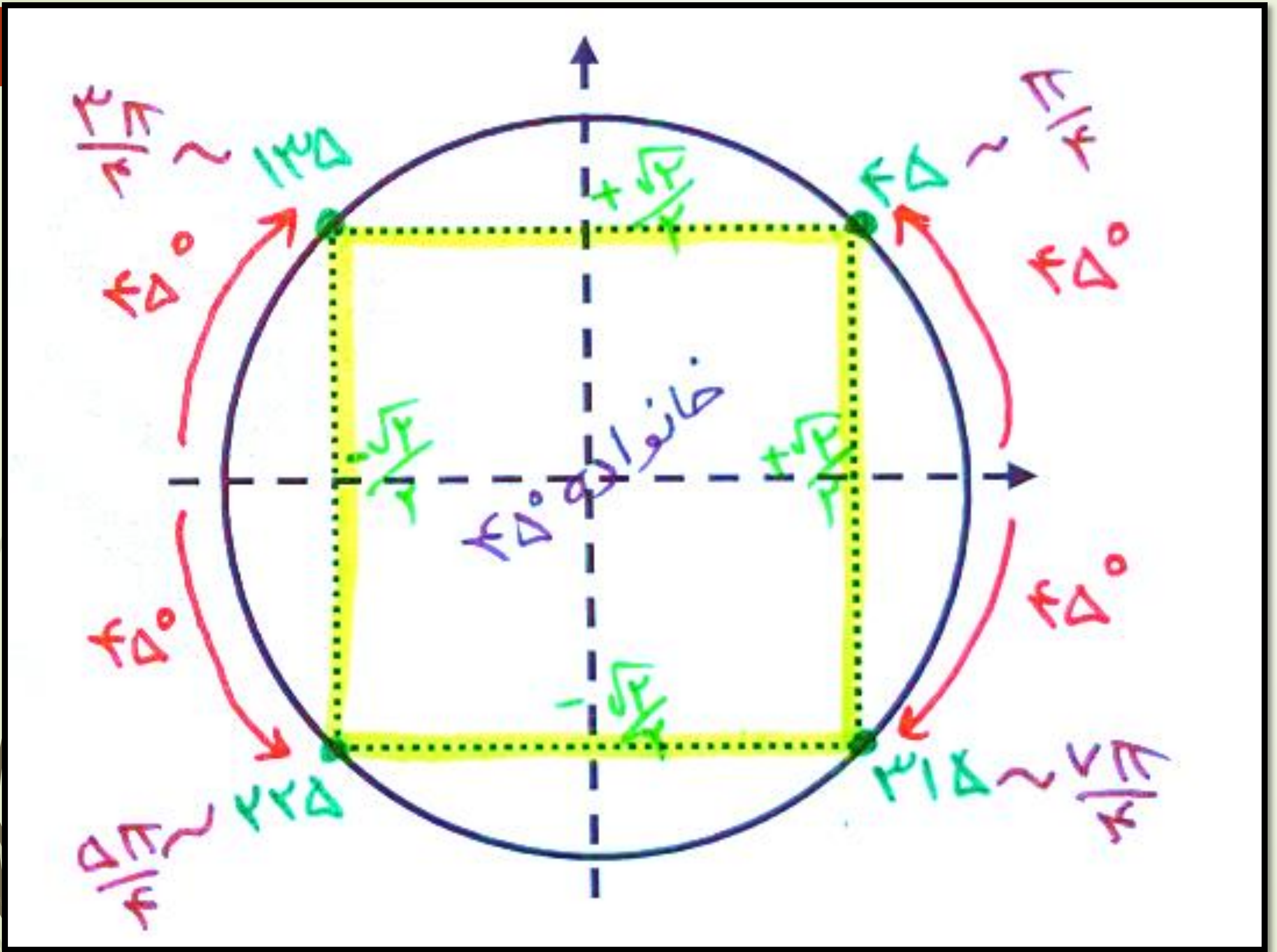
مطالعه آزاد

دایره و نسبت‌های مثلثاتی:



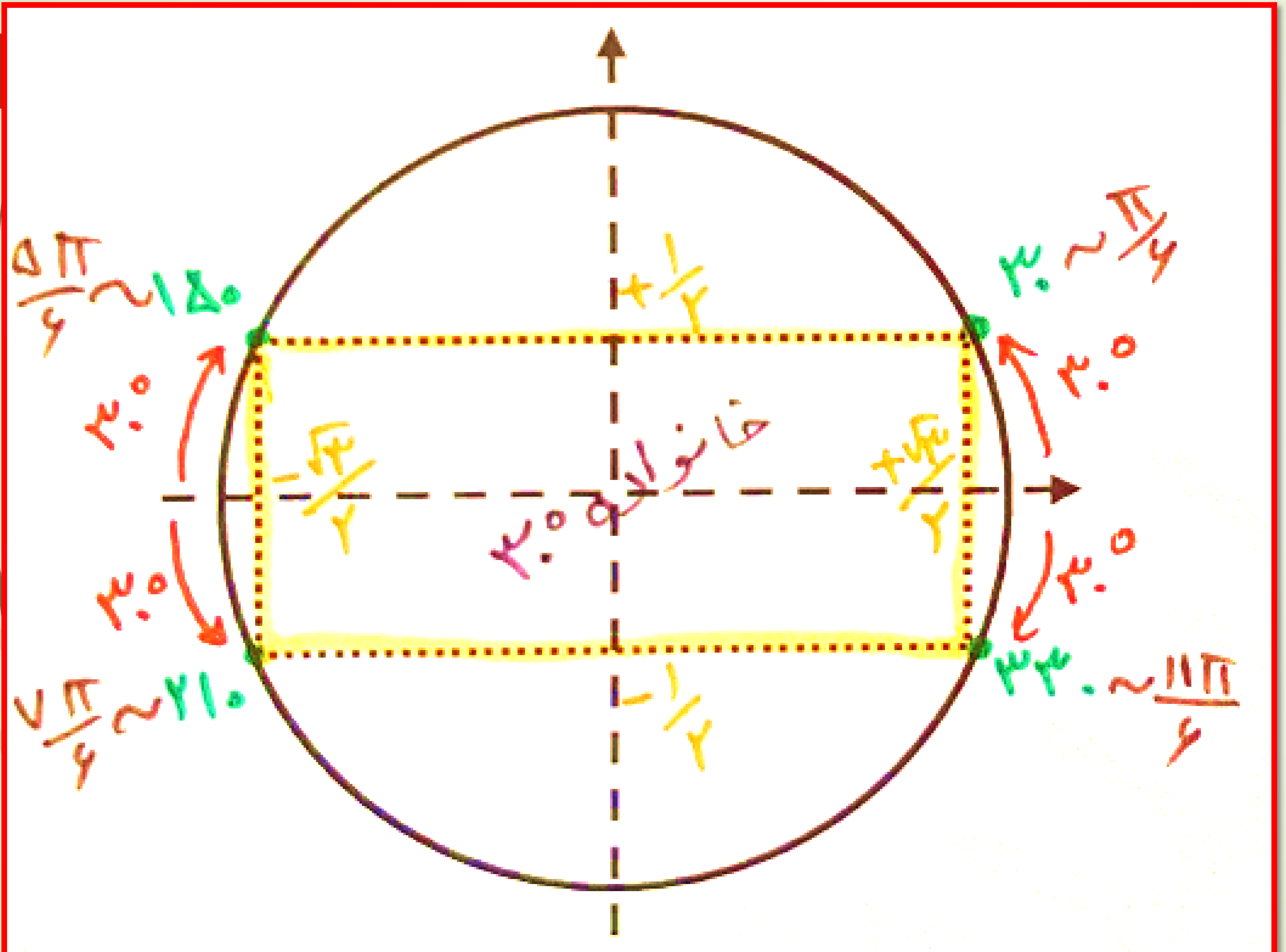
x برحسب درجه	x برحسب رادیان	sin x	cos x	tan x	cot x
۰ و ۳۶۰	۰ و ۲π	۰	۱	۰	تعریف نشده
۳۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
۴۵	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
۶۰	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
۹۰	$\frac{\pi}{2}$	۱	۰	تعریف نشده	۰
۱۸۰	π	۰	-1	۰	تعریف نشده
۲۷۰	$\frac{3\pi}{2}$	-1	۰	تعریف نشده	۰

مطالعه آزاد



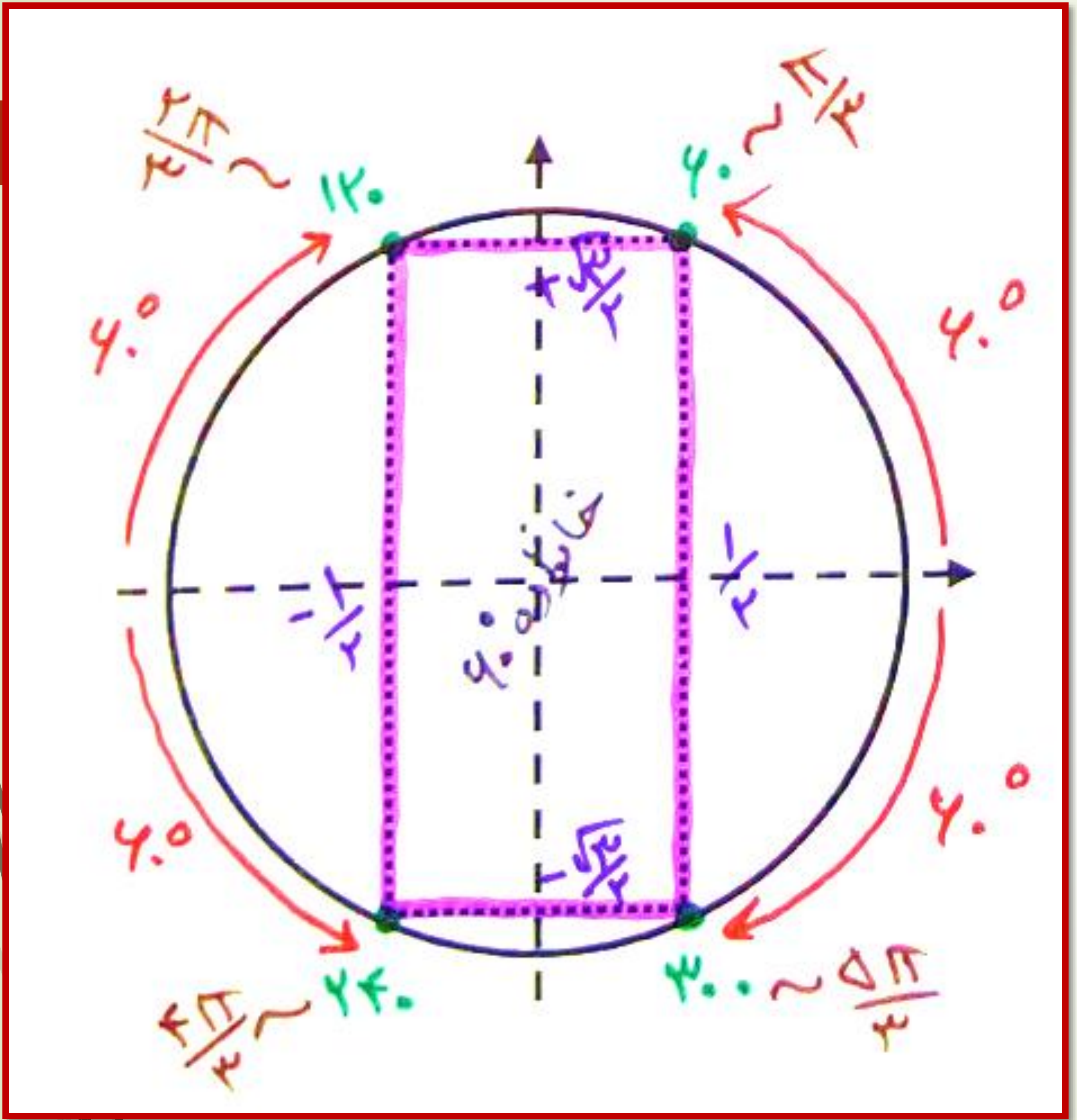
۱۳۵
$\frac{۳\pi}{۴}$ ~
۴۵
~ $\frac{\pi}{۴}$
°۴۵
°۴۵
°۴۵
°۴۵
$+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
$+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
خانواده °۴۵
۲۲۵
$\frac{۵\pi}{۴}$ ~
۳۱۵ ~ $\frac{۷\pi}{۴}$

مطالعه آزاد

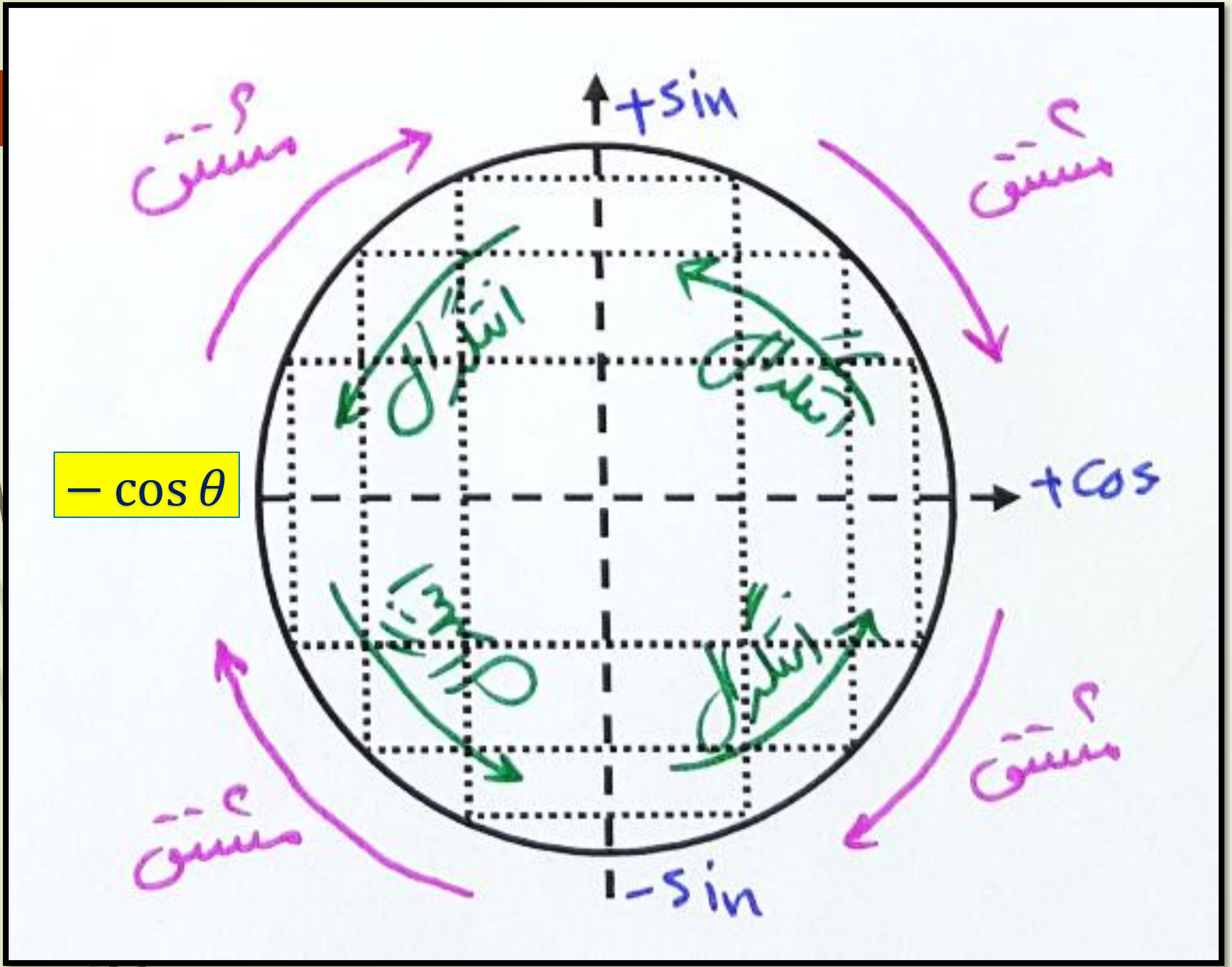


$\frac{5\pi}{6} \sim 150$
$30 \sim \frac{\pi}{6}$
$+\frac{1}{2}$
30
30
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$+\frac{\sqrt{3}}{2}$
خانواده 30
30
30
$\frac{7\pi}{6} \sim 210$
$330 \sim \frac{11\pi}{6}$
$-\frac{1}{2}$

مطالعه آزاد

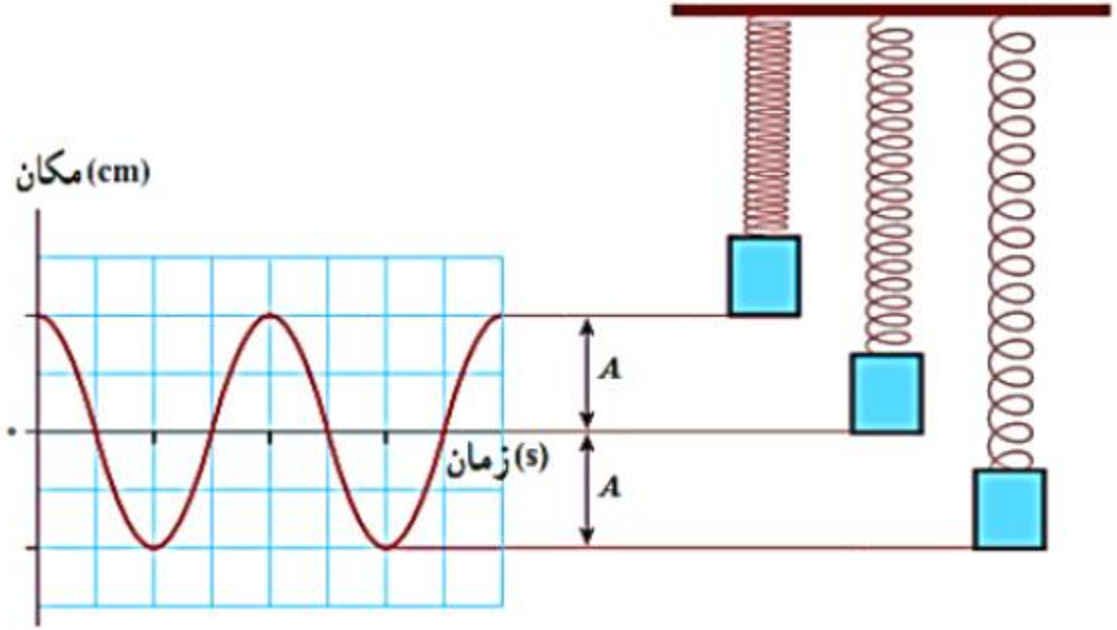


مطالعه آزاد


+sin
مشتق
مشتق
انتگرال
انتگرال
$-\cos\theta$
+cos
انتگرال
انتگرال
مشتق
مشتق
-sin

مثال ۳ـ۱

جرمی متصل به یک فنر با بسامد $0/20\,\mathrm{Hz}$ و دامنهٔ $3/0\,\mathrm{cm}$ به‌طور هماهنگ در امتداد قائم نوسان می‌کند. پس از گذشت $10/66\,\mathrm{s}$ از رها شدن جرم از بالای نقطهٔ تعادل، جابه‌جایی این جرم نسبت به نقطهٔ تعادل چقدر است؟



پاسخ: با استفاده از رابطهٔ $x = A\cos\omega t$ جابه‌جایی نسبت به نقطهٔ تعادلِ جرم ـ فنر را محاسبه می‌کنیم:

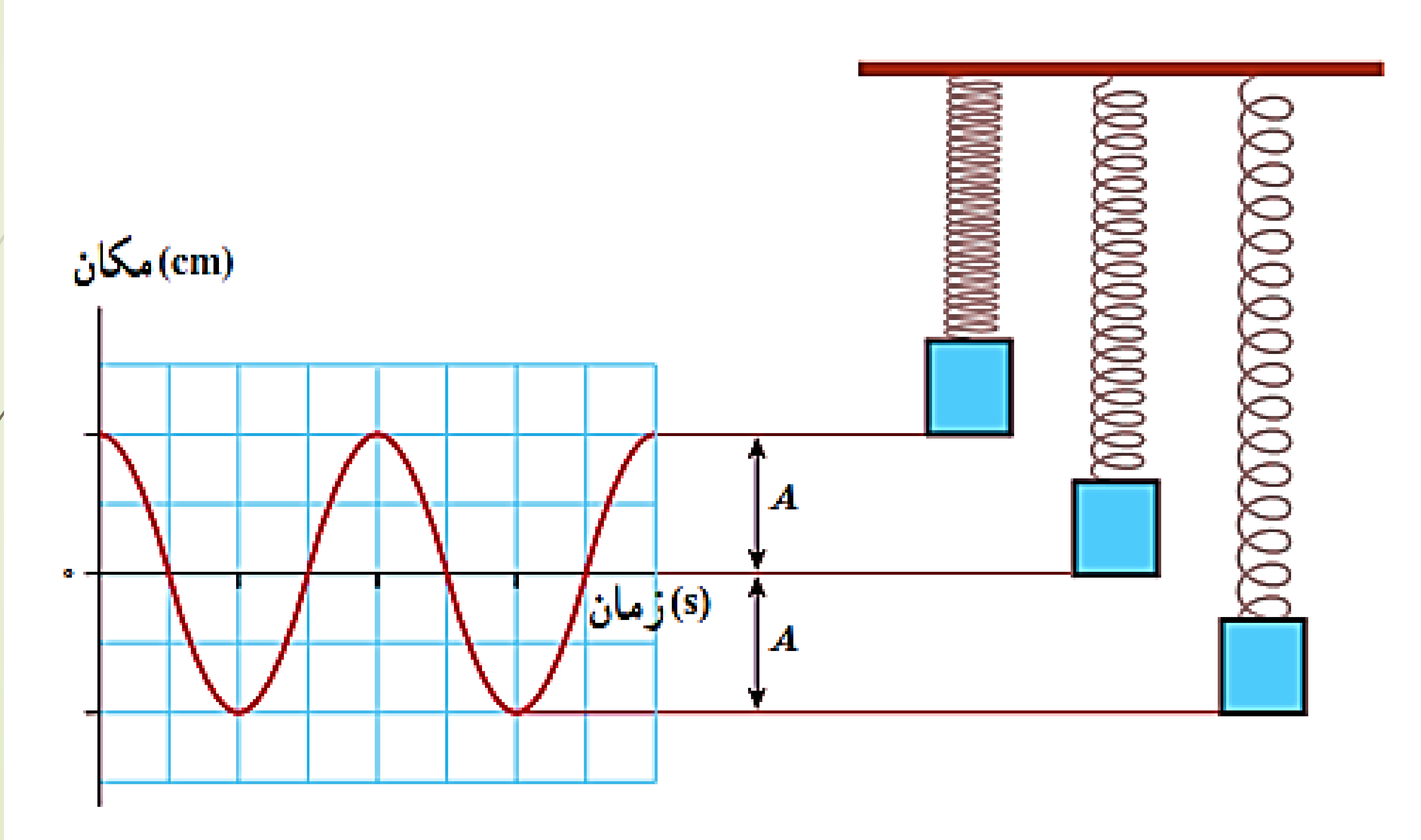
که در آن:

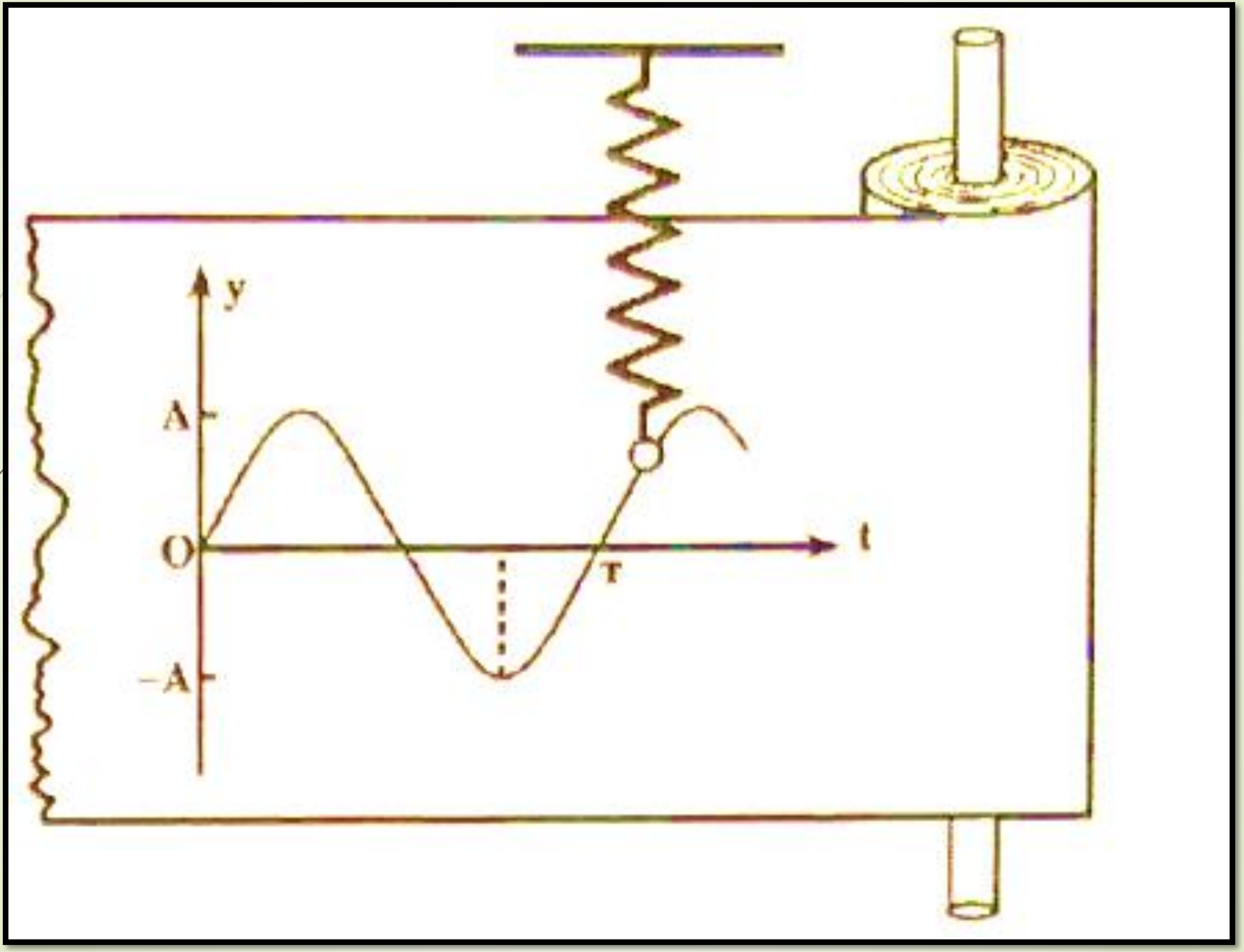
$$A = 0/030\,\mathrm{m}\,,\ \omega = 2\pi f = 2\pi\,(0/20\,\mathrm{s^{-1}}) = 0/40\pi\,\mathrm{rad/s}\,,\ t = 10/66\,\mathrm{s}$$

در نتیجه، در یکای SI داریم[۳]:

$$x = (0/030\,\mathrm{m})\cos(0/40\pi\,\mathrm{rad/s} \times 10/66\,\mathrm{s}) = 0/020\,\mathrm{m}$$

طریقه رسم نمودار مکان زمان حرکت نوسانی :

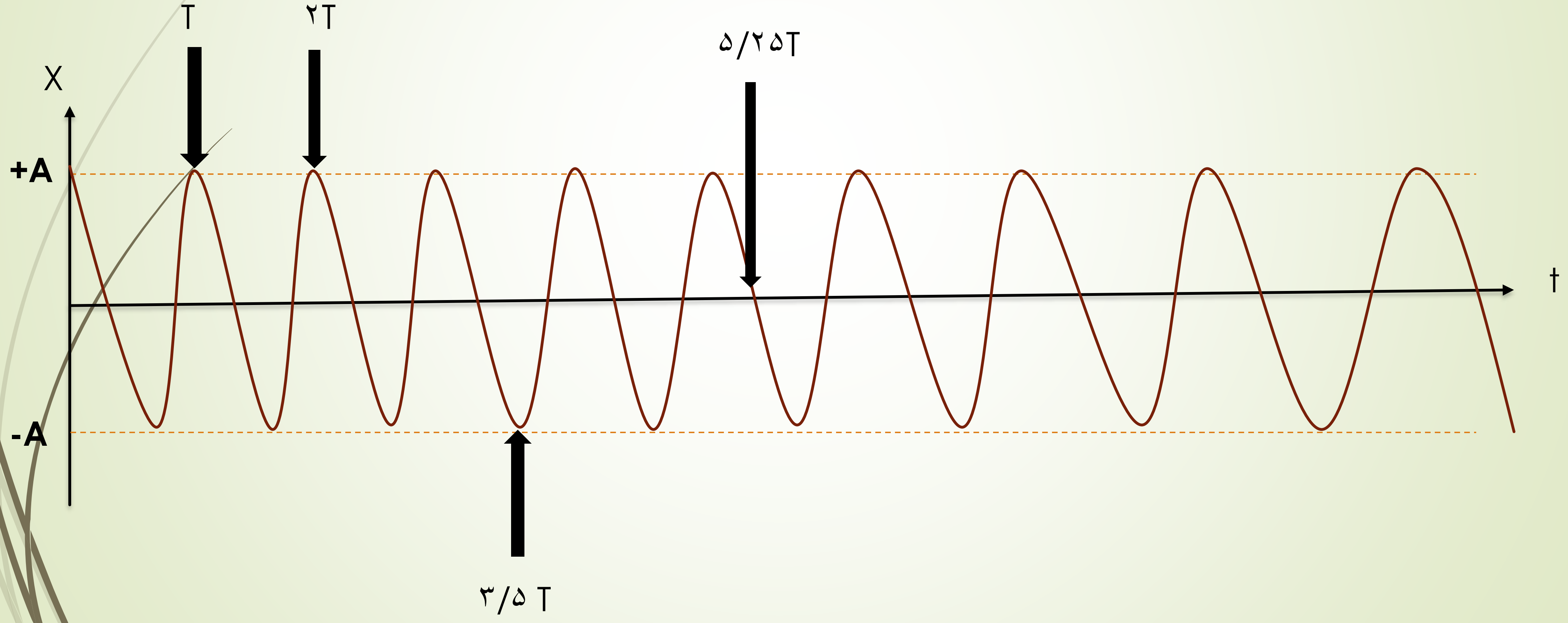



y
A
O
t
T
-A

تمرین ۳ـ۱

ذره‌ای در حال نوسان هماهنگ ساده با دورهٔ تناوب T است. با فرض اینکه در $t=\circ s$ ذره در $x=+A$ باشد، تعیین کنید در هر یک از لحظات زیر، آیا ذره در $x=-A$، در $x=+A$، یا در $x=\circ$ خواهد بود؟ الف) $t=۲/\circ\circ T$، ب) $t=۳/۵\circ T$، پ) $t=۵/۲۵T$

(*راهنمایی* : برای پاسخ به این تمرین، ساده‌تر آن است که چند دوره از یک نمودار کسینوسی را رسم کنید.)



تمرین ۳ــ۲

در حرکت هماهنگ ساده، مکان $x(t)$ باید پس از گذشت یک دورهٔ تناوب برابر مقدار اولیه‌اش شود. یعنی اگر $x(t)$ مکان در زمان دلخواه t باشد، آن‌گاه نوسانگر باید در زمان $t+T$ دوباره به همان مکان بازگردد و بنابراین $A\cos\omega t = A\cos\omega(t+T)$. براین اساس نشان دهید $\omega = ۲\pi/T$.

برای اولین نقطه ایی که با نقطه شروع هم مکان است داریم :

$$COS\,(\omega t) = \cos(\omega t + 2\pi)$$

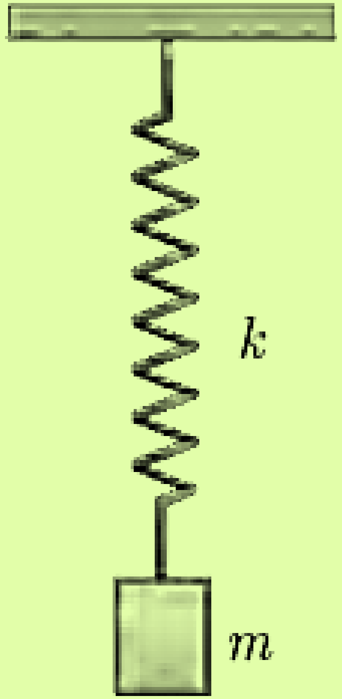
از طرفی برای یک دور حرکت مجدداً به نقطه اولیه بر می گردد:

$$\cos(\omega t) = \cos(\omega(t+T))$$

پس بنابر این باید کمان دو عبارت با هم برابر باشند :

$$\omega t + 2\pi = \omega(t+T) = \omega t + \omega T \xRightarrow{\text{نتیجه}} 2\pi = \omega T \xRightarrow{\text{پس}} \omega = \frac{2\pi}{T}$$

فعالیت ۳ـ۲



با انتخاب وزنه‌ها و فنرهای مختلف، با جرم‌ها و ثابت فنرهای معلوم و مناسب، در آرایشی مطابق شکل، و با اندازه‌گیری زمان تعداد مشخصی نوسان کامل، و سپس محاسبهٔ دورهٔ تناوب T برای هر سامانهٔ جرم ــ فنر، به‌طور تجربی نشان دهید که :

الف) دورهٔ تناوب سامانهٔ جرم ــ فنر با یک فنر معیّن ولی وزنه‌های متفاوت، با جذر جرم وزنه به‌طور مستقیم متناسب است ($T \propto \sqrt{m}$).

ب) دورهٔ تناوب سامانهٔ جرم ــ فنر با یک وزنهٔ معیّن ولی فنرهای متفاوت، با جذر ثابت فنر به‌طور وارون متناسب است ($T \propto ۱/\sqrt{k}$).

در حالت الف با ثابت فرض کردن فنر و تعویض جرم می توان این نکته را تحقیق کرد و در قسمت ب با ثابت گرفتن جرم و تعویض فنر ها می توان پی به این نکته برد

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

جرم جسم

ثابت فنر

(دورهٔ تناوب سامانهٔ جرم ــ فنر)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(بسامد زاویه‌ای سامانهٔ جرم ــ فنر)

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}} \xrightarrow[\omega = ۲\pi f]{\omega = \frac{۲\pi}{T}} \boxed{T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad , \quad f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

مثال ۳ـ۲

قطعه‌ای به جرم ۶۸۰g به فنری با ثابت فنر $k=$ ۶۵N/m بسته شده است. قطعه را به اندازهٔ مشخصی از مکان تعادل خود روی یک سطح افقی بدون اصطکاک می‌کشیم و از حالت سکون رها می‌کنیم. الف) دورهٔ تناوب و ب) بسامد زاویه‌ای نوسان چقدر می‌شود؟

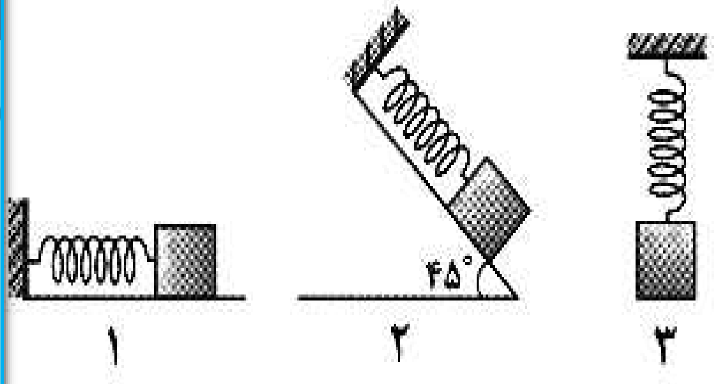
پاسخ : الف) دورهٔ تناوب با استفاده از رابطهٔ ۳ـ۴ به‌دست می‌آید :

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۶۸۰\,\mathrm{kg}}{۶۵\ \mathrm{N/m}}}=۰/۶۴\,\mathrm{s}$$

ب) بسامد زاویه‌ای از رابطهٔ ۳ـ۵ به‌دست می‌آید :

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{۶۵\ \mathrm{N/m}}{۰/۶۸۰\ \mathrm{kg}}}=۹/۸\ \mathrm{rad/s}$$

اگر در شکل‌های مقابل از مقاومت هوا و اصطکاک سطح چشم‌پوشی کنیم، کدام گزینه درست است؟



۱) $f_3 = f_2 = f_1$

۲) $f_3 < f_2 < f_1$

۳) $f_3 > f_2 > f_1$

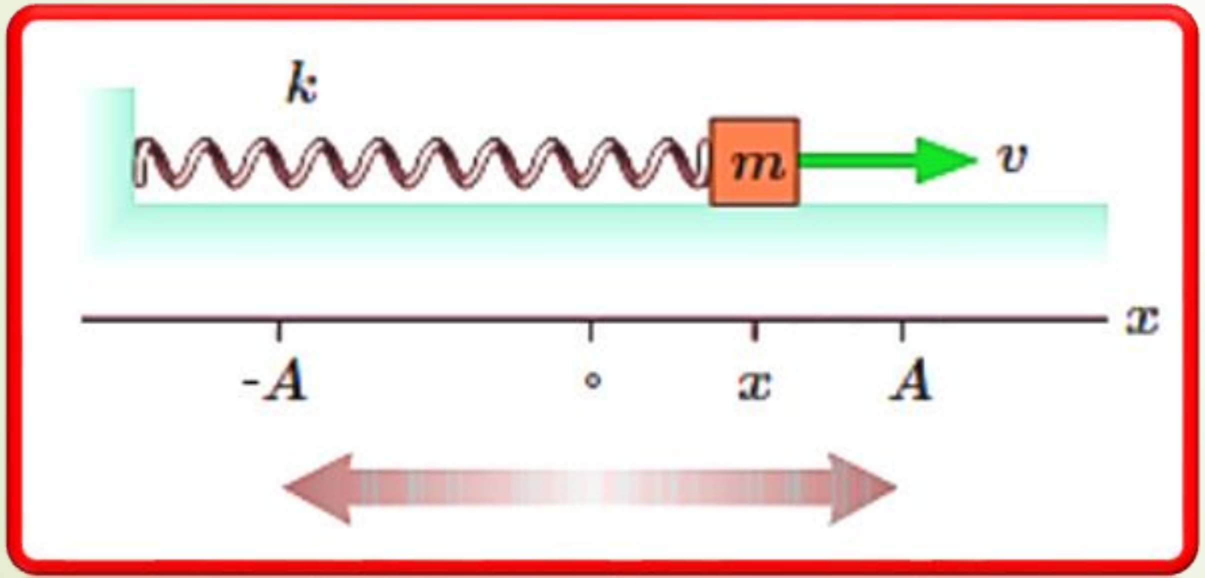
۴) هرسه گزینه میتواند درست باشد.

ذره‌ای به جرم ۵۰۰ گرم روی پاره‌خطی به طول ۱۰ cm، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر دوره‌ی نوسان، $\frac{1}{2}$ ثانیه باشد، بیشینه‌ی نیروی وارد بر نوسانگر چند نیوتون است؟ ($\pi^2=10$)

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

انرژی در حرکت هماهنگ ساده

وقتی فنری فشرده یا کشیده می‌شود در سامانهٔ جرم ــ فنر انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره می‌شود، به‌طوری که با افزایش جابه‌جایی از نقطهٔ تعادل (جایی که فنر نه فشرده و نه کشیده شده است) این انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد. بنابراین انرژی پتانسیل سامانهٔ جرم ــ فنر در نقاط بازگشتی $(x=\pm A)$ بیشینه و در نقطهٔ تعادل $(x=0)$ برابر صفر است.



انرژی‌ها و نمودارهای آن در حرکت نوسانی:

انرژی مکانیکی

انرژی پتانسیل فنر : $U = \frac{1}{2}kx^2$

انرژی جنبشی : $K = \frac{1}{2}mv^2$

$$\left.\begin{array}{l} U = \frac{1}{2}kx^2 \\ K = \frac{1}{2}mv^2 \end{array}\right\} \rightarrow E = U + K$$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ جرم و فنر

$\rightarrow \boxed{k = m\omega^2}$

ثابت فنر

$$K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

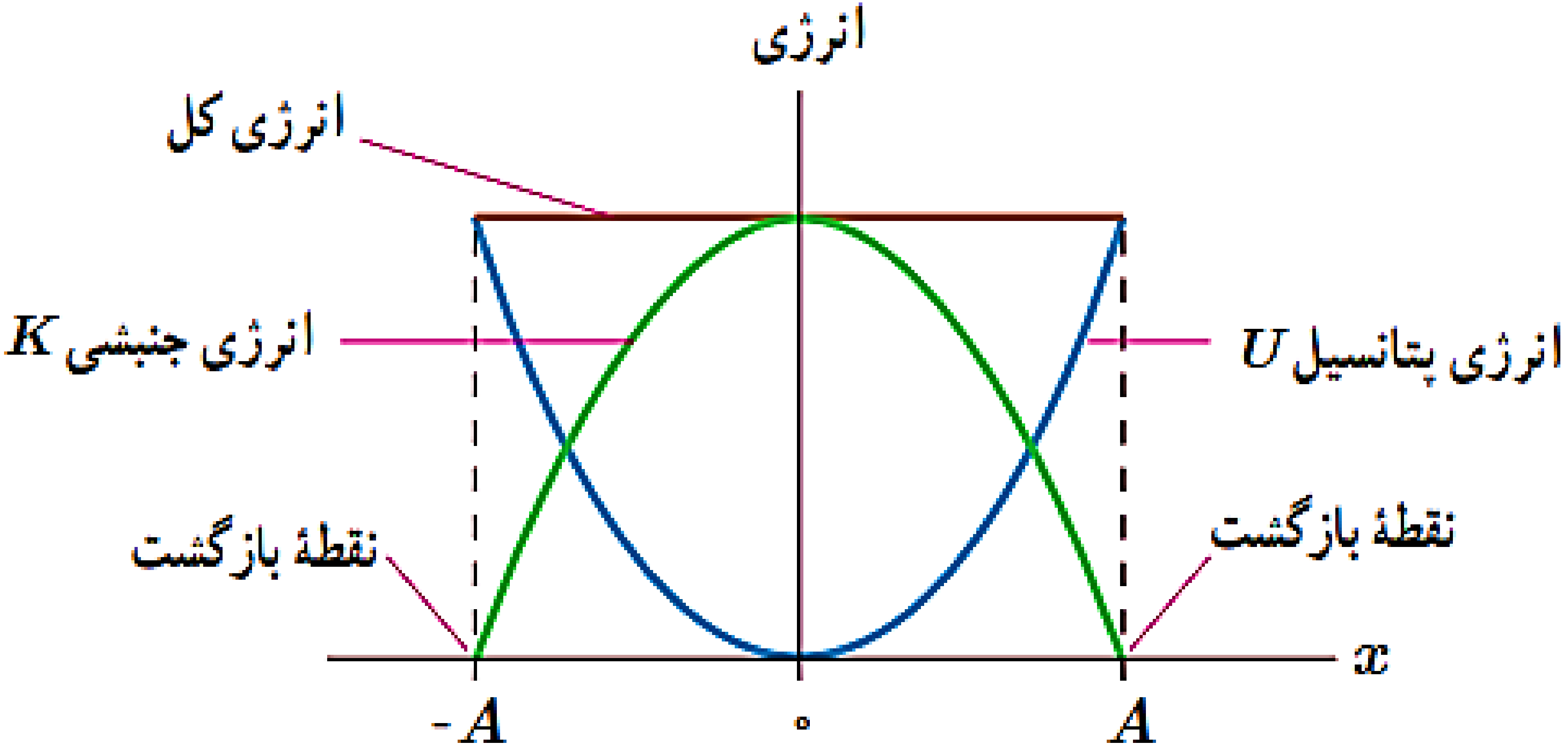
$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

انرژی پتانسیل کشسانی سامانهٔ جرم ـ فنر در هر نقطه از مسیر نوسان از رابطهٔ $U = \frac{1}{2}kx^2$ به‌دست می‌آید

انرژی جنبشی این سامانه نیز به جرم قطعهٔ متصل به فنر و تندی آن بستگی دارد و برابر با $K = \frac{1}{2}mv^2$ است. با افزایش جابه‌جایی از نقطهٔ تعادل، تندی کاهش می‌یابد و انرژی جنبشی سامانه نیز کم می‌شود، طوری که در نقاط بازگشتی $x = \pm A$ که تندی صفر می‌شود انرژی جنبشی سامانه به صفر می‌رسد. بیشینهٔ تندی در نقطهٔ تعادلِ $x = 0$ رخ می‌دهد و بنابراین انرژی جنبشی نیز در این نقطه بیشینه می‌شود.

انرژی مکانیکی این سامانه برابر با مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل آن است ($E=K+U$). چون سطح بدون اصطکاک است، انرژی مکانیکی سامانه پایسته می‌ماند و بنابراین مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در نقاط بازگشتی، نقطهٔ تعادل، و هر نقطهٔ دلخواه دیگری از مسیر با هم برابر است. به همان اندازه که با افزایش جابه‌جایی از نقطه تعادل، انرژی پتانسیل افزایش می‌یابد، انرژی جنبشی کاهش می‌یابد و بالعکس. شکل ۳ــ۷ تبدیل انرژی‌های جنبشی و پتانسیل به یکدیگر و پایستگی انرژی مکانیکی در حرکت هماهنگ سادهٔ سامانهٔ جرم ــ فنر را نشان می‌دهد.

نمودار تبدیل انرژی های نوسانگر به هم(نمودار سه گانه انرژی)



(انرژی مکانیکی سامانهٔ جرم ـ فنر)

$$E=\frac{۱}{۲}kA^{۲}$$

k ثابت فنر و A دامنهٔ نوسان

$$E=\frac{۱}{۲}kA^{۲}=\frac{۱}{۲}m\omega^{۲}A^{۲}=۲\pi^{۲}mA^{۲}f^{۲}$$

$$E=۲\pi^{۲}\,mA^{۲}f^{۲}$$

اگرچه پایستگی انرژی مکانیکی و تبدیل انرژی‌های جنبشی و پتانسیل به یکدیگر را فقط برای نوسانگر جرم ــ فنر بررسی کردیم، ولی می‌توان نشان داد در حالت کلی، برای هرگونه نوسانگر هماهنگ سادهٔ دیگری (از جمله آونگ ساده) نیز برقرار است.

انرژی مکانیکی هر نوسانگر هماهنگ ساده‌ای متناسب با مربع دامنه (A^2) و مربع بسامد (f^2) است.

مثال ۳ـ۳

الف) نشان دهید تندی بیشینه در حرکت هماهنگ ساده برابر است با $A\omega$.

ب) تندی نوسانگر هماهنگ ساده‌ای که با دامنهٔ ۱۰cm و دورهٔ ۰/۵۰s نوسان می‌کند هنگام عبور از نقطهٔ تعادل چقدر است؟

پاسخ : الف) بیشینهٔ تندی در حرکت هماهنگ ساده هنگام عبور نوسانگر از نقطهٔ تعادل رخ می‌دهد، جایی که انرژی پتانسیل صفر است. با استفاده از تعریف انرژی مکانیکی $(E = K + U)$ و همچنین رابطه‌های ۳ـ۷ و ۳ـ۳ خواهیم داشت :

$$۲\pi^۲ mA^۲ f^۲ = \frac{۱}{۲} mv_{max}^۲ + ۰ \Rightarrow v_{max} = ۲\pi Af = A\omega$$

ب)

$$v_{max} = A\omega = A(\frac{۲\pi}{T}) = (۰/۱۰ \text{m})(\frac{۲\pi}{۰/۵۰ \text{s}}) = ۱/۳ \text{ m/s}$$

سوال :

نشان دهید شتاب بیشینه حرکت نوسانی از رابطه زیر بدست می آید ؟

$$a_{max} = A\omega^2$$

$$\left.\begin{aligned} F_e &= kx \\ x_{max} &= \pm A \\ k &= m\omega^2 \\ F &= ma \end{aligned}\right\} \longrightarrow F_e = ma_{max} = kA = m\omega^2 A$$

$$\boxed{a_{max} = A\omega^2}$$

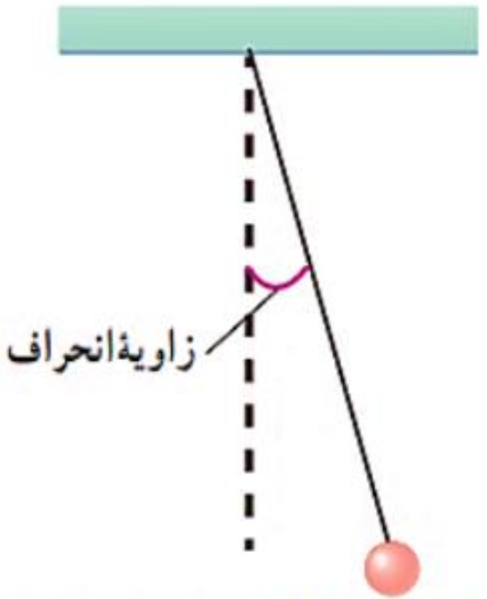
نکته آموزشی :

$$a_{max} = A\omega^2$$

$$V_{max} = A\omega$$

$$\longrightarrow \quad \frac{a_{max}}{V_{max}} = \omega$$

آونگ ساده : آونگ ساده شامل وزنهٔ کوچکی به جرم m (موسوم به وزنهٔ آونگ) است که از نخی بدون جرم و کش‌نیامدنی به طول L که سر دیگر آن ثابت شده، آویزان است (شکل ۳ـ۸). اگر زاویهٔ انحراف آونگ از وضع تعادل کوچک باشد، آونگ حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت و همان تبدیل‌های انرژی نوسانگر هماهنگ ساده در اینجا نیز رخ می‌دهد.



شکل ۳ـ۸ آونگ ساده، شامل وزنه‌ای کوچک است که از نخی بدون جرم و کش نیامدنی آویزان است.

(دورهٔ تناوب آونگ ساده)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

دورهٔ تناوب آونگ ساده فقط به شتاب گرانشی (g) و طول آونگ (L) بستگی دارد

در آونگ، f, T, ω فقط تابع l, g است. وبه جرم آویخته به آونگ ارتباطی ندارد.

مثال ۳ـ۴

بستگی دورهٔ تناوب آونگ به شتاب گرانشی، روش دقیقی را برای تعیین g به‌دست می‌دهد. در این روش با اندازه‌گیری طول L و دورهٔ تناوب T، می‌توان g را به‌دست آورد. ژئوفیزیک‌دانی با استفاده از یک آونگ ساده به طول $0/171\mathrm{m}$ که ۷۲/۰ نوسان کامل را در $60/0\mathrm{s}$ انجام می‌دهد، شتاب g زمین را در مکانی خاص تعیین می‌کند. وی مقدار g را در این مکان چقدر به‌دست می‌آورد؟

پاسخ : رابطهٔ دورهٔ تناوب آونگ ساده را برای g حل می‌کنیم :

$$g=\frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

که در آن T دورهٔ تناوب این آونگ است :

$$T=\frac{\text{زمان}}{\text{تعداد نوسان‌ها}}=\frac{60/0\mathrm{s}}{72/0}=0/833\mathrm{s}$$

در نتیجه g چنین به‌دست می‌آید :

$$g=\frac{4\pi^2 L}{T^2}=\frac{4\pi^2(0/171\mathrm{m})}{(0/833\mathrm{s})^2}=9/73\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$$

اگر جرم گلوله و طول نخ آونگ ساده هر کدام ۲ برابر شود، دوره‌ی آونگ چند برابر می‌شود؟

۱) $\sqrt{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) ۲

۴) ۴

طول آونگ A چهار برابر طول اونگ B و جرم گلوله‌ای A نه برابر جرم گلوله‌ی B است. در مدتی که A تعداد ۱۵۰ نوسان انجام می‌دهد، آونگ B چند نوسان انجام می‌دهد؟

۱) ۷۵

۲) ۲۵

۳) ۱۰۰

۴) ۳۰۰

شرط دوام و بقای حرکت های نوسانی دو عامل است :

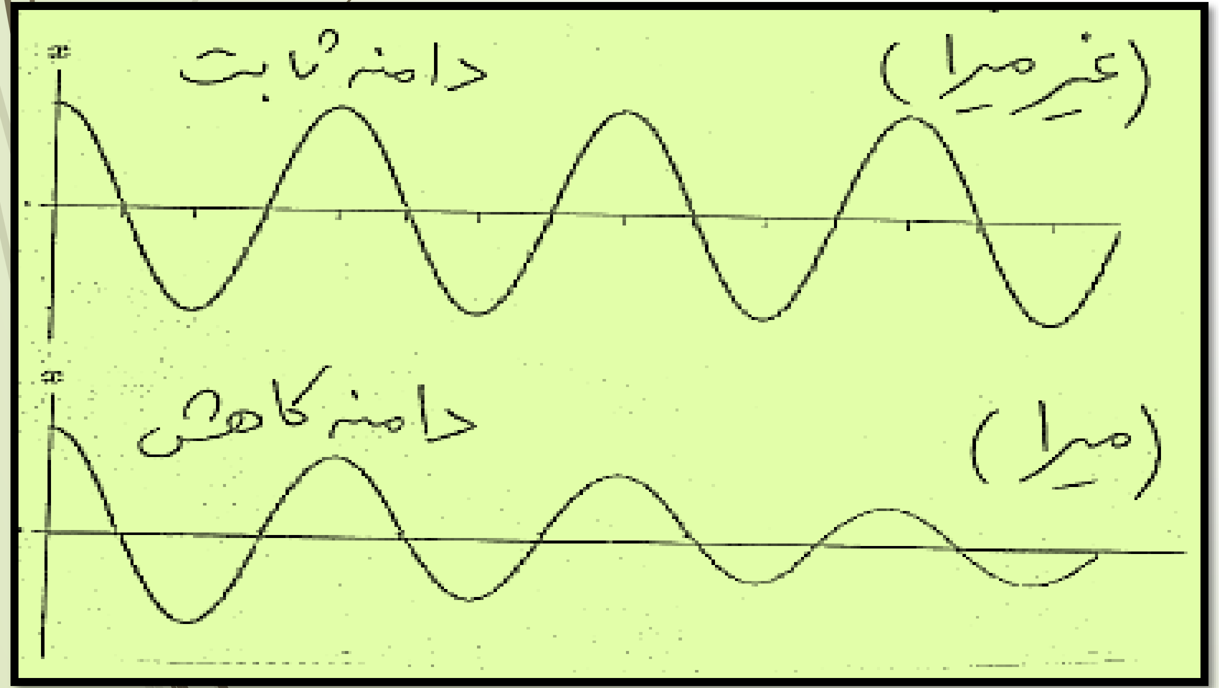
الف– تبدیل مداوم انرژی های جنبشی و پتانسیل به هم

ب– وجود نیروی خارجی برای تامین نیروی نوسان سازی

انواع نوسان :

الف – نوسانات میرا : نوساناتی که به دلیل نیروی مقاومت هوا و اصطکاک دامنه نوسان رفته کم شده تا بایستد

ب– نوسانات غیر میرا : نوساناتی که به دلیل نبود نیروی مقاومت هوا یا اصطکاک دامنه نوسان تغییر نکند (عملاً این گونه نوسانات وجود خارجی ندارند مگر با اعمال نیروی خارجی)



بسامد طبیعی :

وقتی نوسانگری بدون وجود نیروی خارجی به طور طبیعی نوسان کند را می گویند

بسامد واداشته :

وقتی به نوسانگری نیروی خارجی اعمال شود ، بسامد جدیدی پیدا می کند که به آن بسامد واداشته می گویند

نوسان آزاد:

نوساناتی که نیروی خارجی به آن وارد نشود چه نیروی مقاوم داشته باشیم و چه نداشته باشیم. مثل نوسان وزنه و فنر روی سطوح صیقلی و تاب خوردن

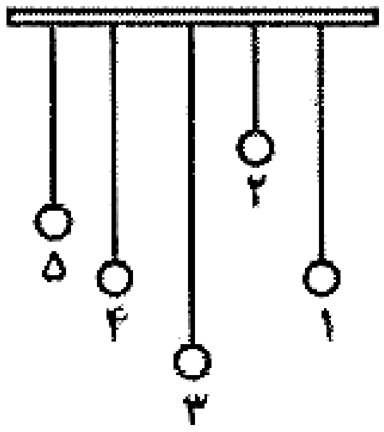
نکته : بسامد نوسان آزاد همان بسامد طبیعی است

نوسانگر (مثلاً جرم ــ فنر یا آونگ ساده) با انحراف از وضع تعادل با بسامدی معیّن شروع به نوسان می‌کرد. به بسامد این نوسان‌ها **بسامد طبیعی** گفته می‌شود. مطابق این تعریف، بسامد طبیعی سامانهٔ جرم ــ فنر $f_0 = \sqrt{k/m}/2\pi$ و بسامد طبیعی آونگ ساده $f_0 = \sqrt{g/L}/2\pi$ است. اما این نوسانگرها می‌توانند با اعمال یک نیروی خارجی، با بسامدهای دیگری نیز به نوسان درآیند. به چنین نوسانی، **نوسان واداشته** گفته می‌شود و بسامد این نوسان را با f_d نمایش می‌دهند

نوسان تاب بی‌آنکه در ادامهٔ حرکت هُل داده شود مثالی از یک نوسان آزاد است، به طوری که نوسان‌های تاب، میرا و سرانجام متوقف می‌شود. ولی وقتی شخصی تاب را هُل می‌دهد، او انرژی تلف شده بر اثر اصطکاک و مقاومت هوا را جبران می‌کند و مانع از میراشدن نوسان تاب می‌شود.

تشدید اگر دامنهٔ نوسان‌های تاب بزرگ‌تر و بزرگ‌تر شود حاکی از آن است که بسامد نوسان‌های واداشته با بسامد طبیعی تاب برابر شده است. در چنین وضعیتی ($f_d = f_0$) اصطلاحاً گفته می‌شود که برای نوسانگر تشدید (رزونانس) رخ داده است. اگر تاب را با بسامدهایی بیشتر یا کمتر از بسامد طبیعی آن هُل دهیم، دامنهٔ نوسان کوچک‌تر از حالتی خواهد شد که آن را با بسامد طبیعی‌اش هل می‌دهیم

در شکل مقابل، به میله‌ی افقی، آونگ‌های ساده با جرم‌های یکسان و طول‌های متفاوت آویخته‌ایم، به‌طوری که طول آونگ‌های ۱ و ۴ با هم مساوی‌اند. با به نوسان در آوردن آونگ ۱، چه اتفاقی می‌افتد؟



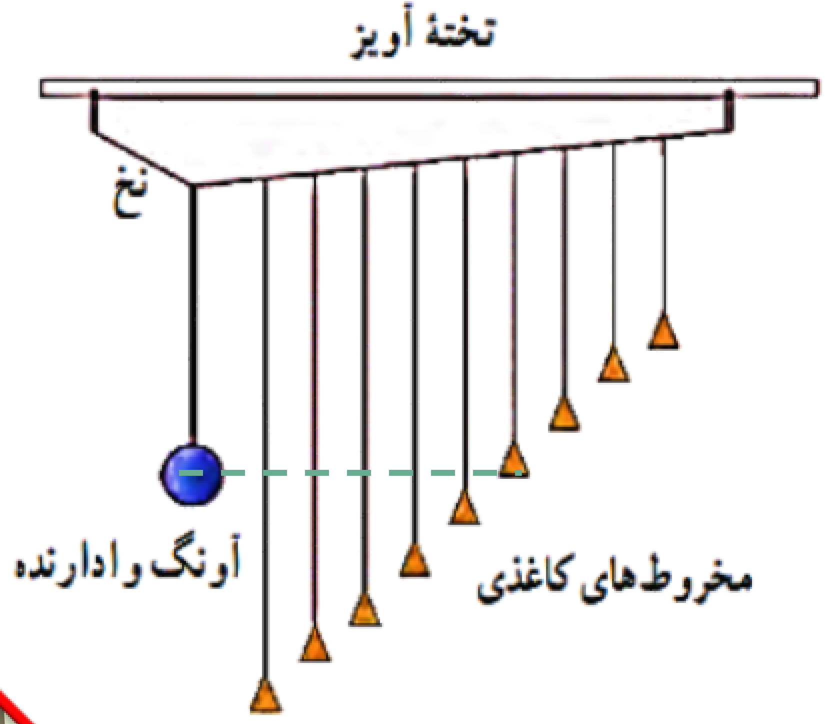
۱) فقط آونگ ۴ در اثر پدیده‌ی تشدید نوسان می‌کند.

۲) همه‌ی آونگ‌ها شروع به نوسان می‌کنند و دوره‌ی نوسان آن‌ها با هم برابر است.

۳) آونگ ۴ ساکن می‌ماند و بقیه‌ی آونگ‌ها شروع به نوسان می‌کنند.

۴) به همه‌ی آونگ‌ها انرژی منتقل می‌شود، ولی بیش‌ترین انرژی در حالت تشدید به آونگ ۴ منتقل می‌شود.

فعالیت ۳ـ۳



آونگ‌های بارتون[۲] : یک آونگ با وزنهٔ سنگین و تعدادی آونگ سبک با طول‌های متفاوت را مطابق شکل سوار کنید. آونگ‌ها روی نخی سوار شده‌اند که هر دو انتهای آن توسط گیره‌هایی به تختهٔ آویز متصل شده است. به آونگ سنگین اصطلاحاً *آونگ وادارنده*[۳] گفته می‌شود، زیرا به نوسان درآوردن این آونگ در صفحهٔ عمود بر صفحهٔ شکل، موجب تاب خوردن نخ آویز و در نتیجه به نوسان واداشتن سایر آونگ‌ها می‌شود. آونگ وادارنده را به نوسان درآورید و آنچه را مشاهده می‌کنید توضیح دهید.

با توجه به رابطه دوره آونگ با طول نخ ،همه آونگ ها شروع به نوسان می کنند اما نوسان آنها دوام نداشته و بسته به اینکه تفاوت طول نخ ها با آونگ اصلی چقدر است زمان توقف آنها متفاوت است و فقط آونگی که با آونگ وادارنده هم طول است هم فرکانس بوده و پدیده تشدید رخ می دهد.

تمرین ۳ــ۳

طول تعدادی آونگ ساده که از میله‌ای افقی آویزان‌اند، عبارت‌اند از، ۰/۴۰m ،۰/۸۰m ،۱/۲m ،۲/۸m ،۳/۵m. فرض کنید میله دستخوش نوسان‌هایی افقی با بسامد زاویه‌ای در گسترهٔ ۲/۰rad/s تا ۴/۰rad/s بشود. کدام آونگ‌ها با دامنهٔ بزرگ‌تری به نوسان درمی‌آیند؟ (توجه کنید گرچه تشدید در بسامد مشخصی رخ می‌دهد، اما دامنهٔ نوسان در نزدیک این بسامد همچنان بزرگ است).

$$\left.\begin{array}{l} \omega = 2\pi f \longrightarrow f = \dfrac{\omega}{2\pi} \\ 2 < \omega < 4 \end{array}\right\} \longrightarrow 0/31 < f < 0/62$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \longrightarrow f = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{L}}$$

طول آونگ L	۰/۴	۰/۸	۱,۲	۲,۸	۳,۵
بسامد طبیعی f_0	۰,۷۹	۰,۵۵	۰,۴۵	۰,۲۹	۰,۲۶
ونگ	A	B	C	D	E

بر اساس جدول در سه آونگ B,C, D تشدید رخ می دهد

پرسش ۳ـ۲

در پی زمین‌لرزهٔ عظیمی (به بزرگی ۸/۱ در مقیاس ریشتر) که در ساحل غربی مکزیک در سال ۱۹۸۵ اتفاق افتاد ساختمان‌های نیمه‌بلند فرو ریختند، ولی ساختمان‌های کوتاه‌تر و بلندتر پابرجا ماندند. علت این پدیده را توضیح دهید.

(الف)

(ب)

الف) ساختمان‌های کوتاه و ب) ساختمان‌های بلند، در زمین‌لرزهٔ مکزیکوسیتی بر جای ماندند.

پاسخ :

چون فرکانس زمین لرزه با فرکانس ساختمان های نیمه بلند نزدیک و احتمالاً برابر بوده است، بر اثر پدیده تشدید این ساختمان ها فرو ریختند اما ساختمان های باقیمانده فرکانشان با فرکانس زلزله نزدیک نبوده است

پایان