هر عبارت گویا، عبارتی است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشد و مخرج آن صفر نباشد.

همین تعریف به ظاهر ساده کلمه ی مهمی در خود دارد که نکته مهم بسیاری از سوالات است.

اگر مقداری از متغیر عبارت مخرج را صفر کند قابل قبول نیست. یعنی عبارات گویا تنها به ازای اعدادی قابل قبول هستند که مخرج آنها را صفر نکند. مثلا عبارت گویای $\frac{۳x-۶}{x+۱}$ به ازای $x=-۱$ قابل قبول نیست

مثال : هر یک از عبارات گویای زیر به ازای چه مقدارهایی از x تعریف نشده هستند؟

الف) $\frac{x^{۳}}{x+۲}$

ب) $\frac{x+۲}{x^{۲}+۴}$

پ) $\frac{۱}{x-۲}+\frac{۲}{x-۱}+\frac{۳}{x}$

ت) $\frac{x-۴}{x-۴}$

هر معادله به شکل $a\neq ۰$ $ax^{۲}+bx+c=۰$ که در آن اعداد c,b,a حقیقی هستند را یک معادله درجه دوم می نامیم و برای یافتن x هایی که در معادله فوق صدق کنند، راه های مختلفی را ارائه می دهیم. به تمام اعداد حقیقی که در تساوی بالا صدق کند ریشه های معادله می گوییم.

حل معادله درجه ۲ به روش تجزیه

در این روش ابتدا عبارت ax^2+bx+c را تجزیه کرده و سپس از نکته زیر استفاده میکنیم.

$$A\times B=0 \Rightarrow A=0 \quad \text{یا} \quad B=0$$

به عنوان مثال: معادله $x^2-1=0$ را حل کنید.

$$x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x-1=0 \quad \text{یا} \quad x+1=0$$

$$x=1 \quad \text{یا} \quad x=-1$$

یادآوری چند روش تجزیه:

$$ax^2+bx=x(ax+b)$$

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

📖**مثال :** معادلات درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^2-7x=0$

ب) $3x^2=6x$

پ) $x(x-9)=2x$

ت) $x^2-3x+2=0$

ث) $3x^2-12x+12=0$

مثال : معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^3 - 16x^2 = 0$

ب) $x^4 - 16 = 0$

پ) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

نکته: اگر x_1 یکی از ریشه های معادله درجه $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، میتوان عبارت $ax^2 + bx + c$ را به صورت زیر تجزیه کرد: $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(ax - \quad)$ برای پر کردن جای خالی میتوان عددی را نوشت که با ضرب در x_1 در آن عدد بتوانیم به عدد ثابت c برسیم.

سوال: چرا اگر x_1 یکی از ریشه های معادله درجه $ax^2 + bx + c = 0$ باشد میتوان تجزیه فوق را نوشت؟

حل معادله درجه دوم با ریشه گیری

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی باشد، ریشه های معادله درجه دوم $x^2 = a$ به صورت $x = \sqrt{a}$ یا $x = -\sqrt{a}$ خواهد بود. مثلا برای حل معادله درجه دوم $x^2 = 25$ داریم: $x = 5$ یا $x = -5$

مثال : معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 = 3$

ب) $2(3x - 1)^2 = 8$

مثال : معادلات زیر را با روش ریشه گیری حل کنید.

الف) $\left(x-۵\right)\left(x+۵\right)=۷۵$

ب) $۵x\left(x-۱\right)=-x\left(۵-۲x\right)+۳$

پ) $x^{۲}+۳=۰$

حل معادله درجه ۲ به روش مربع کامل کردن

قبل از حل معادله درجه ۲ با این روش باید خود روش مربع کامل کردن یک عبارت درجه دوم را یاد بگیریم.

جاهای خالی زیر را میخواهیم پر کنیم: $x^{۲}+۶x+۹=\left(x+\quad\right)^{۲}$

برای فهمیدن عددی که در جای خالی قرار میگیرد باید ضریب x را نصف کنید. یعنی: $x^{۲}+۶x+۹=\left(x+۳\right)^{۲}$

حال اگر عدد ثابت مربع عدد داخل پرانتز نبود چه کار کنیم. مثلا میخواهیم $x^{۲}+۶x+۱۰$ را مربع کامل کنیم.

برای این کار ابتدا دو عبارتی که زیر آنها خط کشیده شده را در نظر میگیریم $\underline{x^{۲}+۶x}+۱۰$

سعی میکنیم کنار این دو جمله، جمله ای را بنویسیم که همراه آنها یک اتحاد مربع دو جمله ای درست شود. برای این کار ضریب x را ابتدا نصف کرده سپس مربع کنید. عدد حاصل باید کنار این دو جمله قرار داشته باشد.

$$\left(x+۳\right)^{۲}+۱۰-۹ \quad \Leftarrow \quad \underline{\underline{x^{۲}+۶x}+۹}+۱۰-۹$$

به عنوان مثال میخواهیم معادله $x^{۲}-۲x-۳=۰$ را با روش مربع کامل حل کنیم.

$$\underline{x^{۲}-۲x}-۳=\underline{\underline{x^{۲}-۲x+۱}}-۳-۱=(x-۱)^{۲}-۴$$

معادله $(x-۱)^{۲}-۴=۰$ به روش ریشه گیری خیلی ساده قابل حل است:

$$(x-۱)^{۲}-۴=۰\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۲\rightarrow x=۳\\ x-۱=-۲\rightarrow x=-۱\end{cases}$$

مثال : معادلات زیر را با روش مربع کامل حل کنید.

الف) $۲x^{۲}+۱۸=۱۲x$

ب) $x^{۲}-۴x+۶=۰$

پ) $(x-۱)^{۲}=x$

ت) $x\left(\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۱}{۶}$

حل معادله درجه ۲به روش فرمول کلی

در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ مقدار b^2-4ac را با Δ نمایش میدهیم و به آن دلتا میگوییم. ریشه های معادله را در صورت وجود از رابطه های زیر به دست می آوریم.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

واضح است که اگر $\Delta>0$ باشد دو جواب بالا وجود دارند و متمایز خواهند بود.

اگر $\Delta=0$ دو جواب بالا یکسان خواهد شد و در این صورت میگوییم معادله ریشه مضاعف(یکسان) دارد.

اگر $\Delta<0$ دو جواب بالا بی معنی خواهند شد و میگوییم معادله در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارد.

$ax^2+bx+c=0\rightarrow$ $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

- $\Delta>0$ → $x=-\dfrac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ معادله دو ریشه حقیقی دارد.
- $\Delta=0$ → $x=-\dfrac{b}{2a}$ معادله یک ریشه حقیقی دارد.
- $\Delta<0$ → معادله ریشه حقیقی ندارد.

نکته: اگر $\Delta<0$ باشد میگوییم معادله فوق در اعداد حقیقی جواب ندارد. مجموعه ای بزرگ تر هست که معادلات فوق در آن مجموعه دارای جواب است. بزرگ ترین مجموعه ای که ما در دوره دبیرستان با آن آشنا شده این مجموعه اعداد حقیقی است. مثلا معادله $x^2+1=0$ در اعداد حقیقی دارای جواب نیست اما در مجموعه فوق دارای دو جواب است.

مثال : به کمک فرمول کلی، حل معادله درجه دوم ، جواب های هر کدام را بیابید.

الف) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

ب) $x^2 - x + 1 = 0$

پ) $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = 0$

مثال : برای حل معادلات زیر به روش خواسته شده عمل کنید.

الف) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ (روش مربع کامل کردن)

ب) $2(t-1)^2 = 32$ (روش ریشه‌گیری)

پ) $x^2 - 4x + 5 = 0$ (روش مربع کامل کردن)

ت) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (روش تجزیه)

مثال : معادلات زیر را حل کنید.

الف) $t^2 - 2t + 1 - \sqrt{2} = 0$

ب) $(3x^2 + x + 5)(1 - x^2) = 0$

پ) $2 - \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2}$

ت) $x - 3\sqrt{x+1} + 3 = 0$

مثال : هرمعادله را با روش مناسبی که حدس میزنید حل کنید.

الف) $4x^2 - 25 = 75$

ب) $(x - 1)(x + 3) = 1$

مثال : معادله درجه دوم $x(2x-5)=a$ به ازای یک مقدار a دارای ریشه مضاعف است.

الف) a را بیابید.

ب) مقدار ریشه مضاعف را بیابید.

مثال : اگر عدد **۲** یکی از ریشه های معادله $(a-1)x^2-2ax+a=0$ باشد، ریشه دیگر را بیابید.

مثال : حدود m را چنان بیابید که معادله درجه دوم $x^2-2x+3m+2=0$ جواب حقیقی نداشته باشد.

مثال : اگر $x=-1$ یک جواب معادلهٔ $3x^2+(2a-1)x+2=0$ باشد، جواب دیگر کدام است؟

مثال : معادلهٔ درجه دوم $x^۲+۲x-m=۰$ مفروض است.

الف) مقدار m را چنان بدست آورید که $x=۰$ یک جواب معادلهٔ فوق باشد، سپس جواب دیگر را بیابید.

ب) مقدار m را چنان بدست آورید که معادلهٔ فوق دارای ریشهٔ تکراری باشد.

کاربرد معادله درجه دوم

مثال : درمثلث قائم الزاویه‌ای که طول وترش ۱۳ واحد است، طول یکی از اضلاع قائمه از دیگری ۷ واحد بیشتر است.

مساحت این مثلث کدام است؟

مثال : نسبت دو عدد $\frac{۳}{۴}$ و مجموع مربعات آنها **۱۰۰** می باشد. آن دو عدد را بیابید.

مثال : مجموع مربعات دو عدد طبیعی و فرد متوالی **۳۹۴** است. این دو عدد را بیابید.

مثال : طول مستطیلی از عرض آن **۲** واحد بیشتر است. اگرعدد مساحت مستطیل از عدد محیط **۴۴** واحد بیشتر باشد، ابعاد مستطیل را مشخص کنید.

مثال : جمع عددی با دو برابر معکوسش برابر **۳** می باشد، آن عدد را بیابید.

مثال : حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی از مجموع آن ها **۱۱** واحد بیشتر است، آن اعداد را بیابید.

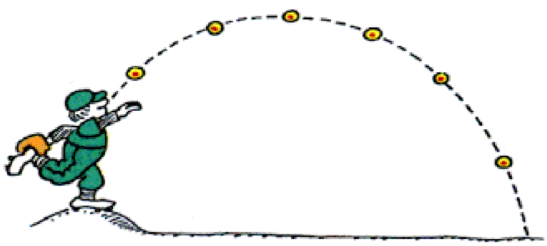
مثال : معادلهٔ $\frac{2x-4}{3x-1}=\frac{x-2}{x+3}$ را حل کنید.

مثال : میخواهیم در یک دیوار مستطیل شکل به مساحت **۱۲/۵** متر مربع، یک دریچه مربعی شکل برای کانال کولر ایجاد کنیم. اگر طول دیوار **۱۰** برابر ضلع مربع و عرض دیوار، دومتر از ضلع مربع بزرگ تر باشد، مساحت سوراخ مربعی شکل را بیابید.

مثال : طول یک مستطیل از **۶** برابر عرض آن، **۱۲** سانتی متر کم تر است. اگر مساحت این مستطیل **۱۸** سانتی متر مربع باشد، طول قطر مستطیل را بیابید.

مثال : از شخصی سن او را پرسیدند. پاسخ داد **۲۱** سال بعد، سن من مربع سنی خواهد بود که **۲۱** سال پیش از این داشتم. در حال حاضر این شخص چند سال سن دارد؟

سهمی



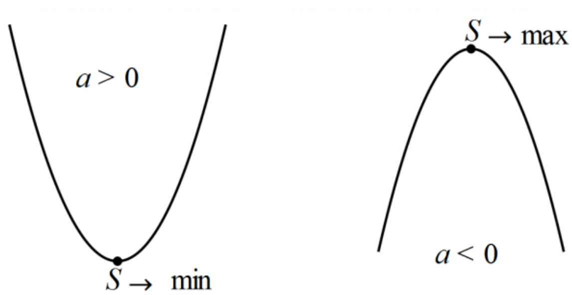
❖ نمودار تابع با ضابطه ی $y=ax^{۲}+bx+c$ یک سهمی است

که راس آن از فرمول $S\begin{bmatrix}\frac{-b}{۲a}\\ \frac{-\Delta}{۴a}\end{bmatrix}$ به دست می آید.

برای یافتن عرض نقطه مورد نظر میتوان طول بدست آمده (x) را در معادله قرار داد تا y به دست آید.

$x=\frac{-b}{۲a}$ طول راس سهمی و $y=\frac{-\Delta}{۴a}$ را مقدار مینیمم یا ماکزیمم سهمی میگوییم.

❖ برای تشخیص اینکه یک سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم، از روی علامت ضریب $x^{۲}$ یعنی a متوجه این موضوع میشویم. . به این صورت که اگر $a>۰$ منحنی رو به بالا و می نیمم دارد و اگر $a<۰$ منحنی رو به پایین و ماکزیمم دارد.



❖ محل تلاقی منحنی با محور عرض ها مقدار و علامت c را مشخص میکند.

❖ در محل تلاقی منحنی با محور y ها خطی مماس بر منحنی می کشیم اگر شیب خط مثبت باشد $b > ۰$ و اگر شیب خط مماس منفی باشد $b < ۰$ است.

❖خط $x = \frac{-b}{۲a}$ محور تقارن سهمی است.

ب) حالت منظم شده ی $y = (x-h)^۲ + k$

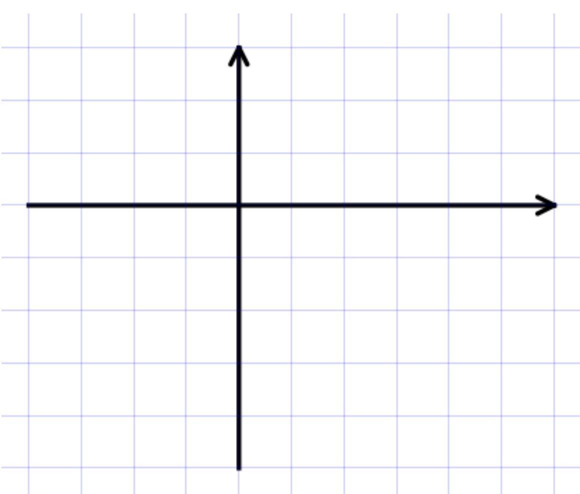
اگر معادله سهمی مربع کامل شده باشد و به صورت $y = (x-h)^۲ + k$ باشد برای رسم و یافتن راس مراحل زیر را طی میکنیم.

الف) ریشه داخل پرانتز x راس است. $x = h$

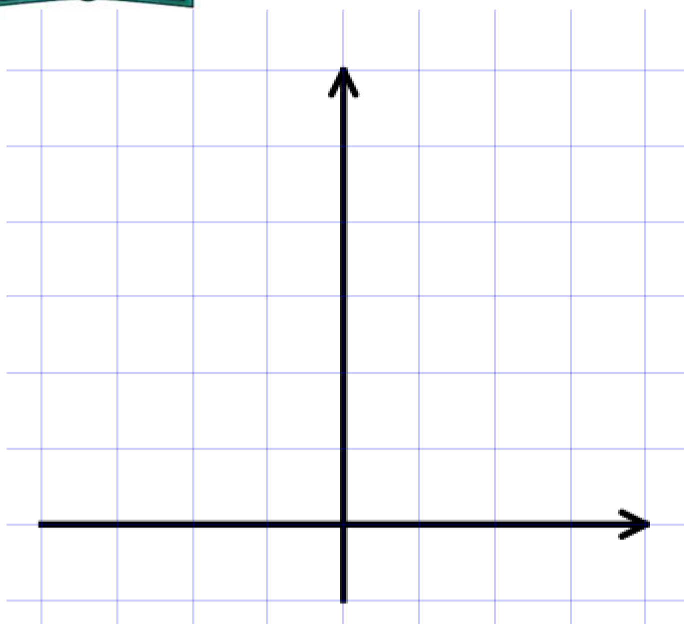
ب) برای یافتن عرض باید x به دست آمده را در معادله قرار داد یعنی $y = k$

پ) سپس محل تلاقی سهمی با محور عرض ها و در صورت راحت بودن محل تلاقی با محور طول ها را بیابید.

مثال : سهمی $y = (x-۱)^۲ - ۴$ را رسم کنید.



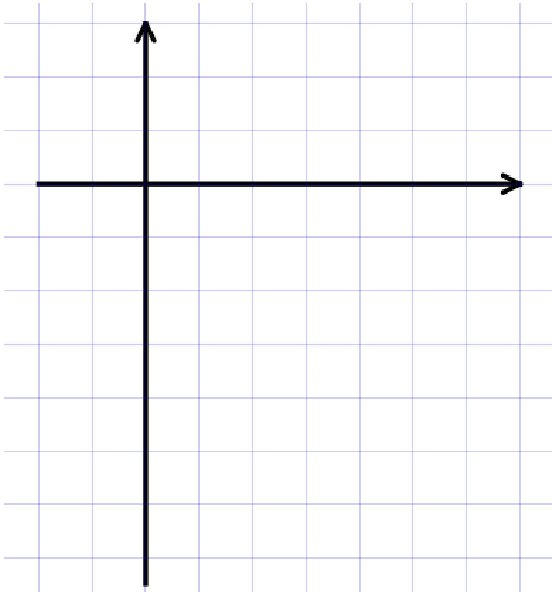
مثال : سهمی $y = x^2 + 3$ را رسم کنید.



مثال : اگر یکی از منحنی های تابع درجه دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد این منحنی محور xها را با کدام طول قطع می کند؟

مثال : نمودار سهمی $y = x^2 - 4x + 4$ محورهای مختصات را دردو نقطهٔ A و B قطع می کند، اندازهٔ پاره خط AB کدام است؟

مثال : معادله $y = x^{۲} - ۷x + ۶$ را به صورت مربع کامل نوشته سپس رسم کنید.



مثال : نمودار سهمی‌های زیر را رسم کرده و معادلهٔ محور تقارن آن‌ها را بنویسید.

الف) $y = -x^{۲} - ۲x + ۴$

ب) $y = -۲x^{۲} + ۴x - ۳$

مثال : مختصات راس ومعادلهٔ خط تقارن سهمی به معادله $f(x) = ۳x^{۲} - ۲$ را تعیین کنید.

مثال : سهمی با معادلهٔ $y=-2x^2+bx+c$ مفروض است. b و c را چنان بیابید تا نمودار این سهمی محور عرض ها را در نقطهٔ ۳ قطع نموده و محور تقارن آن خط $x=1$ باشد.

مثال : سهمی $y=ax^2+bx+c$ داده شده است. مقادیر b,a را طوری بیابید که نمودار آن از نقطه $(-1,2)$ بگذرد و محور x ها را در نقطه ای به طول **۱** قطع کند.

مثال : سهمی $y=x^2+ax-3b$ داده شده است. مقادیر b,a را طوری بیابید که این سهمی محور x را در نقطه ای به طول **۳** قطع کند و از نقطه $(1,-4)$ بگذرد.

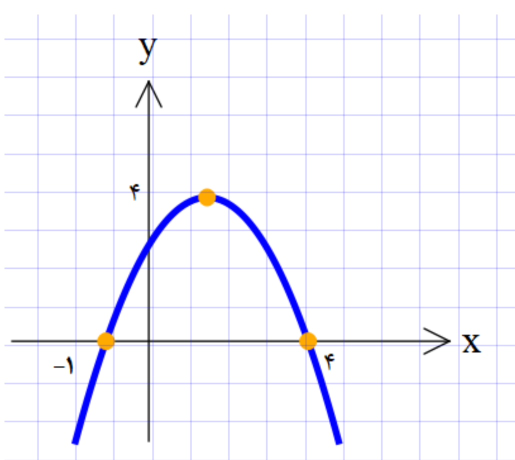
📖 **مثال :** شخصی که در لبهٔ فوقانی ساختمانی به ارتفاع ۶۰ متر ایستاده است توپی را با سرعت اولیه ی ۳۰ متر بر ثانیه به طرف بالا پرتاب می کند. پس از t ثانیه ارتفاع توپ از سطح زمین برابر $h(t)=-5t^2+30t+60$ است:

الف) پس از چند ثانیه توپ به زمین می‌خورد.

ب) ماکزیمم ارتفاع توپ چقدر است.

پ) نمودار این حرکت را رسم کنید.

📖 **مثال :** نمودار سهمی مقابل را بنویسید.



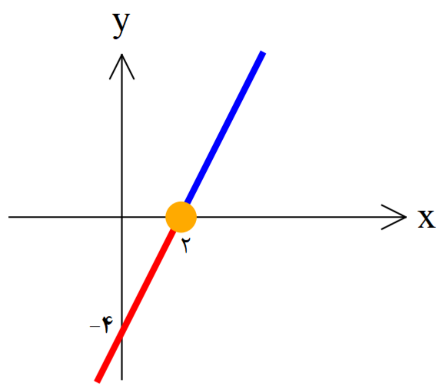
تعیین علامت

قبل از شروع باید بدانیم هدف از این مبحث چیست و مفهوم تعیین علامت چه می باشد؟

در حالت جبری میخواهیم در چه جاهایی عبارت داده شده مثبت و در چه جاهایی عبارت داده شده منفی است.

در حالت هندسی میخواهیم بدانیم در چه بازه هایی عبارت داده شده پایین محور x ها و در چه جاهایی عبارت داده شده بالای محور x هاست.

به طور مثال: $y = ۲x - ۴$



در شکل روبرو به ازای تمام $x > ۲$ تابع بالای محور x هاست

به ازای $x = ۲$ تابع صفر است و

به ازای تمام $x < ۲$ تابع پایین محور x هاست.

تمام مطالب فوق که هندسی نگاه کردیم را میتوان در جدول زیر خلاصه کرد.

x		۲	
$f(x)$	$-$	0	$+$

همین مطلب را برای عبارت درجه اول دیگری هم میتوان انجام داد و نتیجه کلی زیر برای تعیین علامت عبارات درجه اول به دست می آید.

تعیین علامت عبارت درجه اول $f(x)=ax+b$

ابتدا ریشه این عبارت را می یابیم. سپس طبق جدول زیر تعیین علامت میکنیم.

x		ریشه $= -\frac{b}{a}$	
$f(x)$	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

تعیین علامت عبارت درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$

چون مفهوم تعیین علامت به جاهایی بستگی دارد که نمودار منحنی محور طولها را قطع کرده است پس در عبارت درجه دوم تعداد ریشه های معادله در تعیین علامت نقش بسزایی دارد.

پس برای تعیین علامت عبارت درجه دو کافی است طبق تعداد ریشه ها بحث کنیم:

الف) معادله دو ریشه داشته باشد.

x		x_1		x_2	
$f(x)$	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

ب) معادله یک ریشه داشته باشد.(ریشه مضاعف)

x		x_1	
$f(x)$	موافق علامت a	0	موافق علامت a

پ)معادله ریشه نداشته باشد.

x	
$f(x)$	موافق علامت a

◆ اگر عبارتی از ضرب و تقسیم چند عبارت تشکیل شده باشد، برای تعیین علامت تک تک عبارت ها را در هم ضرب می کنیم و جواب از ضرب علامت هر قسمت درست میشود.

نکته اصلی: ریشه ها در خط اول به ترتیب از کوچک به بزرگ نوشته می شود.

📖 **مثال** : تعیین علامت کنید.

$$P(x)=2x^2-5x+3$$

$$f(x)=\frac{1-x^2}{x+3}$$

$$P=(x-1)\left(x^2+5x+4\right)$$

📖 **مثال** : تعیین علامت کنید.

$$P=\frac{(x-2)(3-x)}{(x+7)(x-4)}$$

نکته۱ : در تعیین علامت $\left(P(x)\right)^n$ اگر n زوج باشد، همه جا مثبت قرار میدهیم. و اگر n منفی باشد، به توان کاری نداریم و فقط عبارت داخل پرانتز را تعیین علامت میکنیم.

نکته۲ : در تعیین علامت $|P(x)|$ همواره حاصل نامنفی است و باید همه جا $+$ بگذاریم.

مثال : تعیین علامت کنید .

$$h(x)=\frac{(x^2-4)|x-1|}{(x^2-2x+1)(-2x+6)^3}$$

مثال : تعیین علامت کنید.

$$p=\frac{x\left(x-3\right)^2}{x^2+x-2}$$

مثال : تعیین علامت کنید.

$$p=\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2+x-2}$$

مثال : تعیین علامت کنید.

$$p=\frac{-۲}{|x+۱|}$$

نامعادله

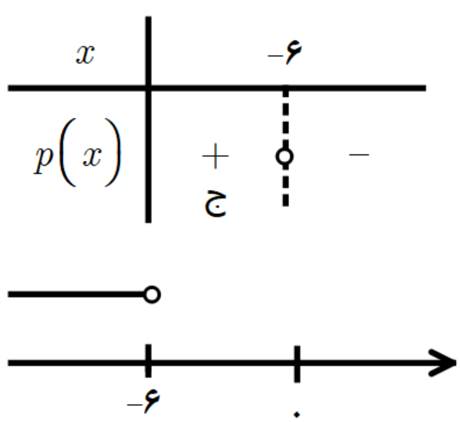
کاربرد تعیین علامت در حل نامعادلات

باید تمام جملات را به یک سمت برده و سمت دیگر صفر داشته باشیم. سپس در صورتی که بین عبارت ضرب یا تقسیم باشد شروع به تعیین علامت میکنیم. دقت کنید بین چند کسر یا چند پرانتز اگر علامت $\pm$ باشد تعیین علامت فایده ای ندارد و باید حتما ضرب یا تقسیم داشته باشیم.

در نامعادلات بعد از تعیین علامت باید طبق جهت نامساوی به دست آمده قسمت هایی را که برای ما قابل قبول هستند مشخص کنیم. بهترین کار برای نوشتن جواب نامعادله رسم محور و استفاده از نماد بازه هاست.

به طور مثال: نامعادله ی $۲(x-۱)>۳x+۴$ را حل کنید.

$$۲(x-۱)>۳x+۴\Rightarrow ۲x-۲>۳x+۴$$
$$\Rightarrow ۲x-۳x-۲-۴>۰$$
$$\Rightarrow -x-۶>۰$$
$$p(x)=-x-۶$$
$$-x-۶=۰\Rightarrow x=-۶$$



جواب: $(-\infty,-۶)$

📖 **مثال :** نامعادله روبرو را حل کنید و جواب را روی محور نشان دهید.

الف) $\dfrac{x^۲-۹}{x+۲}\geq ۰$

ب) $\dfrac{۵x-۲}{(۲-x)(x-۴)}<۰$

پ) $\dfrac{x-۱}{x-۳}-\dfrac{۲-x}{۵-x}>۰$

◆ کاربرد تعیین علامت در مفهوم بامعنی بودن یا بی معنی بودن رادیکالهای با فرجه زوج

از قبل می دانیم که زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد. پس برای تعیین اینکه چه مقادیری میتوانند $\sqrt{f(x)}$ را با معنی کنند باید نامعادله $f(x)\geq ۰$ را تعیین علامت کنید. به طور مثال در رادیکال زیر داریم:

$$y=\sqrt{x^۲-۳x+۲}$$
$$x^۲-۳x+۲\geq ۰$$
$$(-\infty,۱)\cup(۳,+\infty)$$

x		۱		۲	
$f(x)$	+	o	−	o	+

مثال : عبارت های زیر به ازای کدام مقادیر میتوانند معنی دار باشند؟

الف) $f(x)=\sqrt{\frac{۳-x}{x+۱}}$

ب) $g(x)=\sqrt{(x+۲)(۴-x)}$

مثال : عبارت های زیر به ازای چه مقدار x معنی دار است؟

الف) $f=\sqrt{۱-x}+\sqrt{۴-x^{۲}}$

ب) $P=\sqrt{۲-\sqrt{۳x-۲}}$