درس اوّل : ماتریس و اعمال روی ماتریس ها

در این فصل با مفهوم ماتریس و ویژگی های آن آشنا می شوید و در نهایت از این مفهوم برای حل دستگاه های معادلات خطی استفاده می کنیم.

مفهوم ماتریس

هر آرایش مستطیل شکل از اعداد ، در قالب سطر و ستون را یک ماتریس می‌نامند. هر ماتریس را با یک حرف بزرگ لاتین نامگذاری می‌کنند. مانند ماتریس زیر

$$M = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \text{ستون اوّل} & \text{ستون دوّم} & \text{ستون سوّم} \end{array} \end{array} \begin{array}{l} \text{سطر اوّل} \\ \text{سطر دوّم} \\ \ \end{array}$$

این ماتریس دارای دو سطر و سه ستون است[1]. در اصطلاح گویند این ماتریس دارای مرتبه‌ی 2×3 است[2]. هر یک از اعداد تشکیل دهنده‌ی ماتریس را درایه می‌نامند. اگر درایه k در سطر i و ستون j قرار دارد، می‌نویسند.

$$a_{ij} = k$$

مثلاً در ماتریس فوق می توان نوشت : $a_{23} = 1$ و $a_{12} = -3$ و $a_{22} = 0$ و $a_{21} = 3$

مثال : ماتریس مقابل را در نظر بگیرید. سپس :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

الف) مرتبه‌ی ماتریس را بنویسید.

ب) درایه‌ی واقع در سطر دوّم و ستون اوّل کدام است.

حل : الف) مرتبه‌ی ماتریس 4×2 است. ب) $a_{21} = 3$

---

[1] . سطر ها را از بالا به پایین و ستون ها را از چپ به راست شماره گذاری می کنند.

[2] . به طور کلی، اگر ماتریسی دارای m سطر و n ستون باشد. در این صورت گویند، ماتریس از مرتبه‌ی $m \times n$ است.

مثال : اگر i شماره‌ی سطر و j شماره‌ی ستون هر درایه باشند. ماتریس زیر را با درایه هایش بنویسید.

$$A=[i^2+3j]_{2\times 3}$$

حل :

$$A=[i^2+3j]_{2\times 3}=\begin{bmatrix} (1)^2+3(1) & (1)^2+3(2) & (1)^2+3(3) \\ (2)^2+3(1) & (2)^2+3(2) & (2)^2+3(3) \end{bmatrix}_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

تمرین۱ : اگر i شماره‌ی سطر و j شماره‌ی ستون هر درایه باشند. در هر مورد ماتریس داده شده را تشکیل دهید.

۱) $A=[3i+2j]_{2\times 2}$

۲) $B=[-ij]_{3\times 3}$

۳) $C=[3j]_{3\times 2}$

۴) $D=[2(-1)^{i+j}]_{3\times 3}$

***

ماتریس مربعی

اگر تعداد سطر و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، آن ماتریس را مربعی می‌نامند.

مانند ماتریس‌های زیر.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

هر ماتریس مربعی مانند یک چهارضلعی دارای دو قطر است. قطری که درایه هـای a_{ij} بـرای $i=j$ روی آن قرار دارند را قطر اصلی و دیگری را قطر فرعی می نامند.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

قطر فرعی   قطر اصلی

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

قطر فرعی   قطر اصلی

***

معرفی چند ماتریس خاص

۱) ماتریس سطری : ماتریسی است که فقط یک سطر دارد. مانند ماتریس زیر

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۱ & ۵ \end{bmatrix}_{۱\times ۴}$$

۲) ماتریس ستونی: ماتریسی است که فقط یک ستون دارد. مانند ماتریس زیر

$$B=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}_{۳\times ۱}$$

۳) ماتریس صفر : ماتریسی است که همه‌ی درایه‌های آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$O=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$$

در این فصل ماتریس صفر را با نماد O نمایش می دهیم.

۴) ماتریس قطری : یک ماتریس مربعی است که همه‌ی درایه های خارج از قطر اصلی آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

۵) ماتریس اسکالر : یک ماتریس قطری است که تمام درایه های روی قطر اصلی آن برابر باشند. مانند ماتریس های زیر

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

۶) ماتریس همانی (واحد): یک ماتریس مربعی می‌باشد که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن یک و بقیه‌ی درایه‌ها صفر هستند. مانند ماتریس زیر

$$I_{۳}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times ۳} \qquad I_{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۲}$$

۷) ماتریس پایین مثلثی: یک ماتریس مربعی است که تمام درایه های بالای قطر اصلی آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

۸) ماتریس بالا مثلثی : یک ماتریس مربعی است که تمام درایه های پایین قطر اصلی آن صفر باشند. مانند ماتریس زیر

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

***

ماتریس های مساوی

دو ماتریس را مساوی می گویند، هرگاه:

الف : هم مرتبه باشند.

ب : درایه های متناظر آنها نظیر به نظیر مساوی باشند.یعنی برای هر j و i

$$(A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij})$$

مثلاً: $$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

مثال : اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} x-y & ۹ \\ ۲ & z-۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & x+y \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ مساوی باشند. مقدار z و y و x را به دست آورید.

حل :

$$A=B \rightarrow \begin{cases} x-y=۳ \\ x+y=۹ \rightarrow x=۶\ ,\ y=۳\ ,\ z=۶ \\ z-۱=۵ \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۲ : عبارت زیر را کامل کنید

اگر ماتریس $\begin{bmatrix} n & m-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+n$ برابر با ..... است.

۳ : دو ماتریس زیر مساویند. مقدار b و a را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2a+b & 5 \end{bmatrix}$$

۴ : دو ماتریس زیر مساویند. مقدار y و x را تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & x+1 \\ 2 & 3 \\ 1 & y \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} 3 & y^2+1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

***

ضرب عدد در یک ماتریس : (ضرب اسکالر)

برای ضرب یک عدد در یک ماتریس کافی است آن عدد را درتمام درایه‌ها ضرب کنیم. برای مثال

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\to 2A=\begin{bmatrix} -2 & 6 & 10 \\ 4 & 0 & -14 \end{bmatrix}$$

اگر تمام درایه های یک ماتریس را در عدد ۱ − ضرب کنیم. ماتریس حاصل را ماتریس قرینه می نامند. بـه عبارتی ساده تر اگر تمام درایه‌های ماتریسی را قرینه کنیم ماتریس جدیدی بدست می‌آید که آن را مـاتریس قرینه می گویند. برای مثال

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$-A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ ماتریس قرینه

نتیجه : اگر B و A دو ماتریس هم مرتبه و s و r دو عدد حقیقی باشند. در این صورت :

الف) $A=B \rightarrow rA=rB$ ب) $rA=rB, r\neq ۰ \rightarrow A=B$

ج) $۱A=A$ د) $\circ\, A=O$

مثال : اگر r یک عدد حقیقی ناصفر و A و B دو ماتریس دلخواه هم مرتبه باشند.ثابت کنید که:

$$rA=rB \rightarrow A=B$$

حل: چون $r\neq ۰$ پس $\frac{۱}{r}$ وجود دارد بنابراین:

$$rA=rB \rightarrow \frac{۱}{r}(rA)=\frac{۱}{r}(rB) \rightarrow (\frac{۱}{r}r)A=(\frac{۱}{r}r)B \rightarrow ۱A=۱B \rightarrow A=B$$

***

اعمال روی ماتریس ها

در ادامه اعمال روی ماتریس ها را معرفی می کنیم.

الف : جمع ماتریس‌ها

دو ماتریس را وقتی می‌توان جمع کرد که هم مرتبه باشند. در این صورت درایه‌های نظیر به نظیر با هم جمع می‌شوند. برای مثال

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & -۷ \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A+B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & -۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۷ \\ ۱ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

ب : تفاضل ماتریس‌ها

برای تفاضل دو ماتریس کافی است ماتریس اولی را با قرینه‌ی دومی جمع کنیم.

$$A-B=A+(-B)$$

برای مثال

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ & -۱ & -۲ \\ ۱ & -۳ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & ۲ & ۳ \\ ۳ & -۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

تمرین۵ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$ مطلوبست تعیین

الف) $۲A$ ب) $A+۲B$ ج) $۲A-۳B$ د) $A-B+C$

نتیجه :

۱) حاصل جمع هر ماتریس با ماتریس صفر هم مرتبه اش، برابر همان ماتریس است.

$A+O=A$

۲) حاصل جمع هر ماتریس با ماتریس قرینه اش، برابر ماتریس صفر است. (ماتریس صفر، ماتریس خنثی در جمع ماتریس ها است.)

$A+(-A)=O$

۳) جمع ماتریس ها خاصیت جابجایی دارد.

$A+B=B+A$

۴) جمع ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

$A+(B+C)=(A+B)+C$

۵) ضرب مجموع دو عدد حقیقی در یک ماتریس

$(r+s)A=rA+sA$

۶) ضرب یک عدد حقیقی در مجموع دو ماتریس

$r(A+B)=rA+rB$

۷) ضرب ماتریس در حاصل ضرب دو عدد

$(rs)A=r(sA)$

مثال : نشان دهید که قانون حذف در جمع ماتریس ها برقرار است. یعنی اگر C و B و A سه ماتریس هم مرتبه باشند. از تساوی $A+B=A+C$ می توان ثابت کرد $B=C$

حل: فرض کنید C و B و A سه ماتریس هم مرتبه باشند، نشان می دهیم که اگر

$A+B=A+C\rightarrow B=C$

برای این کار کافی است طرفین تساوی $A+B=A+C$ را با $-A$ جمع کنیم.

$-A+(A+B)=-A+(A+C)\rightarrow(-A+A)+B=(-A+A)+C$

$\rightarrow O+B=O+C\rightarrow B=C$

***

ج : ضرب ماتریس ها :

دو ماتریس را وقتی می‌توان در هم ضرب کرد که تعداد ستون های اوّلی برابر تعداد سطر های دوّمی باشد. در این صورت هر درایه‌ی ماتریس حاصل ضرب را به شکل ضرب داخلی[۳] تعیین می‌کنیم.

مثال ۱ :

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}_{۳\times۴} = \begin{bmatrix} ۱۲ & ۱۳ & ۵ & ۳ \\ ۱۸ & ۲۳ & ۱۹ & ۵ \end{bmatrix}_{۲\times۴}$$

مثال ۲ :

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}_{۲\times۳} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}_{۳\times۲} = \begin{bmatrix} ۲۴ & ۱۱ \\ ۳۷ & ۲۳ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

تذکر ۱ : ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد. زیرا اگر $A\times B$ تعریف می شود، ممکن است $B\times A$ قابل تعریف نباشد و ممکن است قابل تعریف باشد ولی حاصل برابر $A\times B$ نشود.

به نمونه های زیر توجه کنید.

نمونه‌ی اوّل :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲} \times \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & -۲ \\ ۴ & -۲ & -۲ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

---

[3] . بدین شکل که برای تعیین درایه‌ی a_{ij} در ماتریس حاصل ضرب ، ابتدا درایه های نظیر سطر i ماتریس اوّل را در ستون j ماتریس دوّم را ضرب کرده و سپس حاصل ضرب ها را با هم جمع می کنیم.

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲}=$$ تعریف نمی شود.

نمونه‌ی دوّم :

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲}\times\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱۱ \\ ۴ & ۱۶ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۲}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۴ & ۸ \\ ۷ & ۱۵ \end{bmatrix}_{۲\times۲}$$

$$\rightarrow A\times B\neq B\times A$$

تمرین۶ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۵ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس های زیر را در صـورت امکـان بدسـت آورید.

الف) $A\times B=$ ب) $B\times A=$ ج) $A^{۲}=$

تذکر ۲ : ضرب ماتریس ها خاصیت شرکت پذیری دارد.

$$A(BC)=(AB)C$$

تذکر ۳ : ضرب ماتریس ها نسبت به جمع آنها توزیع پذیر است.

$$A(B+C)=AB+AC$$

تذکر۴ : اگر A یک ماتریس مربعی I ماتریس همانی و r یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشند. در این صورت:

۱) $A^{۱}=A$ ۲) $A^{n}=A^{n-۱}\times A$ ۳) $I^{n}=I$ ۴) $(rA)^{n}=r^{n}A^{n}$

تذکر ۵ : خاصیت توزیعی پذیری ضرب ماتریس ها نسبت به جمع ماتریس ها

یعنی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ و $C=[c_{ij}]_{n\times p}$ سه ماتریس باشند.در این صورت

$$A(B+C)=AB+AC$$

تذکر۶ : خاصیت ضرب یک ماتریس در ماتریس واحد هم مرتبه‌ی آن

یعنی اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی n باشد. در این صورت: $AI_n = I_n A = A$

به همین دلیل در اصطلاح گفته می شود که ماتریس واحد، ماتریس خنثی در ضرب ماتریس ها است.

تذکر۷ : خاصیت ضرب دو ماتریس دارای ضریب

یعنی اگر $A=[a_{ij}]_{m\times p}$ و $B=[b_{ij}]_{p\times n}$ دو ماتریس و r و s دو عدد حقیقی باشند. در این صورت

$$(rA)(sB)=rs(AB)$$

توجه ۱: ممکن است حاصل ضرب دو ماتریس، ماتریس صفر باشد، ولی هیچکدام از ماتریس ها صفر نباشند.

$$AB=O \nRightarrow A=O \quad \vee \quad B=O$$

مثال : دو ماتریس زیر صفر نیستند ولی حاصل ضرب آنها ماتریس صفر است.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=O$$

توجه ۲ : قاعده‌ی حذف در ضرب ماتریس ها بر قرار نمی باشد.

$$AB=AC \nRightarrow B=C$$

مثال : اگر $C=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ بدیهی است که تساوی $AB=AC$ برقرار است ولی $B\neq C$

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}$ در این صورت ثابت کنید که $A^۶=۶۴I$

حل:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۶ \\ -۲ & -۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}=۴\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=۴I$$

$$\Rightarrow A^۶=(A^۲)^۳=(۴I)^۳=۶۴I^۳=۶۴I$$

ترانهاده‌ی یک ماتریس

اگر جای سطر ها و ستون های یک ماتریس را جا به جا کنیم، ماتریس دیگری حاصل می شود که آنرا ماتریس ترانهاده می نامند.

$$A=[a_{ij}]_{m\times n} \to A^t=[b_{ij}]_{n\times m}$$
$$a_{ij}=b_{ji}$$

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ در این صورت ترانهاده‌ی ماتریس A را بنویسید.

حل :

$$A^t=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times۳}$$

تمرین ۷ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $A^۲-A^t+I_۲$ را بدست آورید.

توجه : اگر B و A دو ماتریس و r یک عدد حقیقی باشند. در صورتی که شرایط جمع و ضرب ماتریس ها برقرار باشد، داریم:

۱) $(A+B)^t=A^t+B^t$

۲) $(rA)^t=rA^t$

۳) $(AB)^t=B^tA^t$

۴) $(A^t)^t=A$

۵) $(A^t)^n=(A^n)^t$

تمرین ۸ : تساوی مقابل را ثابت کنید.

$$(AB^t-BA^t)^t=BA^t-AB^t$$

تمرین برای حل :

۹ : اگـر $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $D=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ حاصـل عبـارت های زیر را در صورت امکان به دست آورید.

الف) $3A=$ ج) $A\times C$ هـ) $A\times B$

ب) $B+D=$ د) $B-D$ و) $B\times D$

۱۰ : اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس های زیر را بیابید.

الف) $(A+B)\times(A-B)$ ب) $(A+B)^2$ ج) $(A^t+B)\times(A+B^t)$

۱۱ : اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ حاصل عبارت A^2-3A+I_2 را بدست آورید.

۱۲ : اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس $A^2+AB+2B$ را بیابید.

۱۳ : اگر $A=\begin{bmatrix} mn & n^2 \\ -m^2 & -mn \end{bmatrix}$ نشان دهید که $A^2=O$

۱۴ : اگـر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ مـاتریس $A\times B\times C$ را بدسـت آورید.

۱۵ : اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ نشان دهید که

$$A(B+C)=AB+AC$$

۱۶: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس A^3 را تعیین کنید.

۱۷ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ ماتریس $A^{۷}$ را به دست آورید.

۱۸ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۳ \\ ۵ & ۲ & ۶ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$ نشان دهید که $A^{۳}=O$

۱۹: دو ماتریس مربعی مرتبه‌ی۳ مثال بزنید که هیچکدام ماتریس صفر نباشند ولی حاصل ضرب آنها ماتریس صفر است.

۲۰ : مقادیر b و a را طوری پیدا کنید که $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۲ & ۳ & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ b \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$

۲۱ : ماتریس X را طوری بیابید که $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}X=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۷ & ۰ \end{bmatrix}$

۲۲: معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & y \\ x & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ را حل کنید.

توجه : در حالت های خاص می توان ماتریس A^n را بطور مستقیم تعیین کرد. برای مثال :

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{bmatrix} ۲^n & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow B^n=\begin{bmatrix} n+۱ & -n \\ n & -n+۱ \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow C^n=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲n & ۱ \end{bmatrix}$$

۲۳ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ماتریس $A^{۲۰۰۶}$ را تعیین کنید.

۲۴ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ در این صورت ماتریس $(A^{۲}+AB+۲B)^{۱۰۰}$ را بیابید.

۲۵ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ مقادیر b و a را طوری به دست آورید که $A\times B$ یک ماتریس قطری باشد.

۲۶ : اگر $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & ۰ & ۰ \\ ۰ & a_{۲۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد و B یک ماتریس مربعی مرتبه ۳ و دلخواه باشد، در این صورت حاصل $A\times B$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۲۷ : اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$. حاصل $A^۳$ را به دست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۲۸ : اگر B و A دو ماتریس مربعی هم مرتبه و $A\times B=B\times A$ (تعویض پذیر) باشند. ثابت کنید.

الف) $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$

ب) $(A-B)(A+B)=A^۲-B^۲$

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی:

@amerimath

سایت :

www.mathtower.ir

درس دوّم : وارون ماتریس و دترمینان

در این درس ابتدا به مفهوم دترمینان یک ماتریس مربعی را پرداخته و در ادامه مفهوم وارون یک ماتریس مربعی را بیان می کنیم. در انتها کاربردهایی از این دو مفهوم را خواهیم داشت.

دترمینان ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی مانند A عددی به نام دترمینان آن ماتریس نسبت داده می شود. دترمینان ماتریس مربعی A را با نماد $|A|$ یا $\det(A)$ نمایش می دهند و با توجه به مرتبه‌ی ماتریس به روشی خاص بدست می آورند. در اینجا فقط دترمینان ماتریس های مربعی مرتبه‌ی ۲×۲ و ۳×۳ را معرفی می کنیم.

الف : دترمینان ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۲×۲

طبق تعریف دترمینان ماتریس ۲×۲ با تفاضل حاصل ضرب درایه های قطر فرعی از حاصل ضرب درایه های قطر اصلی بدست می آید.

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A|=ad-bc$$

مثال : دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

حل :

$$|A|=(-۱)(۴)-(۳)(۲)=-۴-۶=-۱۰$$

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} |A| & ۴|A| \\ ۶ & |A|^۲ \end{bmatrix}$. در این صورت مقدار $|A|$ را به دست آورید.

حل : فرض کنیم که $|A|=d$ باشد. در این صورت :

$$d=d^۳-۲۴d \rightarrow d^۳-۲۵d=۰ \rightarrow d(d^۲-۲۵)=۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} d=۰ \\ d^۲-۲۵=۰ \rightarrow d=\pm ۵ \end{cases}$$

تمرین برای حل:

۱ : دترمینان ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix} -۳ & ۴ \\ -۶ & -۸ \end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

۲ : معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix} x & ۲-x \\ -۳ & x-۲ \end{vmatrix}=۰$$

۳ : دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

۴ : برای دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ درستی یا نادرستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $|A+B|=|A|+|B|$ ب) $|AB|=|A||B|$

***

ماتریس کهاد (مینور) یک درایه در ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی، ماتریسی که از حذف سطر iام و ستون j ام بدست می آید را کهاد درایه‌ی a_{ij} نامند و آنرا با M_{ij} نمایش می دهند.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۵ & -۳ \\ ۲ & ۷ & -۴ \end{bmatrix}$ در این صورت:

$$M_{۱۱}=\begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ ۷ & -۴ \end{bmatrix} \quad و \quad M_{۲۳}=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

***

همسازه‌ی (کوفاکتور) یک درایه در ماتریس مربعی

برای هر ماتریس مربعی همسازه ی درایه‌ی a_{ij} عددی است که به شکل زیر بدست می آید.

$$A_{ij}=(-۱)^{i+j}\,|M_{ij}|$$

مثال: همسازه‌ی درایه‌ی سطر دوّم و ستون سوّم ماتریس زیر به صورت زیر است.

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

حل :

$$A_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}\,|M_{۲۳}|=(-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}=-(۱-۴)=۳$$

***

ب : روش های محاسبه‌ی دترمینان ماتریس ۳×۳

در این قسمت روش های محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس ۳×۳ را بیان می کنیم.

روش اوّل : محاسبه‌ی دترمینان ماتریس ۳×۳ به روش بسط

با توجه به درایه های یک سطر(یا یک ستون) دلخواه و کهاد آنها می توان دترمینان یک مـاتریس ۳×۳ را محاسبه کرد.

فرض کنید: $A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$ در این صورت:

بسط نسبت به یک سطر دلخواه $\quad (\,i=۱$ یا $i=۲$ یا $i=۳\,) \quad |A|=\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij}A_{ij}$

بسط نسبت به یک ستون دلخواه $\quad (\,j=۱$ یا $j=۲$ یا $j=۳\,) \quad |A|=\sum_{i=۱}^{۳} a_{ij}A_{ij}$

مثال: بسط نسبت به سطر اوّل $i=۱$

$$|A|=a_{۱۱}A_{۱۱}+a_{۱۲}A_{۱۲}+a_{۱۳}A_{۱۳}$$

این روش محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس مربعی را روش بسط نسبت به یک سطر یا ستون یا بـه اختـصار **روش بسط**[1] می نامند.

مثال : دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

حل : کافی است یک سطر یا یک ستون دلخواه را انتخاب نموده و نسبت به آن بسط می دهیم.

مثلاً سطر سوّم

$$|A|=(-۱)(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۲ & -۳ \end{vmatrix}+(۱)(-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & -۳ \end{vmatrix}+(۳)(-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$|A|=(-۱)(۱)(-۶-۱۰)+(۱)(-۱)(-۹-۵)+(۳)(۱)(۶-۲)$$

$$|A|=۱۶+۱۴+۱۲=۴۲$$

مثال: دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

حل : به جهت وجود صفر های بیشتر، نسبت به سطر اوّل بسط می دهیم. لذا:

$$|A|=۱(-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}=۴+۱=۵$$

مثال : دترمینان ماتریس زیر را به کمک بسط به دست آورید. با مشاهده‌ی حاصل چه نتیجه ای می گیرید؟

[1] . الف : در روش بسط بهتر است سطر یا ستونی را انتخاب کنیم که صفر های بیشتری داشته باشد.
ب : محاسبه‌ی دترمینان های ماتریس مربعی مرتبه‌ی۴ و بالاتر نیز به همین شکل انجام می شود که جزء هدف کتاب نمی باشد.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

حل : بسط نسبت به سطر سوّم

$$|A|=(-۱)^{۳+۱}x\begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix}+(-۱)^{۳+۲}y\begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix}+(-۱)^{۳+۳}z\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow |A|=x(bc-bc)-y(ac-ac)+z(ab-ab)=۰$$

نتیجه : اگر درایه های دو سطر یا دو ستون یک ماتریس مربعی، نظیر به نظیر مساوی باشند، دترمینان آن ماتریس برابر صفر است.

تمرین برای حل :

۵ : ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

الف) دترمینان این ماتریس را به کمک بسط نسبت به یک سطر دلخواه بدست آورید.

ب) دترمینان این ماتریس را به کمک بسط نسبت به یک ستون دلخواه بدست آورید.

۶ : به کمک بسط نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$B=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۱ & b & ۰ \\ ۳ & -۵ & c \end{bmatrix}$$

۷ : به کمک بسط نسبت به یک سطر یا ستون دلخواه دترمینان ماتریس زیر را بدست آورید.

$$C=\begin{bmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{bmatrix}$$

با مشاهده‌ی حاصل ، در مورد دترمینان یک ماتریس قطری چه نتیجه ای می گیرید؟ آیا این نتیجه برای ماتریس های مربعی بالا مثلثی و پایین مثلثی قابل بیان است.

۸ : دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید.

$$A=۴\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۵}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$$

۹ : یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳ بنویسید که دترمینان آن ۶ باشد.

۱۰ : یک اگر ماتریس مربعی مرتبه‌ی۳ مانند A بنویسید که دترمینان آن ۶- باشد. سپس $A^{۲}$ را محاسبه کنید. با محاسبه‌ی $|A^{۲}|$ و مقایسه‌ی آن با $|A|$ چه نتیجه ای می گیرید؟

***

روش دوّم : محاسبه‌ی دترمینان های ماتریس ۳×۳ به روش ساروس

ابتدا ماتریس را دو بار کنار هم می نویسیم. سپس با توجه به شکل زیر حاصل ضرب های درایه هـای روی خط ها را محاسبه و مطابق شکل جمع و تفریق می کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$|A|=(a_{۱۱}a_{۲۲}a_{۳۳}+a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱}+a_{۱۳}a_{۲۱}a_{۳۲})-(a_{۱۱}a_{۲۳}a_{۳۲}+a_{۱۲}a_{۲۱}a_{۳۳}+a_{۱۳}a_{۲۲}a_{۳۱})$$

مثال: دترمینان ماتریس زیر را به کمک قاعده‌ی ساروس تعیین کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

حل :

$$\begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۲ \\ ۴ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$|A|=(۳)(۲)(۴)+(۵)(۳)(-۱)+(۲)(۴)(۲)-(۳)(۳)(۲)-(۵)(۴)(۴)-(۲)(۲)(-۱)$$

$$|A|=۲۴-۱۵+۱۶-۱۸-۸۰+۴=-۶۹$$

تمرین برای حل :

۱۱ : به روش ساروس دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

۱۲ : اگر $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ به کمک قاعده‌ی ساروس نشان دهید که

$$|A|=۳abc-(a^۳+b^۳+c^۳)$$

۱۴ : به کمک قاعده‌ی ساروس ثابت کنید که

$$\begin{vmatrix} ۰ & a & b \\ a & ۰ & c \\ b & c & ۰ \end{vmatrix}=۲abc$$

۱۵ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ در این صورت $|AB|$ و $|BA|$ را به دست آورید.

۱۶ : اگر $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۵ \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^۲|$ را به دست آورید.

۱۷ : ماتریس های $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف : حاصل $|A|$ و $|B|$ را به دست آورید.

ب : با مقایسه‌ی حاصل دترمینانهای بدست آمده برای ماتریس های فوق، چه نتیجه ای می گیرید.

***

ویژگی های دترمینان یک ماتریس مربعی

در محاسبه‌ی دترمینان یک ماتریس به کمک بسط نسبت به یک سطر یا یک ستون با ویژگی هـای جـالبی برخورد می کنیم. این ویژگی ها عبارتند از:

ویژگی اوّل: دترمینان هر ماتریس بالا مثلثی ، پایین مثلثی و قطری برابر با حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن است.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۱ & b & ۰ \\ ۳ & -۵ & c \end{vmatrix} = abc$$

ویژگی دوّم : هرگاه تمام درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی برابر صفر باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۵ \\ ۳ & ۰ & ۷ \end{vmatrix} = ۰$$

ویژگی سوّم : هرگاه تمام درایه های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی در عدد ثابت k ضرب شوند.آنگاه دترمینان آن ماتریس k برابر می شود.

مثالاً:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱۰ & ۲۰ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۵(-۲) & ۵(۴) & ۵(۱) \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{\frac{۱}{۵}R۲\to R۲}{=} ۵\times\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix}$$

نتیجه : اگر A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد. در این صورت: $|rA|=r^n|A|$

ویژگی چهارم : اگر در یک ماتریس مربعی جای دو سطر یا دو ستون را جابجا کنیم، دترمینان آن در عدد (۱-) ضرب می شود.

مثالاً:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۲ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{R۱\leftrightarrow R۳}{=} -\begin{vmatrix} ۳ & ۹ & ۷ \\ -۱ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{vmatrix}$$

ویژگی پنجم : اگر در یک ماتریس مربعی دو سطر یا دو ستون مساوی باشند، دترمینان آن ماتریس صفر است.

مثالاً:

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{R۱=R۲}{=} ۰$$

ویژگی ششم : اگر در یک ماتریس مربعی یک سطر یا یک ستون ضریبی از یک سطر یا ستون دیگر باشد، دترمینان آن صفر است.

مثالاً:

$$\begin{vmatrix} -۱ & -۳ & ۲ \\ -۱ & -۳ & ۵ \\ ۳ & ۹ & ۷ \end{vmatrix} \overset{۳C۱=C۲}{=} ۰$$

ویژگی هفتم : اگر در یک ماتریس مربعی مضربی از یک سطر یا یک ستون را به سطر یا ستون دیگر اضافه کنیم،دترمینان آن تغییر نمی کند.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} \overset{۳R_۲+R_۱\to R_۱}{=} \begin{vmatrix} -۲ & ۹ & ۸ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix}$$

ویژگی هشتم : دترمینان هر ماتریس مربعی و دترمینان ترانهاده اش با هم برابرند. $|A^t|=|A|$

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۵ & ۷ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۰ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۲ & ۷ \end{vmatrix}$$

ویژگی نهم : دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس مربعی هم مرتبه با حاصل ضرب دترمینان های آنها برابر است.

$$|AB|=|A||B|$$

توجه : این ویژگی فقط برای ضرب ماتریس ها برقرار است ولی برای جمع یا دو تفاضل دو ماتریس مربعی هم مرتبه برقرار نمی باشد.یعنی:

$$|A+B|\neq|A|+|B|$$
$$|A-B|\neq|A|-|B|$$

ویژگی دهم : برای هر ماتریس مربعی A داریم:

$$|A^k|=|A|^k$$

ویژگی یازدهم: اگر تمام درایه های یک سطر یا یک ستون به صورت دو یا چند جمله ای باشند،آنگاه دترمینان این ماتریس را می توان به صورت مجموع چند دترمینان نوشت.

مثلاً:

$$\begin{vmatrix} a_۱+b_۱ & a_۲+b_۲ & a_۳+b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \\ d_۱ & d_۲ & d_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \\ d_۱ & d_۳ & d_۳ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ c_۱ & c_۲ & c_۳ \\ d_۱ & d_۲ & d_۳ \end{vmatrix}$$

توجه : به کمک ویژگی دترمینان می توان دترمینان یک ماتریس مربعی را نیز محاسبه کرد. این ویژگی ها بخصوص برای محاسبه‌ی دترمینان بدون استفاده از بسط بکار گرفته می شوند. به مثال های زیر توجه کنید.

مثال : بدون بسط دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = ?$$

حل:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} \underset{2R_1+R_3 \to R_3}{\overset{3R_1+R_2 \to R_2}{=}} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)(1)(10) = -10$$

مثال : بدون بسط ثابت کنید که $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5$

حل:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{2R_1+R_2 \to R_2}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-5) = 5$$

مثال: بدون بسط دترمینان تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix} = 0$$

حل:

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1+C_3 \to C_3}{=} \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \sin^2 y + \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \sin^2 z + \cos^2 z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & 1 \\ \sin^2 y & 1 & 1 \\ \sin^2 z & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2 = C_3}{=} 0$$

مثال : اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی۳ و $|A|=۵$ باشد. در این صورت $||A|A|$ را بیابید.

حل :

$$|A|=۵ \to ||A|A|=|۵A|=۵^۳|A|=۵^۳\times ۵=۵^۴=۶۲۵$$

تمرین برای حل :

۱۸: به کمک ویژگی های دترمینان، دترمینان ماتریس های زیر را محاسبه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ \\ ۱ & ۲ & -۳ \\ -۱ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$

۱۹: در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

اگر A ماتریسی ۳×۳ و اسکالر باشد و $a_{۲۲}=۵$، در این صورت $|۲A|$ برابر ..... است.

***

ماتریس الحاقی

متناظر با هر ماتریس مربعی مانند A می توان ماتریس دیگری نظیر کرد. این ماتریس را ماتریس الحاقی می نامند[2]. روش تعیین ماتریس الحاقی با توجه به مرتبه‌ی ماتریس متفاوت است. در اینجا فقط ماتریس الحاقی ماتریس های مربعی ۲×۲ و ۳×۳ را معرفی می کنیم.

توجه : ماتریس الحاقی ماتریس A را با نماد A^* نمایش می دهند.

الف : ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲

ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲ از تعویض درایه های روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی بدست می آید.

برای مثال ماتریس الحاقی ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می شود $A^*=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

مثال : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$

[2] . ترانهاده‌ی ماتریس همسازه ی هر ماتریس مربعی را ماتریس الحاقی آن می گویند.

الف : دترمینان ماتریس A را محاسبه کنید.　　　　ب : ماتریس الحاقی A را به دست آورید.

حل :

الف :

$$|A| = (۲)(۵) - (-۲)(۳) = ۱۰ + ۶ = ۱۶$$

ب :

$$A^* = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

ب : ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۳×۳

ترانهاده‌ی ماتریس همسازه‌ی هر ماتریس مربعی را ماتریس الحاقی آن می گویند و آنرا با A^* نمـایش مـی دهند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix} \to N = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} & A_{۱۳} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} & A_{۲۳} \\ A_{۳۱} & A_{۳۲} & A_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$\to A^* = N^t = \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳} \end{bmatrix}$$

مثال: ماتریس الحاقی ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$A_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲}|M_{۱۲}| = -\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = -۶ \qquad A_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱}|M_{۱۱}| = \begin{vmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۱$$

$$A_{۲۱} = (-۱)^{۲+۱}|M_{۲۱}| = -\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۴ \qquad A_{۱۳} = (-۱)^{۱+۳}|M_{۱۳}| = \begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۲$$

$$A_{۲۳} = (-۱)^{۲+۳}|M_{۲۳}| = -\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = -۱ \qquad A_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲}|M_{۲۲}| = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = ۳$$

$$A_{۳۱}=(-۱)^{۳+۱}|M_{۳۱}|=\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & -۱\end{vmatrix}=۱ \qquad A_{۳۲}=(-۱)^{۳+۲}|M_{۳۲}|=-\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & -۱\end{vmatrix}=۳$$

$$A_{۳۳}=(-۱)^{۳+۳}|M_{۳۳}|=\begin{vmatrix}۱ & -۱\\ ۲ & ۰\end{vmatrix}=۲$$

$$\Rightarrow A^{*}=N^{t}=\begin{bmatrix}A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱}\\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲}\\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۴ & ۱\\ -۶ & ۳ & ۳\\ ۲ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$$

توجه : این روش برای محاسبه‌ی ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲ نیز درست است.

مثال : ماتریس الحاقی ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ را بدست آورید.

حل:

$$A_{۱۱}=(-۱)^{۱+۱}|M_{۱۱}|=d \qquad A_{۱۲}=(-۱)^{۱+۲}|M_{۱۲}|=-c$$

$$A_{۲۱}=(-۱)^{۲+۱}|M_{۲۱}|=-b \qquad A_{۲۲}=(-۱)^{۲+۲}|M_{۲۲}|=a$$

$$\Rightarrow A^{*}=N^{t}=\begin{bmatrix}A_{۱۱} & A_{۲۱}\\ A_{۱۲} & A_{۲۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

بنابراین همانطور که قبلاً اشاره شد، ماتریس الحاقی ماتریس مربعی ۲×۲ از تعویض درایه هـای روی قطـر اصلی و قرینه کردن درایه های روی قطر فرعی بدست می آید.

تمرین برای حل :

۲۰: ماتریس الحاقی ماتریس زیر را محاسبه کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

***

ماتریس های معکوس پذیر

دو ماتریس مربعی را معکوس (وارون) همدیگر گویند، هرگاه حاصل ضرب آنها ماتریس واحد باشد.

$$AB = BA = I$$

مثال : نشان دهید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است.

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

تمرین برای حل :

۲۱ : نشان دهید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$ است.

اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد.در این صورت وارون آن را به شکل A^{-1} نمایش می دهند. ثابت می شود که

۱ : وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر بفرد است.[3]

۲ : یک ماتریس مربعی وارون پذیر است، اگر و تنها اگر دترمینان آن مخالف صفر باشد.

۳ : برای هر ماتریس مربعی مانند A همواره داریم: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^{*}$

[3] . برای اثبات این موضوع فرض می کنیم که ماتریس معکوس پذیر A دارای دو معکوس C و B باشد. ثابت می کنیم که ایـن دو معکوس مساویند.

$$AB = BA = I \ , \quad AC = CA = I$$
$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

مثال: معکوس ماتریس های زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix}$

حل :

الف:

$A=\begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۲۰-۲۱=-۱ \neq ۰ \quad \rightarrow$ لذا ماتریس A معکوس پذیر است.

$$A^{*}=\begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times A^{*}=\frac{۱}{-۱}\times\begin{bmatrix} ۴ & -۷ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & ۷ \\ ۳ & -۵ \end{bmatrix}$$

ب:

$B=\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix} \rightarrow |B| = ۱۲-۱۲=۰ \quad \rightarrow$ لذا ماتریس B معکوس پذیر نیست.

نتیجه : اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس مربعی مرتبه‌ی دو و $|A|\neq ۰$ باشد، در این صورت این ماتریس معکوس پذیر راست و معکوس آن یعنی $A^{-۱}$ به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\times\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال : معکوس ماتریس زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

حل:

$A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ۹ \neq ۰$ لذا ماتریس A معکوس پذیر است.

$$A_{۱۱}=(-۱)^{۱+۱}|M_{۱۱}|=\begin{vmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=۱ \qquad A_{۱۲}=(-۱)^{۱+۲}|M_{۱۲}|=-\begin{vmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix}=-۶$$

$$A_{۱۳}=(-۱)^{۱+۳}|M_{۱۳}|=\begin{vmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۲ \qquad A_{۲۱}=(-۱)^{۲+۱}|M_{۲۱}|=-\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}=۴$$

$$A_{۲۲}=(-۱)^{۲+۲}|M_{۲۲}|=\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix}=۳ \qquad A_{۲۳}=(-۱)^{۲+۳}|M_{۲۳}|=-\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}=-۱$$

$$A_{۳۱}=(-۱)^{۳+۱}|M_{۳۱}|=\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & -۱ \end{vmatrix}=۱ \qquad A_{۳۲}=(-۱)^{۳+۲}|M_{۳۲}|=-\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}=۳$$

$$A_{۳۳}=(-۱)^{۳+۳}|M_{۳۳}|=\begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{vmatrix}=۲$$

$$\Rightarrow A^*=N^t=\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ \\ -۶ & ۳ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{|A|}\times A^*=\frac{۱}{۹}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۱ \\ -۶ & ۳ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۹} & \frac{۴}{۹} & \frac{۱}{۹} \\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{۲}{۹} & -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹} \end{bmatrix}$$

تمرین۲۲ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

نتیجه : اگر A یک ماتریس مربعی وارون پذیر باشد. در این صورت:

$$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|} \quad \text{و} \quad |A|=\frac{۱}{|A^{-۱}|}$$

مثال : اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۶ & -۷ \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس A را تعیین کنید.

حل:

$$|A|=\frac{۱}{|A^{-۱}|}=\frac{۱}{(۲)(۶)-(۳)(-۷)}=\frac{۱}{۳۳}$$

تمرین۲۳ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $(AB)^{-۱}$ ب) $A^{-۱}B^{-۱}$ ج) $B^{-۱}A^{-۱}$

نتیجه : اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و معکوس پذیر باشند. در این صورت

$$(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$$

تمرین برای حل :

۲۴ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$ ماتریس های زیر را بدست آورید.

الف) $A^{-۱}$ ب) B^{*} ج) $A^{-۱}+B^{*}+I_{۲}$ د) $(A^{-۱})^{-۱}$

۲۵ : اگر $A=\begin{bmatrix} \log ۵ & \log ۲ \\ \log ۲ & \log ۵ \end{bmatrix}$. نشان دهید که : $|A|=\log ^{\frac{۵}{۲}}$

۲۶ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس $(A^{-۱})^{۲}$ را تعیین کنید.

۲۷ : $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & -۱ \end{bmatrix}$. ثابت کنید که $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$

۲۸ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد. حاصل عبارت های زیر را بیابید.

الف) $(A+B)^{-۱}$ ب) $A^{-۱}+B^{-۱}$

۲۹ : اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد. حاصل عبارت $۲A^{-۱}-۳B^{-۱}$ را بیابید.

۳۰ : مقدار m را چنان بیابید که ماتریس زیر وارون پذیر نباشد.

$$A=\begin{bmatrix} ۲m+۱ & ۵ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

۳۱ : معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ را در صورت وجود بدست آورید.

حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با استفاده از وارون ماتریس

به کمک ماتریس و دترمینان دستگاه های معادلات خطی را به روش های جالبی به غیر از روش های معمول می توان حل کرد. در این فصل به این روش های اشاره می کنیم.

دستگاه دو معادله ی دو مجهولی

هر دستگاه به شکل $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

را دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی می نامند که می توان آنرا به شکل زیر نیز نوشت:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_{D}$$

ماتریس A را ماتریس ضرایب و ماتریس X را ماتریس مجهولات و ماتریس D را ماتریس معلومات می نامند. از طرفی بدیهی است که

$$AX=D$$

$$\rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}D \rightarrow I\,X=A^{-1}D \rightarrow X=A^{-1}D$$

مثال: دستگاه زیر را به روش ماتریسی نمایش دهید.

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=-2 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

نتیجه : شرط اینکه دستگاه جواب داشته باشد این است که دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر نباشد. یعنی:

$$|A|\neq 0$$

***

روش های حل دستگاه های دو معادله‌ی دو مجهولی

در دروس ریاضی پایه های قبل، با روش های حذفی، جانشانی و روش قیاسی به عنوان روش های حل دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی آشنا شده اید. در اینجا به روش های دیگری برای حل این دستگاه اشاره می کنیم.

الف : روش حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با استفاده از دترمینان

اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی باشد. می توان آنرا به روش زیر حل کرد. این روش را **روش کرامر** می نامند.

$$x=\frac{|A_۱|}{|A|} \quad \text{و} \quad y=\frac{|A_۲|}{|A|}$$

که $A_۱$ از تعویض ستون ماتریس معلومات با ستون اوّل ماتریس ضرایب و $A_۲$ از تعویض ستون ماتریس معلومات با ستون دوم ماتریس ضرایب بدست می آیند.

مثال: دستگاه زیر را به روش کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} ۲x+y=۵ \\ x-y=-۲ \end{cases}$$

حل: لذا دستگاه جواب دارد.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \rightarrow |A|=-۲-۱=-۳\neq ۰$$

$$x=\frac{|A_۱|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} ۵ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}}=\frac{-۵+۲}{-۲-۱}=۱$$

$$y=\frac{|A_۲|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & -۲ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}}=\frac{-۴-۵}{-۲-۱}=۳$$

ب : روش حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی با استفاده ماتریس معکوس

در این روش دستگاه را به شکل $X=A^{-1}D$ تبدیل می کنیم و در صورت وجود جواب مقـدار مجهـولات آنرا تعیین می کنیم.

مثال : دستگاه های زیر را به روش ماتریس معکوس حل کنید.

الف) $\begin{cases}2x+y=5\\ x-y=-2\end{cases}$ ب) $\begin{cases}-2x+y=5\\ 4x-2y=3\end{cases}$

حل:

الف:

لذا دستگاه جواب دارد. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\rightarrow |A|=-2-1=-3\neq 0$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^{*}=\frac{1}{-3}\times\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}D\rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=3\end{cases}$$

ب:

لذا دستگاه جواب ندارد. $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\rightarrow |A|=4-4=0$

تمرین برای حل :

۳۲ : هر یک از دستگاه های زیر را به دو روش بیان شده حل کنید.

الف) $\begin{cases}2x+y=4\\ 7x+4y=15\end{cases}$ ب) $\begin{cases}3x-4y=1\\ -x+2y=1\end{cases}$

***

بحثی پیرامون معادلات خط در صفحه

می دانیم که در هر صفحه، دو خط نسبت به هم سه حالت زیر را دارند.

الف : دو خط متقاطع اند که در این حالت، همدیگر را فقط در یک نقطه قطع می کنند.

ب : دو خط موازیند که هیچ گاه همدیگر را قطع نمی کنند.

ج : دو خط منطبق اند که در تمام نقاط مشترک هستند.

مثال : مختصات نقطه‌ی تلاقی دو خط به معادلات زیر را تعیین کنید.

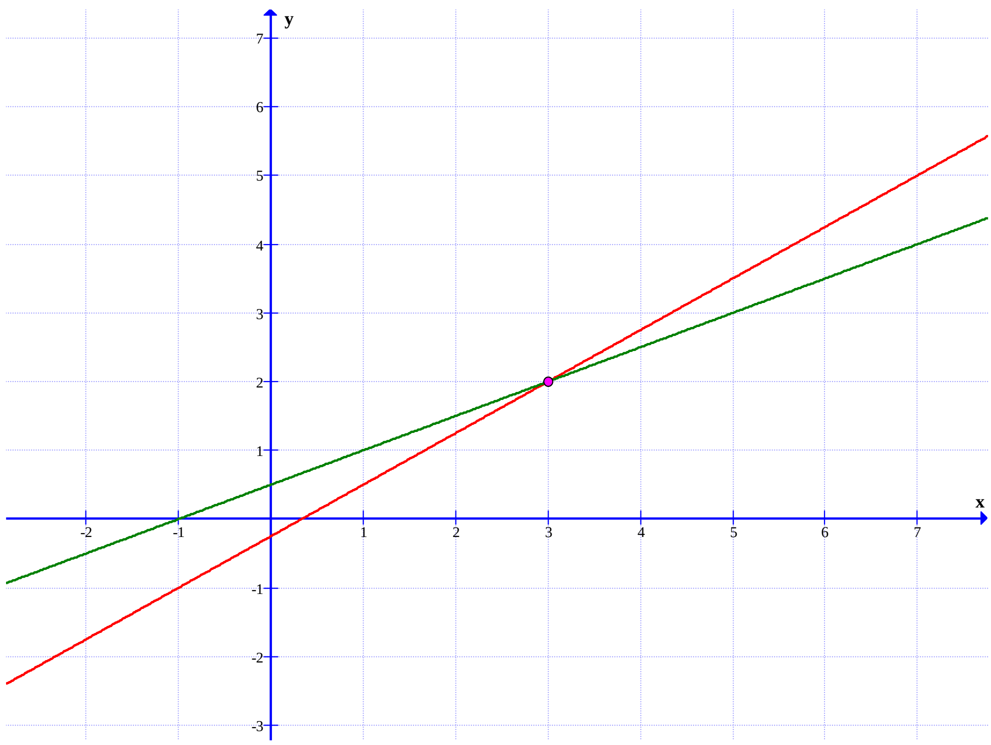
$$۳x-۴y=۱ \text{ و } x-۲y=-۱$$

حل : کافی است که دستگاه زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ x-۲y=-۱ \end{cases} \rightarrow x=۳ \ , \ y=۲$$

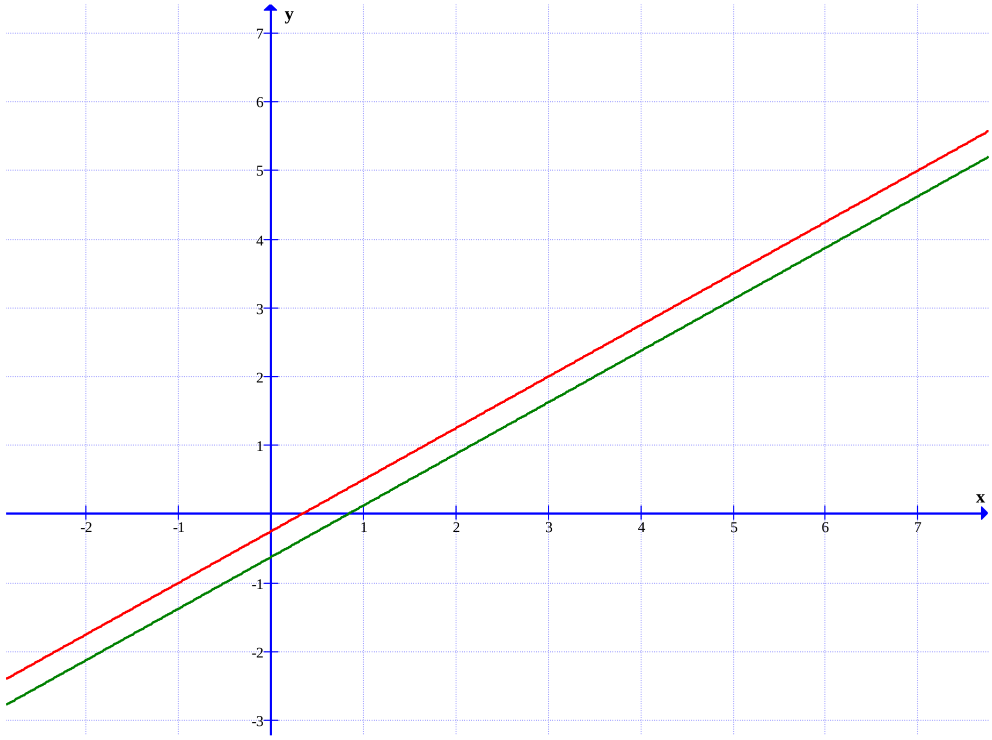
لذا نقطه‌ی تلاقی این دو خط می شود. $P(۳,۲)$

توجه کنید که در اگر نمودار های این دو خط را رسم نماییم، همین موضوع تأیید می شود.



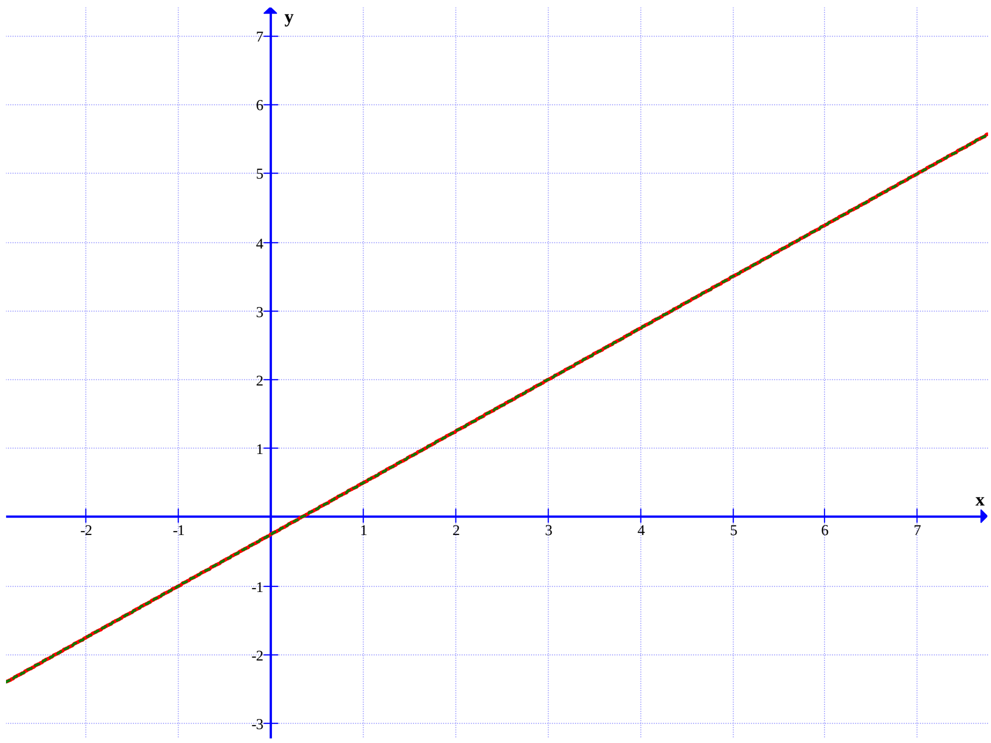
مثال : دو خط به معادلات زیر به جهت داشتن شیب های مساوی ، موازی هستند.

$$۳x-۴y=۱ \text{ و } ۶x-۸y=۵$$



مثال : واضح است که دو خط به معادلات زیر منطبق اند.

$$۳x-۴y=۱ \text{ و } ۶x-۸y=۲$$



نتیجه : اگر معادلات دو خط به صورت زیر باشند.

$$a_{۱}x+b_{۱}y=c_{۱} \quad \text{و} \quad a_{۲}x+b_{۲}y=c_{۲}$$

می توان گفت که :

الف) اگر $\frac{a_{۱}}{a_{۲}} \neq \frac{b_{۱}}{b_{۲}}$ در این صورت دو خط متقاطع اند و دستگاه یک جواب دارد.

ب) اگر $\frac{a_{۱}}{a_{۲}} = \frac{b_{۱}}{b_{۲}} \neq \frac{c_{۱}}{c_{۲}}$ در این صورت دو خط موازیند و دستگاه دارای جواب نیست.

ج) $\frac{a_{۱}}{a_{۲}} = \frac{b_{۱}}{b_{۲}} = \frac{c_{۱}}{c_{۲}}$ در این صورت دو خط منطبقند و دستگاه بیشمار جواب دارد.

توجه : در مورد الف می توان گفت یک دستگاه معادلات خطی وقتی دارای جواب است که دترمینان ضرایب آن صفر نباشد.

$$\begin{cases} a_{۱}x+b_{۱}y=c_{۱} \\ a_{۲}x+b_{۲}y=c_{۲} \end{cases} \to \underbrace{\begin{bmatrix} a_{۱} & b_{۱} \\ a_{۲} & b_{۲} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{۱} \\ c_{۲} \end{bmatrix}}_{D}$$

$$\frac{a_{۱}}{a_{۲}} \neq \frac{b_{۱}}{b_{۲}} \to a_{۱}b_{۲} \neq a_{۲}b_{۱} \to a_{۱}b_{۲}-a_{۲}b_{۱} \neq ۰ \to |A| \neq ۰$$

که قبلاً این موضوع را مشاهده کرده ایم.

تمرین۳۳ : بدون رسم نمودار و بدون حل دستگاه ، تعداد جواب های دستگاه زیر را تعیین کنید.

$$\begin{cases} ۲x-۳y=۳ \\ -۴x+۵y=۱ \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۳۴ : روی وجود یا عدم وجود و تعداد جواب های هر یک دستگاه های معادلات خطی زیر بحث کنید.

الف) $\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x+۳y=۵ \\ -۲x-۶y=۱ \end{cases}$ ج) $\begin{cases} -۲x+۳y=۲ \\ ۴x-۶y=-۴ \end{cases}$

۳۵ : به ازای چه مقداری از k دستگاه زیر دارای یک جواب می باشد.

$$\begin{cases} kx+۳y=۴ \\ x-۲y=۳ \end{cases}$$

***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی: @amerimath سایت : www.mathtower.ir