

الف) میانگین داده‌ها

فعالیت



در یک باغ، برای تعیین میزان محصولات گردو، چهار نوع درخت گردو وجود دارد که میزان محصولات انواع گردوها برحسب تعداد به شرح زیر است:

نوع گردو	گردوی نوع اول	گردوی نوع دوم	گردوی نوع سوم	گردوی نوع چهارم
میزان محصول گردو (تعداد)	۵۰۰۰	۲۵۰۰	۳۵۰۰۰	۱۰۰۰

$$\bar{x} = \frac{5000 + 2500 + 35000 + 1000}{\Sigma} = 10875$$

الف) میانگین تعداد گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت چه تعداد است؟
حال اگر علاوه بر داشتن اطلاعات میزان تولید گردو برای هر نوع درخت گردو، تعداد درخت‌های باغ مطابق جدول زیر مشخص شده باشند:

نوع	گردوی نوع اول	گردوی نوع دوم	گردوی نوع سوم	گردوی نوع چهارم
میزان محصول گردو برای هر درخت (تعداد)	۵۰۰۰	۲۵۰۰	۳۵۰۰۰	۱۰۰۰
تعداد درخت‌ها	۱۰	۵	۷	۳

نهیة کننده:

ب) آیا می توان میانگین تعداد گردوی تولید شده در قسمت (الف) را در این حالت به عنوان میانگین گردوی تولید شده برای این چهار نوع درخت گردو در نظر گرفت؟
 (پ) میانگین گردوی تولید شده در این حالت، به چه صورت است؟

$$\bar{x} = \frac{(10 \times 5000) + (5 \times 2500) + (7 \times 3500) + (3 \times 1000)}{10 + 5 + 7 + 3} = \frac{31050}{25} = 1242$$

مجموع داده‌ها: اگر n داده x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، مجموع آن داده‌ها را با نماد سیگما (Σ) نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

و عبارت $\sum_{i=1}^n x_i$ ، سیگمای i از ۱ تا n ، x_i می‌خوانیم.

میانگین یا متوسط داده‌ها: میانگین یا متوسط داده‌ها را با نماد \bar{x} نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

میانگین موزون داده‌ها: اگر n داده x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم به طوری که هر یک از این داده‌ها دارای تعداد تکرار w_1, w_2, \dots, w_n هستند که به هر یک از آنها وزن داده متناظر با آن می‌گوییم. میانگین موزون داده‌ها را با نماد \bar{x}_w نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

کار در کلاس

دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجه کارنامه آزمون آن به شرح زیر است:



مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۷۱	۶۵	۸۰	۵۲	۹۵	۱۰۰
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

نوبه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مطالمان ریاضی، استان خوزستان

$$\bar{x} = \frac{71+65+80+52+95+100}{6} = \frac{463}{6} = 77,17$$

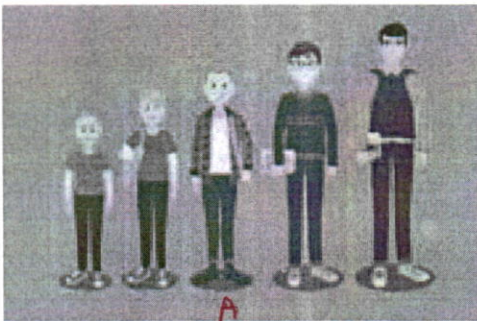
الف) متوسط درصد مواد امتحانی این دانش آموز بدون احتساب ضرایب مواد امتحانی چه عددی است؟
 ب) متوسط درصد مواد امتحانی این دانش آموز با احتساب ضرایب مواد امتحانی را کامل کنید؟

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^6 w_i x_i}{\sum_{i=1}^6 w_i} = \frac{4 \times 71 + 3 \times 65 + 1 \times 80 + 1 \times 52 + 5 \times 95 + 3 \times 100}{4 + 3 + 1 + 1 + 5 + 3} = \frac{284 + 195 + 80 + 52 + 475 + 300}{16} = \frac{1291}{16} = 80,69$$

ب) کدام متوسط، مناسب است؟

ب) میانه داده‌ها

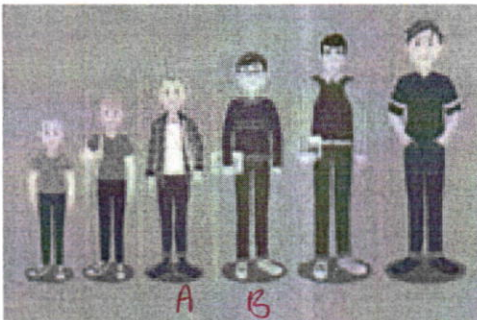
فعالیت



شکل الف

در شکل الف افرادی را به ترتیب قد، در یک صف مرتب کرده‌اند و داده‌های مربوط به اندازه قد آنها (برحسب سانتی متر)، به صورت روبه‌رو می‌باشد.

در شکل الف در بین پنج فرد، کدام فرد از نظر قد در وسط صف قرار گرفته است؟ **A**



شکل ب

حال به شکل ب توجه کنید. در بین شش فرد، کدام فرد در وسط صف قرار دارد؟

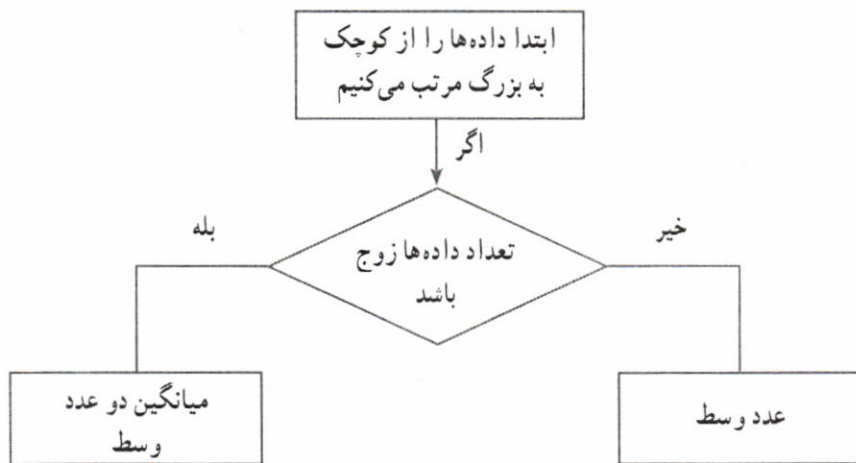
همان‌طور که مشاهده می‌شود، به راحتی نمی‌توانید عدد وسط در این حالت را پیدا کنید. برای به دست آوردن عدد وسط در این حالت مراحل زیر را انجام دهید:
 الف) دو فردی که در جایگاه وسط صف قرار گرفته‌اند را پیدا کنید.

ب) میانگین این دو عدد را به عنوان عدد وسط قد این افراد به دست آورید.

$$\frac{A+B}{2}$$

میانه، چارک اول و چارک سوم: عدد وسط مجموعه‌ای از داده‌ها را که از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند میانه داده‌ها می‌گوییم و آن را با Q_2 نشان می‌دهیم. میانه یک چهارم اول داده‌های مرتب شده را چارک اول داده‌ها می‌گوییم و آن را با Q_1 نشان می‌دهیم. همچنین میانه سه چهارم داده‌های مرتب شده را چارک سوم می‌گوییم و آن را با Q_3 نشان می‌دهیم.

نحوه به دست آوردن میانه داده‌ها



کار در کلاس



در یک شعبه بانک تراکنش‌های مالی بسیاری در یک روز انجام می‌گردد. یک تراکنش مالی ممکن است انتقال مبلغی از حساب پس‌انداز یک مشتری به حساب جاری مشتری دیگری در یک بانک باشد. این تراکنش را می‌توان به دو عملیات تقسیم کرد: بدهکار کردن حساب پس‌انداز یک مشتری به اندازه مبلغ مورد نظر و طلبکار کردن حساب جاری مشتری دیگر به اندازه همان مبلغ است.

الف) فرض کنید تراکنش‌های مالی در بازه زمانی ۸ تا ۹ صبح یک شعبه بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود.

Handwritten notes for the first example:
 Q_1 above 87
 Q_3 above 12
 Q_2 below 10
 87, 10, 12, 25

۲۵	۱۲	۱۰	۸۷	۱۰
----	----	----	----	----

■ میانه، چارک اول و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.
 ب) حال فرض کنید تراکنش‌های مالی دیگری در بازه زمانی ۹ تا ۱۰ صبح در همان شعبه بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود.

۳۴	۳۲	۲۰	۸۱٫۷	۳۰	۷۰
----	----	----	------	----	----

■ در این حالت نیز میانه، چارک اول و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.

Handwritten notes for the second example:
 $Q_1 = 30$
 $Q_3 = 70$
 $Q_2 = \frac{32 + 34}{2} = 33$

پ) مد یا نما داده‌ها

فعالیت

به تصاویر روبه‌رو توجه کنید. در شکل (الف)، (ب) و (پ) یک سری از حالت‌های صورتک را مشاهده می‌کنید. تعداد این حالت‌ها را در شکل (الف)، (ب) و (پ) در جدول زیر کامل کنید.

شکل الف

شکل ب

شکل پ

شماره صورتک‌ها	انواع صورتک‌ها	شکل الف	شکل ب	شکل پ
۱		۳	۲	۳
۲		۱	۲	۱
۳		۲	۲	۱
۴		۲	۲	۲
۵		۲	۲	۲
۶		۱	۲	۱

- در شکل الف کدام صورتک بیشتر از همه تکرار شده است؟ **۱**
- در شکل ب کدام صورتک بیشتر از همه تکرار شده است؟ **۲**
- در شکل پ کدام صورتک بیشتر از همه تکرار شده است؟ **۱** و **۵**

مد یا نما داده‌ها: داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد، مد یا نما داده‌ها نام دارد. اگر در داده‌هایی، همه داده‌ها یک فراوانی داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها مد ندارند. اگر در داده‌هایی، دو داده بیشترین فراوانی را داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها دو مد دارند.

کار در کلاس

در یک مسابقه پرتاب دarts، سه نفر شرکت کرده‌اند. بر اساس ۱۰ پرتابی که آنها انجام داده‌اند، امتیازهای زیر به دست آمده است:



- مد نفر اول چه عددی است؟ **۹**
- مد نفر دوم چه عددی است؟ **۱۰**
- مد نفر سوم چه عددی است؟ **۹**

۸	۸	۹	۱۰	۹	۵	۷	۱۰	۹	۱۰	نفر اول
۷	۴	۵	۳	۲	۱	۶	۸	۹	۱۰	نفر دوم
۷	۴	۵	۹	۱۰	۱۰	۷	۹	۹	۹	نفر سوم

نویسنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن دبیران ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

میانگین، میانه و مد داده‌ها، کدام معیار را انتخاب می‌کنید؟

کار در کلاس



دو کارخانه تولید لامپ را در نظر بگیرید. کارخانه (الف)، لامپ‌های کم مصرف و کارخانه (ب)، لامپ‌های پر مصرف تولید می‌کند. مدیر این دو کارخانه می‌خواهد در مورد طول عمر لامپ‌های تولیدی کارخانه‌هایشان تحقیقی انجام دهد.

بر اساس داده‌های سال‌های گذشته در کارخانه (الف) و (ب)، طول عمر پنج لامپ برحسب ماه ثبت شده است و نتایج را به صورت زیر جمع‌آوری می‌نماید.

پنجم	چهارم	سوم	دوم	اول	لامپ انتخاب شده
۱۶	۱۵	۱۴	۱۵	۱۷	طول عمر لامپ تولید شده در کارخانه (الف)
۱۳	۱۶	۰	۱۵	۰	طول عمر لامپ تولید شده در کارخانه (ب)

■ آیا میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانه (الف)، معیار گرایش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ‌های تولید شده کارخانه (الف) است؟

■ به دلیل وجود لامپ‌های تولید شده با طول عمر صفر در کارخانه (ب) آیا باز هم میانگین طول عمر لامپ‌های تولید شده در کارخانه (ب)، معیار گرایش به مرکز خوبی برای طول عمر لامپ‌های تولید شده است؟ چه معیار گرایش به مرکزی مناسب است؟

■ مدیر کارخانه براساس فروش سال گذشته، متوجه شده است که لامپ‌های کم مصرف با نور سفید در منازل مردم رایج شده است. اگر او بخواهد برای امسال لامپ‌های کم مصرف با نور سفید تولید کند، کدام معیار گرایش به مرکز، برای تعداد این لامپ‌های تولیدی به او کمک می‌کند؟

داده دور افتاده: مشاهده‌ای که تفاوت بسیار زیادی با سایر مشاهدات مجموعه داده‌ها داشته باشد، میانگین داده‌ها را تحت تأثیر قرار داده در حالی که تأثیری بر میانه و مد داده‌ها ندارد. در فعالیت مربوط به تعداد لامپ‌های تولیدی کارخانه (ب)، عدد صفر داده دور افتاده است.

در تفسیر و تحلیل مسائل آماری، در نظر گرفتن تنها یک شاخص گرایش به مرکز کافی نیست. می‌بایست هر سه معیار میانگین، میانه و مد محاسبه شود و بر اساس هدف مورد بررسی، معیار مناسب انتخاب و از آن برای انجام تفسیر، قضاوت و پیش‌بینی مورد استفاده قرار گیرد.

نوبه کننده:

تمرین

۱ تعداد حمله‌های یک تیم فوتبال در شش مسابقه گذشته به صورت ۴۳، ۴۲، ۴۵، ۴۴، ۴۵، ۴۸ است. میانگین تعداد حملات این تیم در شش بازی گذشته را به دست آورید؟

۲ بالاترین دما در هریک از روزهای هفته گذشته اندازه‌گیری شده و نتایج زیر به دست آمده است. معدل یا میانگین دما در هفته گذشته چه عددی است؟

۵۵، ۲۷، ۲۹، ۳۲، ۲۸، ۳۱، ۲۹

۳ میانه و مد هر یک از داده‌های زیر را به دست آورید؟

پ) ۱۵، ۸، ۳، ۱۰

ب) ۶۰، ۵۰، ۴۰، ۲۴، ۳۰

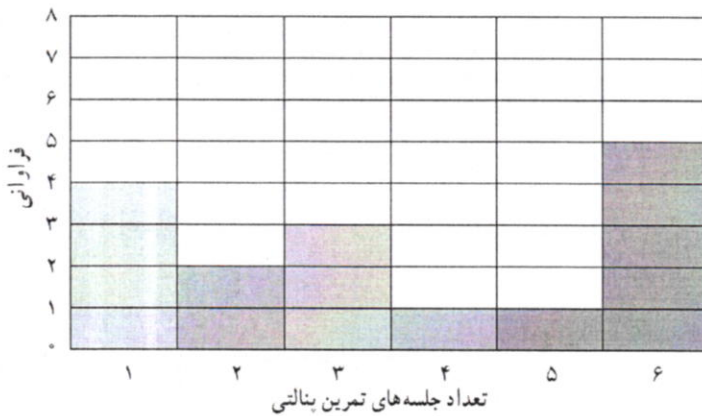
الف) ۸، ۹، ۹، ۹، ۹

ج) ۷، ۴، ۱۳، ۷

ث) ۲۳، ۱۲، ۱۲، ۲۳

ت) ۵، ۱۲، ۹، ۶، ۴

۴ نمودار زیر، نمودار میله‌ای مربوط به تعداد ضربات پنالتی گل شده یک بازیکن در شش جلسه تمرین پنالتی است. با توجه به نمودار، میانگین، میانه و مد تعداد ضربات گل شده را به دست آورید؟



مدت

۵ در جدول زیر، نمرات درس ریاضی ۱۰ دانش‌آموز گردآوری شده و میانگین نمرات داده شده است. علامت‌های سؤال چه اعدادی اند؟

۱۷/۵	۱۹	۱۷	۱۶	۲۰	نمرات درس ریاضی
۱۶	۱۵	۱۸	؟	۱۸	
					میانگین نمرات = ۱۵/۶۵
					مد نمرات = ؟



۶ داده‌های زیر مدت زمان مطالعه یک دانش‌آموز را در روزهای هفته نشان می‌دهد.

روزهای هفته	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه
مدت زمان مطالعه (ساعت)	۲	۱/۵	۲/۵	۱/۵	۲	۳	۳

۹۰ فصل سوم: آمار توصیفی

این دانش آموز به طور میانگین چند ساعت در روز، در هفته گذشته مطالعه کرده است؟

۷ یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های پرداخت شده امسال را جمع‌آوری نموده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده برابر ۸۵ میلیون ریال به دست آمده است در صورتی که میانه و مد آن برای این خسارت‌های پرداخت شده برابر $42/2$ میلیون ریال و عدد 90 میلیون ریال می‌باشد. به نظر شما مدیر شرکت، کدام معیار گرایش به مرکز را به منظور تعیین حق بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا اینکه این شرکت ضرر نکند؟

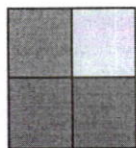
۸ دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجه کارنامه آزمون آن به شرح زیر است :

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۵۳	؟	۶۷	۳۴	۸۰	۶۷
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

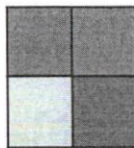
سوال ایراد دارد. چرا رفع ایراد
معدل موزون را به ۶۳ تبدیل
کنند.

اگر معدل موزون درصد این دانش‌آموز 73 باشد، درس فیزیک را چند درصد زده است؟

۹ میانگین ۵ داده آماری ۱۷ است، اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم، میانگین جدید چه عددی خواهد شد؟



$(470 \quad 580)$
 $(690 \quad 690)$



$(470 \quad 470)$
 $(580 \quad 690)$

رنگ‌ها	طیف رنگ‌ها
	۴۵۰ تا ۴۹۵
	۴۹۵ تا ۵۷۰
	۵۷۰ تا ۵۹۰
	۵۷۰ تا ۶۲۰
	۶۲۰ تا ۷۵۰

۱۰ دو دانش‌آموز، جدول‌های چهارخانه‌ای را به صورت روبه‌رو رنگ‌آمیزی کرده‌اند، بر اساس جدول مربوط به طیف رنگ‌ها، جدول عددی این دو شکل به صورت روبه‌رو نشان داده شده است :
حال جدول عددی مربوط به این دو شکل را ابتدا با هم جمع و سپس هریک از اعضای جدول عددی را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم. جدول عددی حاصل را به دست آورده و شکل مورد نظر را با توجه به جدول طیف رنگ‌ها، به دست آورید. آیا این شکل میانگین دو شکل بالا است؟

برای پاسخ به این سؤال، کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز را مطالعه کنید. عدد مربوط به طیف رنگ‌ها در جدول موجود در حاشیه نشان داده شده است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن دبلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

حل تمرین های صفحه ۹۰ (آمار و احتمال)

تمرین ۱:

$$\bar{x} = \frac{۴۸ + ۴۵ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۲ + ۴۳}{۶} = \frac{۲۶۷}{۶} = ۴۴/۵$$

تمرین ۲:

$$\bar{x} = \frac{۵۵ + ۲۷ + ۲۹ + ۳۲ + ۲۸ + ۳۱ + ۲۹}{۷} = \frac{۲۳۱}{۷} = ۳۳$$

تمرین ۳: برای محاسبه ی میانه، ابتدا داده را از کوچک به بزرگ مرتب می کنیم.

- الف) مد برابر ۹ و میانه برابر ۹ ب) مد ندارد. میانه برابر ۵۰ پ) مد ندارد. میانه برابر ۹
ت) مد ندارد. میانه برابر ۶ ث) مد ندارد. میانه برابر ۱۷/۵ ج) مد برابر ۷ و میانه برابر ۷

تمرین ۴: داده ها را تعداد ضربات پنالتی را در هر جلسه در نظر گرفتیم.

شماره جلسه	تعداد ضربات پنالتی گل شده
۱	۴
۲	۲
۳	۳
۴	۱
۵	۱
۶	۵
جمع	۱۶

$$\bar{x} = \frac{۱۶}{۶} = ۲/۷ \text{ میانگین}$$

$$\rightarrow \tilde{x} = Q_2 = \frac{۲+۳}{۲} = ۲/۵ \text{ میانه}$$

$$\hat{x} = ۱ \text{ مد}$$

تمرین ۵:

$$\bar{x} = ۱۵/۶۵ \rightarrow \frac{۱۷/۵ + ۱۹ + ۱۷ + ۱۶ + ۲۰ + ۱۶ + ۱۵ + ۱۸ + a + ۱۸}{۱۰} = ۱۵/۶۵$$

$$\rightarrow \frac{a + ۱۵۶/۵}{۱۰} = ۱۵/۶۵ \rightarrow a + ۱۵۶/۵ = ۱۵۶/۵ \rightarrow a = ۰$$

توجه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مطلقان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

$$\hat{x} = ۱۸ \text{ , } ۱۶ \text{ مد نمرات}$$

تمرین ۶:

$$\bar{x} = \frac{2 + 1/5 + 2/5 + 1/5 + 2 + 3 + 3}{7} = \frac{15/5}{7} = 2/21$$

تمرین ۷: برای اینکه شرکت بیمه کننده، ضرر نکند، میانگین مناسب است. ولی برای شخص بیمه شده، شاید میانه مناسب تر باشد.

تمرین ۸: گیریم که درصد فیزیک برابر k باشد، در این صورت: (اگر میانگین موزون به ۶۳ تبدیل شود).

$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} \rightarrow \frac{(4)(53) + (3)(k) + (1)(67) + (1)(34) + (4)(80) + (3)(67)}{4 + 3 + 1 + 1 + 4 + 3} = 63$$

$$\rightarrow \frac{212 + 3k + 67 + 34 + 320 + 201}{16} = 63 \rightarrow 834 + 3k = 1008$$

$$\rightarrow 3k = 174 \rightarrow k = 58$$

تمرین ۹:

$n = 5$ تعداد داده های قبلی

$$\sum x_i = n\bar{x} = 5 \times 17 = 85$$

$m = n + 2 = 7$ تعداد داده های جدید

$$\sum y_i = 85 + 17 + 11 = 113$$

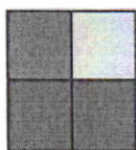
$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{m} = \frac{113}{7} = 16/14$$

نویسندگان:

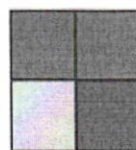
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

تمرین ۱۰:

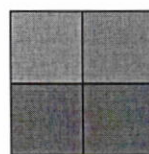


$$\begin{pmatrix} 470 & 580 \\ 690 & 690 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 470 & 470 \\ 580 & 690 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{470 + 470}{2} & \frac{580 + 470}{2} \\ \frac{690 + 580}{2} & \frac{690 + 690}{2} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 470 & 525 \\ 635 & 690 \end{pmatrix}$$



۹۱،۲