درس ۲ احتمال غیر هم‌شانس

ص ۴۸

فعالیت

یک تاس طوری ساخته شده که روی سه وجه آن عدد ۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی‌مانده عدد ۳ مشاهده می‌شود. اگر این تاس را پرتاب کنیم،

۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

$S = \{۱ , ۲ , ۳\}$

۲ با توجه به اینکه عدد ۱ روی سه وجه این تاس قرار دارد، احتمال اینکه این عدد بعد از پرتاب دیده شود را به‌دست آورید.

$A = \{۱\} \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

چون اعضا هم شانس نیستند

آیا می‌توانید از رابطهٔ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبهٔ احتمال وقوع پیشامد A استفاده کنید؟ چرا؟ خیر

هر زیرمجموعه تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم. در پیشامدهای ساده، معمولاً به‌جای $P(\{a\})$ می‌نویسیم $P(a)$.

۳ مشابه قسمت قبل، یعنی با توجه به تعداد وجوهی از تاس که اعداد ۲ و ۳ روی آنها نوشته شده است، احتمال وقوع پیشامدهای ساده $B = \{۲\}$ و $C = \{۳\}$ را به‌دست آورید.

$P(۲) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$ $P(۳) = \frac{۱}{۶}$

۴ آیا احتمال وقوع پیشامدهای ساده A، B و C با یکدیگر برابرند؟ توضیح دهید

۵ به کمک نتایج قسمت‌های قبل، مجموع تمام پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

$P(۱) + P(۲) + P(۳) = \frac{۳}{۶} + \frac{۲}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۶}{۶} = ۱$

$P(D) = \frac{۵}{۶}$

۶ اگر $D = \{۱,۲\}$ پیشامد مشاهده اعداد ۱ یا ۲ در پرتاب تاس باشد، $P(D)$ را به‌دست آورید. این مقدار را با $P(۱) + P(۲)$ مقایسه کنید.

$\frac{۳}{۶} + \frac{۲}{۶} = \frac{۵}{۶}$

$P(۱) + P(۲) = P(D)$

همان‌طور که در فعالیت بالا مشاهده می‌کنید، در فضای نمونه‌ای S، احتمال وقوع پیشامدهای ساده با یکدیگر برابر نیستند.

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با **احتمال غیرهم‌شانس** می‌گوییم.

توجه

در احتمال غیرهم‌شانس نیز مانند احتمال هم‌شانس که در سال‌های گذشته خوانده‌ایم، خواص زیر برقرارند:

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S=\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشند، همواره داریم:

مهم

1. $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(S) = 1$
3. $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_k)$

کار در کلاس

ص ۵۰

1. در یک آزمایش تصادفی، $S=\{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x,y\}) = \frac{2}{3}$ و $P(\{x,z\}) = \frac{1}{2}$، احتمال وقوع هریک از پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

حل:

با توجه به اینکه x، y و z همه اعضای فضای نمونه‌ای هستند. بنابراین $P(x) + P(y) + P(z) = 1$. همچنین با توجه به فرض $P(\{x,y\}) = \frac{2}{3}$، پس $P(x) + P(y) = \frac{2}{3}$، بنابراین با توجه به تساوی بالا، $P(z) = \frac{1}{3}$ (۱)

از سوی دیگر، $P(\{x,z\}) = \frac{1}{2}$، پس $P(x) + P(z) = \frac{1}{2}$. از قراردادن $P(z)$ در این تساوی $P(x) = \frac{1}{6}$ به‌دست می‌آید. (۲) اکنون این مقدار را در تساوی $P(x)+P(y) = \frac{2}{3}$ قرار دهید و مقدار $P(y)$ را به‌دست آورید: $P(y) = \frac{1}{2}$.

توجه کنید:

(۱) $P(x) + P(y) = \frac{2}{3} \rightarrow P(z) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

(۲) $P(x) + P(z) = \frac{1}{2} \rightarrow P(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

۲ یک تاس به‌گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال مشاهدهٔ اعداد ۲ یا ۳ را به‌دست آورید.

در این سؤال، $P(a) = ۳P(b)$ که در آن a یک عدد زوج و b یک عدد فرد از ۱ تا ۶ هستند. بنابراین $P(۱) = P(۳) = P(۵)$ و همچنین $P(۲) = P(۴) = P(۶)$. (چرا؟) حال اگر $P(۱) = x$، سپس $P(۲) = ۳x$. از رابطهٔ زیر استفاده کرده و با جای‌گذاری احتمال پیشامدهای ساده برحسب x، مقدار x را به‌دست آورید.

$$P(S) = ۱ \Rightarrow P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) + P(۶) = ۱$$

$$\Rightarrow x + ۳x + x + ۳x + x + ۳x = ۱ \longrightarrow ۱۲x = ۱$$

$$\Rightarrow x = \frac{۱}{۱۲}$$

اکنون با محاسبهٔ $P(۲)$ و $P(۳)$ می‌توانید $P(\{۲,۳\})$ را تعیین کنید.

$$P(\{۲,۳\}) = P(۲) + P(۳) = ۳x + x = ۴x \xrightarrow{x=\frac{۱}{۱۲}} \text{حاصل} = ۴\left(\frac{۱}{۱۲}\right) = \frac{۱}{۳}$$

تمرین

ص ۵۲

۱ در پرتاب یک سکهٔ ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

$$P(\text{رو}) = x \Longrightarrow P(\text{پشت}) = ۲x$$

$$P(\text{رو}) + P(\text{پشت}) = ۱ \longrightarrow x + ۲x = ۱ \longrightarrow ۳x = ۱$$

$$\boxed{x = \frac{۱}{۳}} \longrightarrow P(\text{رو}) = \frac{۱}{۳} \quad \text{و} \quad P(\text{پشت}) = \frac{۲}{۳}$$

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهدهٔ هر عدد، متناسب با همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، کمتر از ۴ باشد را تعیین کنید. $\leftarrow A$

$P(۱) = x$	$P(۴) = ۴x$	$P(۱) + P(۲) + \cdots + P(۶) = ۱$
$P(۲) = ۲x$	$P(۵) = ۵x$	$x + ۲x + ۳x + ۴x + ۵x + ۶x = ۱$
$P(۳) = ۳x$	$P(۶) = ۶x$	$۲۱x = ۱ \longrightarrow \boxed{x = \frac{۱}{۲۱}}$

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

$A=\{1,2,3\}$ ← عدد مشاهده شده کمتر از ۴

$p(A)=p(1)+p(2)+p(3)=x+2x+3x=6x$

$$\boxed{p(A)=6\left(\frac{1}{21}\right)=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}}$$

۲ اگر $S=\{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{a, b\}$ ، $B=\{a, b, c, d\}$ و $C=\{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به‌طوری که $P(A)=\frac{2}{7}$ و $P(B)=\frac{3}{5}$ ، مقدار $P(C')$ را به‌دست آورید.

$p(A)=\frac{2}{7} \longrightarrow \boxed{p(a)+p(b)=\frac{2}{7}}$ 1

$p(B)=\frac{3}{5} \longrightarrow p(a)+p(b)+p(c)+p(d)=\frac{3}{5}$

$p(S)=1 \longrightarrow \underline{p(a)+p(b)+p(c)+p(d)}+p(e)=1$

2 $\boxed{\frac{3}{5}+p(e)=1 \rightarrow p(e)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}}$

$1,2 \rightarrow p(C)=\underbrace{p(a)+p(b)}_{\frac{2}{7}}+\underbrace{p(e)}_{\frac{2}{5}}=\frac{2}{7}+\frac{2}{5}=\frac{24}{35}$

$$\boxed{P(C')=1-p(C)=1-\frac{24}{35}=\frac{11}{35}}$$

۴ در یک تجربهٔ تصادفی، $S=\{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هرکدام از این پیشامدها را به‌دست آورید.

$$p(x) = x$$

$$p(y) = x + \frac{1}{4}$$

$$p(z) = x + 2\left(\frac{1}{4}\right) = x + \frac{1}{2}$$

$$p(S) = 1 \longrightarrow p(x) + p(y) + p(z) = 1$$

$$x + x + \frac{1}{4} + x + \frac{2}{4} = 1$$

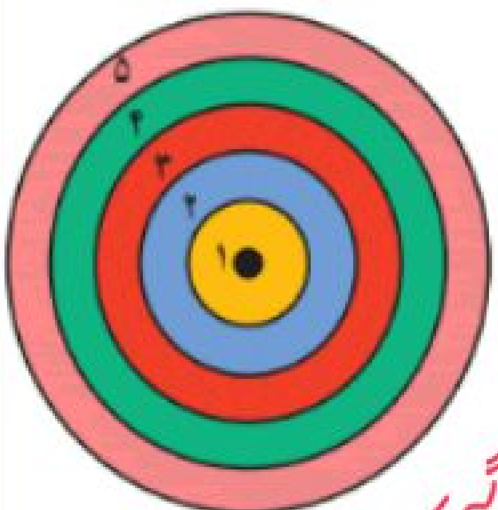
$$3x + \frac{3}{4} = 1$$

$$3x = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{12}}$$

$$p(x) = \frac{1}{12}$$

$$p(y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$p(z) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{1+6}{12} = \frac{7}{12}$$



۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق شکل روبه‌رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است[1]، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیهٔ اول، x باشد.
اگر احتمال اصابت به ناحیهٔ k ام، $(2k-1)x$ باشد:

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به‌دست آورید.

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه‌های اول، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیهٔ دوم یا پنجم؟

ناحیه $= n$ درنظر می‌گیریم

الف)

$P(n_1) = x \qquad P(n_2) = (2\times 2-1)x = 3x$

$P(n_3) = (2\times 3-1)x = 5x \qquad P(n_4) = (2\times 4-1)x = 7x$

$P(n_5) = (2\times 5-1)x = 9x$

$P(n_1)+P(n_2)+P(n_3)+P(n_4)+P(n_5)=1$

$x + 3x + 5x + 7x + 9x = 1$

$25x = 1 \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{25}}$

$P(n_1) = \frac{1}{25}$

$P(n_2) = \frac{3}{25}$

$P(n_3) = \frac{5}{25}$

$P(n_4) = \frac{7}{25}$

$P(n_5) = \frac{9}{25}$

ب)

$P(\{n_1, n_3, n_4\}) = P(n_1)+P(n_3)+P(n_4)$

$= \frac{1}{25}+\frac{5}{25}+\frac{7}{25} = \frac{13}{25}$

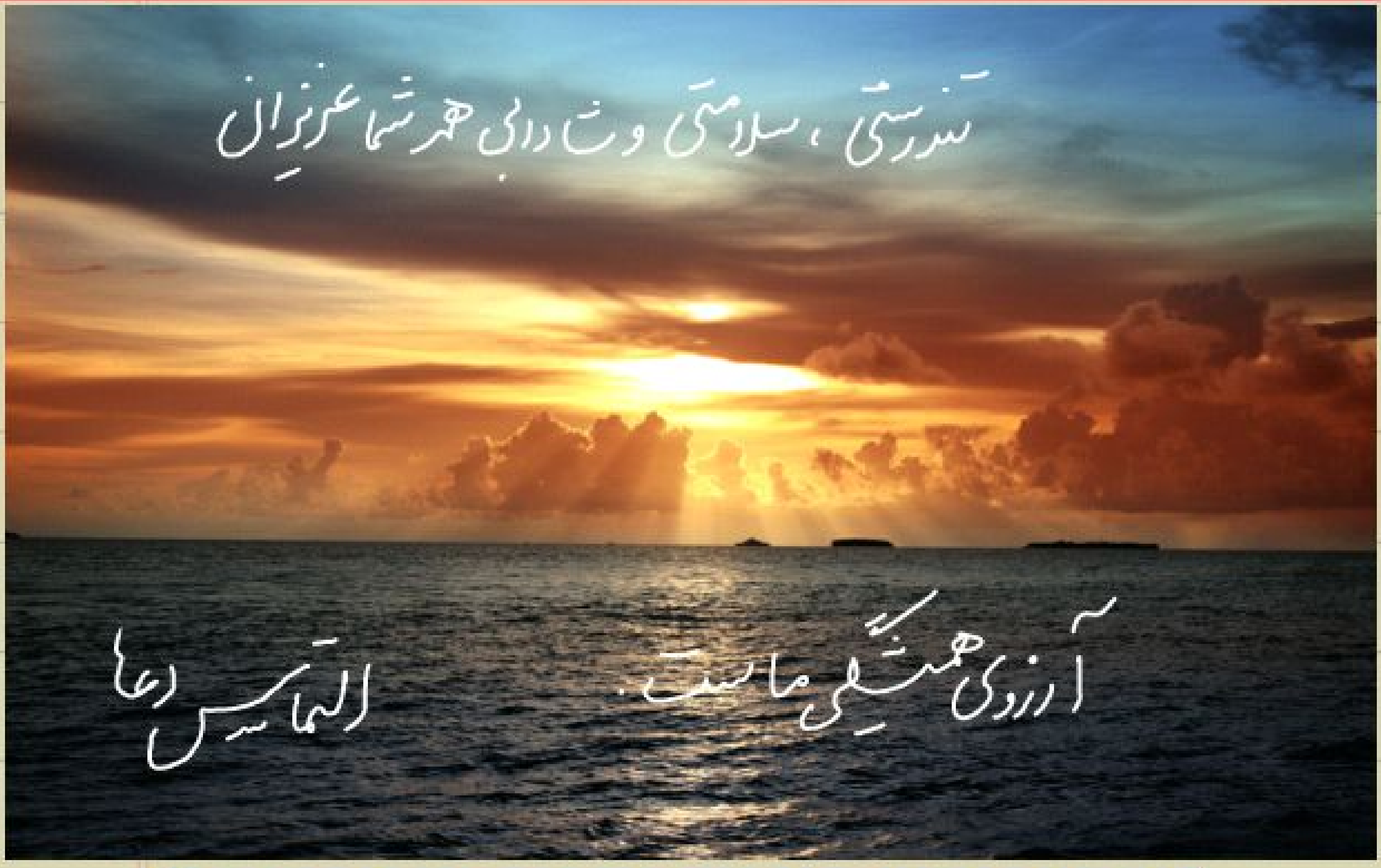
$P(\{n_2, n_5\}) = P(n_2)+P(n_5)$

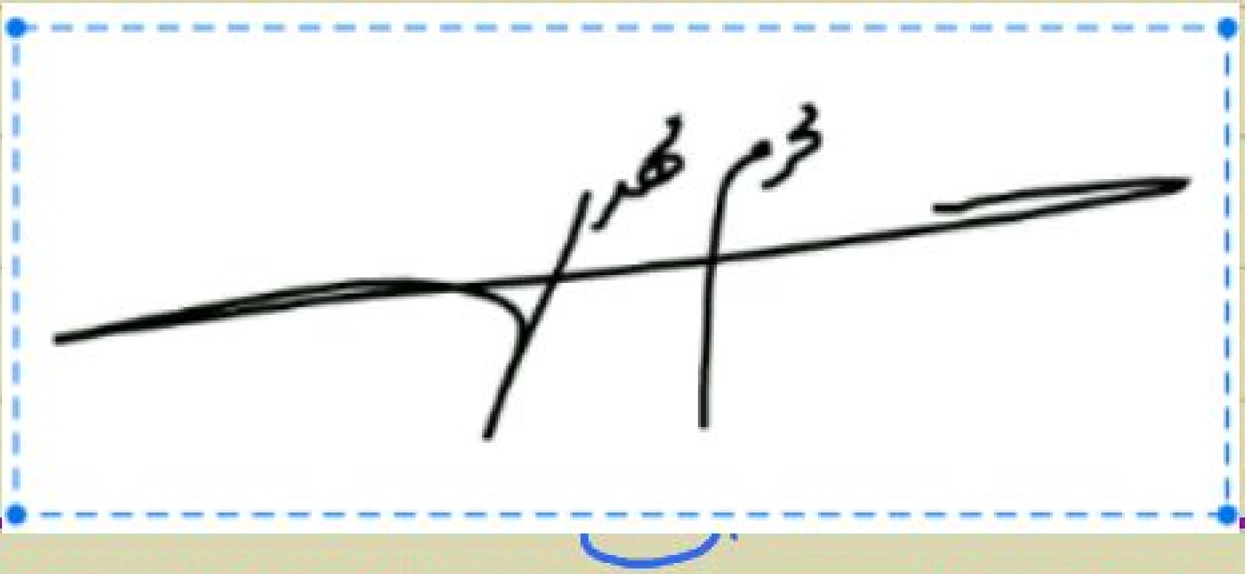
$= \frac{3}{25}+\frac{9}{25} = \frac{12}{25}$

احتمال اصابت به یکی از نواحی اول و سوم و چهارم بیشتر است

پایان درس دوم از فصل دوم

پایان مباحث مرتبط با نوبت اول





09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2