

فصل دوم:
قسمت اول: مبانی احتمال

فضای نمونه ای: مجموعه‌ای همای حالت‌های ممکن در یک وقوع پیوسته یک پدیده یا آزمایشی تصادفی
را فضای نمونه‌ای آن پدیده یا آزمایشی تصادفی می‌گوئیم.



نکته: فضای نمونه‌ای را معمولاً با حرف S نشان می‌دهند.

مثال: در پرتاب همزمان یک سکه و یک تاس، فضای نمونه‌ای را مشخص کنید.

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

تعریف برآمد: به هر عضو فضای نمونه‌ای یک برآمد می‌گوئیم.

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مثال: فضای نمونه‌ای مربوط به یک تاس عبارتست از
که به هر کدام از این اعداد یک برآمد گفته می‌شود.

سؤال امتحانی: تاسی را پرتاب می‌کنیم، اگر عدد کمتر از ۳ ظاهر شود، دو سکه را می‌اندازیم و اگر عدد
بزرگتر از ۳ ظاهر شود، سه سکه را می‌اندازیم، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد.

الف) ۳۰

ب) ۳۱

ج) ۳۲

د) ۳۳

جواب: واضح است که در پرتاب تاس سه حالت ممکن است بوجود آید.

عدد ظاهر شده کمتر از ۳ باشد (الف)
یعنی اعداد ۱ یا ۲ ظاهر شوند
در این صورت باید دو سکه بیاندازیم

$$\begin{matrix} \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & = & 8 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{سکه دومی} & & \text{سکه اولی} & & \text{اعداد تاسی} & & \end{matrix}$$

عدد ظاهر شده بیشتر از ۳ باشد (ب)
یعنی اعداد ۴ یا ۵ یا ۶ ظاهر شود
در این صورت باید سه سکه بیاندازیم

$$\boxed{3} \times \boxed{2} \times \boxed{2} \times \boxed{2} = 24$$

حالت خاصی } عدد ۳ ظاهر شود (ج)

$$n(S) = 1 + 24 + 1 = 26$$

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای S را یک **پیشامد تصادفی** می گوئیم که پیشامدهای تصادفی را با حروف A یا B یا ... نشان می دهیم.

مثال: در پرتاب یک تاسی فضای نمونه ای با صورت $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ می باشد که $A = \{2, 3, 5\}$ را یک پیشامد از این فضای نمونه ای می گوئیم زیرا $A \subseteq S$

پیشامد غیر ممکن: می دانیم که $\emptyset \subseteq S$ می باشد پس تهی یک پیشامد از فضای نمونه ای S است که به آن **پیشامد نشدنی** یا **غیر ممکن** می گوئیم.

پیشامد قطعی: می دانیم که $S \subseteq S$ می باشد پس S یک پیشامد از فضای نمونه ای S است که به آن **پیشامد قطعی** می گوئیم.

مثال: در پرتاب یک تاسی:

الف) اگر A پیشامد رو آمدن عدد صفر باشد، آنگاه $A = \emptyset$ پس: **A پیشامد غیر ممکن است.**
ب) اگر B پیشامد ظاهر شدن عددی طبیعی باشد، آنگاه $B = S$ پس: **B پیشامد قطعی است.**

نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشد، آنگاه

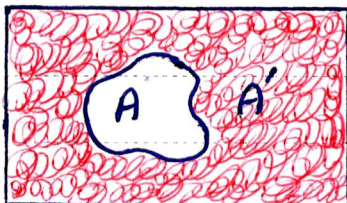
الف) پیشامد $A \cup B$ زمانی رخ می دهد که: **پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند.**

ب) پیشامد $A \cap B$ زمانی رخ می دهد که: **هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند.**

ج) پیشامد $A - B$ زمانی رخ می دهد که: **پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.**

نکته: اگر S فضای نمونه ای یک پدیده ی تصادفی و A پیشامدی از آن باشد در این صورت متمم A را با A' نشان می دهند و زمانی رخ می دهد که پیشامد A رخ ندهد. در واقع دو پیشامد A و A' کل فضای نمونه ای S را تشکیل می دهند.

S



$$A' = S - A$$

$$A \cup A' = S$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

$$n(A') = n(S) - n(A)$$

نکته:

نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، آنگاه $A - B = A \cap B'$

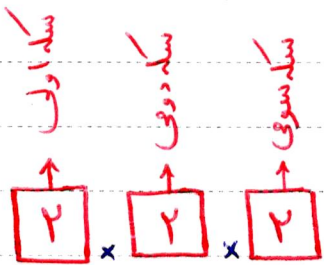
نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و $A \cap B = \emptyset$ باشد، در این صورت به پیشامدهای A و B **دو پیشامد ناسازگار** می‌گوئیم، در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچ وقت باهم رخ نمی‌دهند.

مثال: همواره هر پیشامد تصادفی مانند A و متمم آن یعنی A' دو پیشامد ناسازگارند زیرا: $A \cap A' = \emptyset$

تعداد حالات مطلوب / تعداد حالات ممکن = $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ احتمال رخ دادن پیشامد A در فضای نمونه S



مثال: سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی الف) فقط یک بار سکه «رو» می‌آید ب) حداکثر دو بار سکه «رو» می‌آید



جواب:

الف) فضای نمونه S دارای ۸ عضو است $\rightarrow 2 \times 2 \times 2 = 8$
 الف) از سه بار پرتاب فقط یک بار «رو» می‌آید: $A \Rightarrow n(A) = \binom{3}{1} = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{8}$

ب) حداکثر دو بار سکه «رو» بیاید: $B \Rightarrow n(B) = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 3 + 3 = 7$

$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{8}$

نکته: در حل مسائل مربوط به خارج کردن k مهر از درون جعبه‌ای با n مهر.

الف) اگر k مهر را با هم خارج کنیم، در این حالت ترتیب مهرها برای ما مهم نیست: فضای نمونه $= \binom{n}{k}$

ب) اگر k مهر را یکی یکی و بدون جایگذاری خارج کنیم، در این حالت ترتیب مهم است.
 فضای نمونه $= n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$

ج) اگر k مهر را یکی یکی و با جایگذاری خارج کنیم، در این حالت ترتیب مهم است.
 فضای نمونه $= \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{k \text{ بار}} = n^k$

مثال: از جعبه‌ای که شامل پنج مهری سبز و چهار مهری آبی و دو مهری زرد می‌باشد، سه مهر به تصادف و با هم خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه

الف) تعداد مهرهای زرد = ۲
ب) تعداد مهرهای آبی = ۴
ج) تعداد مهرهای سبز = ۵

الف) هر سه مهره سبز باشند.
ب) هر سه مهره هم رنگ باشند.
ج) فقط دو مهره آبی باشد.

حواب:

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11!}{(11-3)!3!} = \frac{11!}{8!3!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 6} = 165$$

پیشامد سبز بودن هر سه مهره: $A \Rightarrow n(A) = \binom{5}{3} = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{165} = \frac{2}{33}$

پیشامد هم رنگ بودن هر سه مهره: $B \Rightarrow n(B) = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 14$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{14}{165}$$

پیشامد انتخاب دو مهره آبی و یک مهره

غیر آبی: $n(C) = \binom{4}{2} \times \binom{7}{1} = 42$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{42}{165} = \frac{14}{55}$$

یک مهری دیگر را از بی مهری
باقی مانده انتخاب کنیم (غیر آبی‌ها)

مثال: دو جعبه‌ای A و B داریم که در جعبه‌ی A سه مهره سفید و چهار مهره سیاه و در جعبه‌ی B دو مهره سفید و پنج مهره سیاه وجود دارد. از هر جعبه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال هم رنگ بودن دو مهره، چقدر است.

حواب: فضای نمونه‌ای این بزرگوار، تصادفی شامل تمام حالات انتخاب مهره از هر دو جعبه‌ی A و B و یک مهره از هر دو جعبه‌ی A و B می‌باشد. پس:

$$n(S) = \binom{7}{1} \times \binom{7}{1} = 49$$

الکون اگر C پیشامد هم رنگ بودن دو مهره باشد در این صورت باید یک مهره از A سفید و یک مهره از B نیز سفید باشد یا اینکه یک مهره از A سیاه و یک مهره از B نیز سیاه باشد. بنابراین

$$n(C) = \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \binom{5}{1} = 26 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{26}{49}$$

مثال: ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک را به تصادف در یک ردیف قرار می‌دهیم. احتمال آن که همه کتابهای ریاضی درست‌جیب قرار بگیرند، چقدر است؟

$$n(S) = 7!$$

$$\Rightarrow n(A) = 3! \times 4! \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$$

مثال: از بین ۵ مرد و ۴ زن، سه نفر را به ترتیب انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه فقط نفر اول و آخر از یک جنس باشند چقدر است؟

$$n(S) = 9 \times 8 \times 7$$

(الف) $\frac{4}{18}$ (ب) $\frac{5}{18}$

A : (زن، مرد، زن) یا (مرد، زن، مرد)

(ج) $\frac{4}{18}$ (د) $\frac{1}{18}$

$$n(A) = 5 \times 4 \times 4 + 4 \times 5 \times 3 = 5 \times 4 \times 7$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5 \times 4 \times 7}{9 \times 8 \times 7} = \frac{5}{18}$$



نکته: برای هر پیشامد مثل A ، احتمال رخ دادن آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم که عددی حقیقی در بازه $[0, 1]$ می‌باشد. در واقع اگر A پیشامدی دلخواه از فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه؟

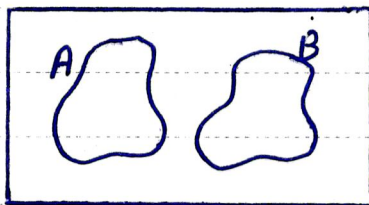
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(S) = 1$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار ($A \cap B = \emptyset$) باشند آنگاه:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

نکته: برای هر دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه‌ای S داریم:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

سؤال: نشان دهید که اگر A پیشامدی دلخواه از فضای نمونه‌ای S باشد آنگاه:

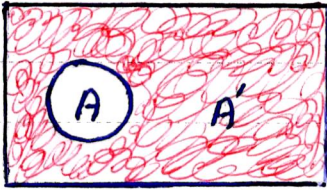
الف) $P(A) = 1 - P(A')$

ب) $P(\emptyset) = 0$

اثبات: چون A و A' دو پیشامد ناسازگارند

(۱) $P(A \cup A') = P(A) + P(A')$ پس:

(۲) $A \cup A' = S \Rightarrow P(A \cup A') = P(S) = 1$ از طرفی می‌دانیم که



که از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$1 = P(A) + P(A') \Rightarrow P(A) = 1 - P(A')$$

برای اثبات اینکه $P(\emptyset) = 0$ است می‌دانیم \emptyset و S متمم یکدیگرند پس

$$P(\emptyset) = 1 - P(S) \Rightarrow P(\emptyset) = 1 - 1 = 0$$



مثال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A') = 0.3$ و $P(B) = 0.4$ و $P(A \cap B) = 0.4$ مقدار $P(A \cup B)$ را بدست آورید.

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.4 = 0.7$$

مثال: در یک جامعه ۳۰ درصد روزنامه‌ی الف و ۲۵ درصد روزنامه‌ی ب و ۴۰ درصد حداقل یکی از این دو روزنامه‌ی رای خوانند. اگر یک نفر از این جامعه را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال آنکه هر دو روزنامه‌ی را مطالعه کند، چقدر است؟

$$P(\text{روزنامه‌ی الف را بخواند}) = P(A) = 0.3$$

$$P(\text{روزنامه‌ی ب را بخواند}) = P(B) = 0.25$$

$$P(\text{حداقل یکی از روزنامه‌های الف یا ب را بخواند}) = P(A \cup B) = 0.4$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.4 = 0.3 + 0.25 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.15$$

مثال: اگر $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ و $P(A') = \frac{3}{8}$ باشد، مطلوب است:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

الف) $P(B)$
ب) $P(B \cap A')$
ج) $P(A \cup B')$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{5}{8} + P(B) - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{11}{24}$$

$$P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{11}{24} - \frac{1}{4} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$

$$\rightarrow P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\rightarrow P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{11}{24} = \frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow P(A \cup B') = \frac{5}{8} + \frac{13}{24} - \frac{3}{8} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$



مثال: اگر $2P(B) = P(A) = 3P(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{P(A-B)}{P(A \cup B)}$ کدام است؟

الف) $\frac{1}{4}$

ب) $\frac{2}{7}$

ج) $\frac{3}{4}$

د) $\frac{5}{9}$

$$2P(B) = P(A) = 3P(A \cap B) \Rightarrow \begin{cases} P(A) = 3P(A \cap B) & (1) \\ P(B) = \frac{3P(A \cap B)}{2} = \frac{3}{2}P(A \cap B) & (2) \end{cases}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \stackrel{(1)}{=} 3P(A \cap B) - P(A \cap B) = 2P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \stackrel{(1), (2)}{=} 3P(A \cap B) + \frac{3}{2}P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{5}{2}P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{P(A - B)}{P(A \cup B)} = \frac{2P(A \cap B)}{\frac{5}{2}P(A \cap B)} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$$

بنابراین گزینه ی (د) صحیح است.

فصل دوم:

قسمت دوم: احتمالات غیر هم شانس

تعریف: هر زیر مجموعه A یک عضو از فضای نمونه ای را یک پیشامد ساده می گویند.قرارداد: اگر $A = \{x\}$ یک پیشامد ساده از فضای نمونه ای S باشد، در این صورت برای $P(\{x\})$ و به منظور ساده نویسی از $P(x)$ استفاده می کنیم پس:

$$P(\{x\}) = P(x)$$

تعریف: هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه ای $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S فضای نمونه ای با احتمال غیر هم شانس می گویند.نکته: در فضای نمونه ای متناهی با احتمال غیر هم شانس اگر $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ فضای نمونه ای و $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ یک زیر مجموعه k عضوی از S باشد، همواره داریم

الف) $0 \leq P(A) \leq 1$

ب) $P(S) = 1$

ج) $P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$

که با توجه به خاصیت های (ب) و (ج) می توانیم نتیجه ای معادل را بگیریم:

$$P(S) = P(S_1) + P(S_2) + \dots + P(S_n) = 1$$

مثال: اگر $S = \{a, b, c\}$ ، $P(a) = P(b)$ ، $P(b) = 3P(c)$ باشد، مقدار $P(c)$ را بدست آورید.

$$\begin{cases} P(b) = 3P(c) \\ P(a) = P(b) \end{cases} \Rightarrow P(a) = 3P(c)$$

اکنون با توجه به تساوی $P(S) = P(a) + P(b) + P(c) = 1$ داریم:

$$3P(c) + 3P(c) + P(c) = 1$$

$$7P(c) = 1$$

$$P(c) = \frac{1}{7}$$



مثال: تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد سه برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی بزرگتر از ۴ باشد، $P(A)$ چقدر است؟

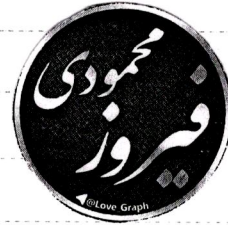
جواب: فضای نمونه ای عبارتست از

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

اکنون باید به هر عدد زوج احتمال x و به هر عدد فرد احتمال $3x$ نسبت دهیم یعنی

$$P(2) = P(4) = P(6) = x$$

$$P(1) = P(3) = P(5) = 3x$$



اکنون داریم؟

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$3x + x + 3x + x + 3x + x = 1 \Rightarrow 12x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

$$A = \{5, 6\} \Rightarrow P(A) = P(5) + P(6)$$

$$= 3x + x = 4x$$

$$= 4 \times \frac{1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

قسمت سوم:

احتمال شرطی

در حالتی که فضای احتمال هم شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد B مثل این است که فضای نمونه (یعنی S) را کنار گذاشته و B را فضای نمونه در نظر بگیریم، که احتمال روی این فضای نمونه نیز هم شانس است. به این رویکرد «کاهش فضای نمونه» گفته می شود.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

نکته: در فضای نمونه ای هم شانس داریم؟

مثال: در پرتاب دو تاسی از واحداً یکی از اعداد زوج و ۵ باشد، با چه احتمالی عدد ۲ ظاهر می شود. جواب؟

B : پیشامد ظاهر شدن حداقل یک بار عدد ۵ در پرتاب دو تاسی

$$B = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\} \Rightarrow n(B) = 11$$

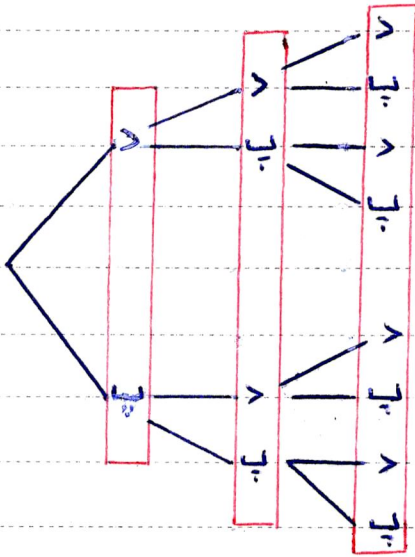
A : پیشامد ظاهر شدن عدد ۲

$$A \cap B = \{(2, 5), (5, 2)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

بنابراین:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{11}$$

مثال: در یک خانواده با سه فرزند، اگر فرزند اول پسر باشد، با چه احتمالی این خانواده دقیقاً ۲ فرزند پسر دارد؟
 جواب: بی دایم که فضای نمونه ای جنسیت فرزندان یک خانواده با سه فرزند ۸ عضو دارد زیرا



حال اگر B پیشامدی باشد که در آن فرزند اول پسر باشد داریم

$$B = \{ (پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (پ, د, د), (د, پ, پ), (د, پ, د), (د, د, پ), (د, د, د) \} \Rightarrow n(B) = 8$$

اگر A پیشامدی باشد که در آن خانواده دقیقاً دو فرزند پسر داشته باشد داریم

$$A \cap B = \{ (پ, د, پ), (د, پ, پ) \} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

مثال: اعداد ۱ تا ۸ را روی هشت کارت نوشته و سه کارت را به تصادف انتخاب می کنیم. اگر بدانیم که مجموع اعداد این سه کارت فرد است، احتمال اینکه دقیقاً دو کارت با شماره ی زوج انتخاب کرده باشیم چقدر است؟

B: (شرط) پیشامد آن است که مجموع سه عدد انتخاب شده فرد است.

A: پیشامد آن است که دقیقاً دو کارت با شماره ی زوج انتخاب شده باشد.

$$n(B) = \binom{8}{3} + \binom{4}{1} \times \binom{4}{2} = 56 + 6 \times 6 = 68$$

انتخاب سه عدد فرد از چهار عدد فرد ۷، ۵، ۳، ۱ را

بنابراین $A \cap B$ پیشامدی است که باید دو عدد زوج و یک عدد فرد انتخاب شود

$$n(A \cap B) = \binom{4}{2} \binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24 \Rightarrow P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{24}{68} = \frac{6}{17}$$

مثال: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، به طوری که $P(A) = 2P(B) = 0.4$ و $P(A \cup B) = 0.5$ باشد، مقدار $P(A|B)$ را بدست آورید.

$$2P(B) = 0.4 \Rightarrow P(B) = \frac{0.4}{2} = 0.2$$

$$P(A) = 0.4$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ = 0.4 + 0.2 - 0.5 = 0.1$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2}$$

جواب:

مثال: یک فضای نمونه ای متشکل از ۴ برآمد a, b, c, d است. اگر $P(a) = P(b) = \frac{1}{3}$ و $P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$ باشد، مطلوب است:

$$P(\{a, b, c\} | \{b, c, d\}) \quad \text{ب) محاسباتی}$$

$$P(\{a, b, c\}) \quad \text{الف) محاسباتی}$$

جواب: فضای نمونه ای به صورت $S = \{a, b, c, d\}$ می باشد که یک فضای نمونه ای غیر هم شانس است، پس طبق محاسباتی احتمال در فضای نمونه ای غیر هم شانس، داریم.

$$P(\{a, b, c\}) = P(a) + P(b) + P(c) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

ب) برای محاسباتی احتمال شرطی داده شده فرمولی می گیریم $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{b, c, d\}$ بنابراین

$$\rightarrow P(\{b, c, d\}) = P(b) + P(c) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{b, c\})}{P(\{b, c, d\})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow P(\{b, c, d\}) = P(b) + P(c) + P(d) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{2}$$

بنابراین:



قانون ضرب احتمالات

از رابطه $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ تساوی $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ بدست می آید که به این

تساوی، **قانون ضرب احتمالات** می گوئیم و از این قانون برای بدست آوردن احتمال همزمان وقوع دو پیشامد استفاده می کنیم.

مثال: درون جعبه ای ۴ لامپ سالم و یک لامپ معیوب وجود دارد، دو لامپ به تصادف و بدون جایگزینی خارج می کنیم، احتمال آنکه لامپ اول سالم و لامپ دوم معیوب باشد چقدر است؟

جواب: فرض می کنیم A : پیشامد سالم بودن لامپ اول و B : پیشامد معیوب بودن لامپ دوم باشد. اکنون هدف ما محاسبه $P(A \cap B)$ می باشد.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow P(B|A) = P(\text{لامپ اول سالم باشد} \mid \text{معیوب بودن لامپ دوم}) = \frac{1}{5} \\ & \rightarrow P(A) = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

مثال: ۴ درصد کارکنان یک سازمان، مرد هستند، ۲۵ درصد کل کارکنان این سازمان و ۲۰ درصد کارکنان مرد این سازمان چاق هستند. اگر یک نفر از بین آنها به تصادف انتخاب کنیم، با کدام احتمال مرد یا چاق می باشد؟

(ب) ۷۸٪

(الف) ۸۲٪

(د) ۷٪

(ج) ۷۳٪

$P(A) = ۰.۰۴ \Rightarrow A$: پیشامد مرد بودن شخص انتخاب شده

$P(B) = ۰.۲۵ \Rightarrow B$: پیشامد چاق بودن فرد انتخاب شده

$P(B|A) = P(\text{مرد بودن} \mid \text{چاق بودن}) = ۰.۲$

اکنون طبق قانون ضرب احتمالات $P(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow ۰.۲ = \frac{P(A \cap B)}{۰.۰۴} \Rightarrow P(A \cap B) = ۰.۰۸$

اکنون باید $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰.۰۴ + ۰.۲۵ - ۰.۰۸ = ۰.۲۱$$



نکته: قانون ضرب احتمالات را می‌توان برای سه پیشامد نیز نوشت. یعنی اگر A_1, A_2, A_3 پیشامدهایی با احتمال مثبت باشند آنگاه:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

مثال: در کیسه‌ای دو گوی سفید، سه گوی سیاه و سه گوی سبز وجود دارد. از این کیسه، سه گوی و به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه گوی اول سبز، گوی دوم سفید و گوی سوم سیاه باشد را بدست آورید.



جواب: پیشامدهای A_1 و A_2 و A_3 را به این صورت در نظر می‌گیریم؛
 A_1 : گوی اول سبز A_2 : گوی دوم سفید A_3 : گوی سوم سیاه

الکون باید $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ را محاسبه کنیم.

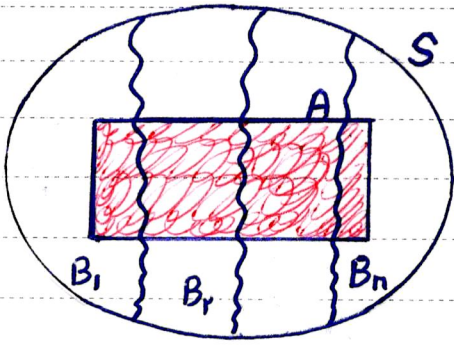
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2)$$

در ابتدا ۸ گوی درون کیسه قرار دارد. که سه تای آنها سبزی باشند. بنابراین احتمال آنکه گوی اول خارج شده سبز باشد برابر $P(A_1) = \frac{3}{8}$ می‌باشد. با خارج شدن یک گوی سبز، ۷ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که دو تای آنها سفید هستند. بنابراین اگر گوی دوم را خارج کنیم، آنگاه احتمال سفید بودن آن برابر $P(A_2 | A_1) = \frac{2}{7}$ می‌باشد. و در نهایت با خارج کردن این گوی از کیسه، ۶ گوی درون کیسه باقی می‌ماند که سه تای آنها سیاه هستند. پس با خارج کردن گوی سوم، احتمال سیاه بودن آن برابر $P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ می‌باشد. پس داریم:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{56}$$

قانون احتمال کل:

توین کنید B_1, B_2, \dots, B_n پشامدهای با احتمال مثبت باشند که فضای نمونه ای S را از هم جدا کنند. با این شرایط، برای هر پشامده A داریم:



در این صورت:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + \dots + P(B_n) \cdot P(A|B_n) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

مثال: درون جعبه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. یک مهره بدون رؤیت از جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

جواب: مهره اول که از جعبه خارج می‌کنیم یا سفید است یا سیاه. بنابراین پشامدهای B_1 و B_2 که فضای نمونه ای S را به دو مجموعه افزایش می‌دهند، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P(B_1) = \frac{5}{9}$$

B_1 : مهره اول خارج شده سفید است.

$$P(B_2) = \frac{4}{9}$$

B_2 : مهره اول خارج شده سیاه است.

اگر A پشامده سفید بودن مهره دوم باشد، آنگاه:

الف) با خارج کردن یک مهره سفید، ۴ مهره سفید و ۴ مهره سیاه در جعبه باقی می‌مانند و

$$P(A|B_1) = \frac{4}{8}$$

ب) با خارج کردن یک مهره سیاه، ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه در جعبه باقی می‌ماند، و

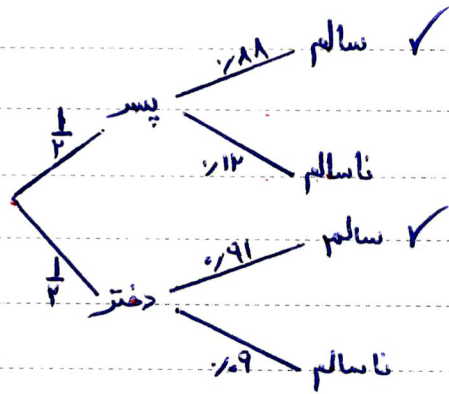
$$P(A|B_2) = \frac{5}{8}$$

الآن بنا بر قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{9}$$

مثال: فرین کند انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۱۲٪ و به فرزند دختر ۹٪ باشد. والدین که حامل این نوع بیماری هستند، انتظار فرزندى را دارند. احتمال اینکه این فرزند سالم باشد چقدر است؟

جواب: برای این مسأله اگر سعی کنیم فهرستی از حالات ممکن تشکیل دهیم داریم:



حال اگر شاخه‌هایی را که به وضعیت سالم ختم می‌شوند را در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{احتمال سالم بودن فرزند} = \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{12}}_{\text{شاخه اول}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{9}}_{\text{شاخه دوم}} = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

شاخه اول شاخه دوم

اکنون به روش دیگری (با استفاده از قانون احتمال کل) می‌توانیم احتمال مورد نظر را بدست آوریم.
جواب:

B_1 : پسر بودن فرزند

B_2 : دختر بودن فرزند

A : سالم بودن فرزند

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2)$$

بنابراین:

$$= \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{12}) + \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{9}) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{8}{9} = \frac{11}{24} + \frac{4}{9} = \frac{11}{24} + \frac{11}{24} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}$$

مفید درم

تسمت چهارم؛ پیشامدهای مستقل و وابسته:

پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع پیشامد B بر احتمال وقوع پیشامد A اثری نداشته باشد، یعنی:

$$P(A|B) = P(A)$$

$$\begin{cases} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(A|B) = P(A) \end{cases} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$$

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل از هم میگویند هرگاه: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل و $P(A) = 2P(B) = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $P(A \cup B)$ را محاسبه کنید.

$$P(A) = 2P(B) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

مثال: احتمال قبولی دو نفر در کنگور $\frac{1}{8}$ و $\frac{1}{9}$ می باشد، احتمال اینکه حداقل یکی از این دو نفر در کنگور قبول شود، چقدر است؟

جواب: می دانیم که قبول شدن یا نشدن هر یک از این دو نفر در قبول شدن یا نشدن دیگری تأثیری ندارد. پس قبول شدن این دو نفر مستقل از یکدیگرند.

A: پیشامد قبولی نفر اول در کنگور

B: پیشامد قبولی نفر دوم در کنگور

$$P(A) = \frac{1}{8}$$

$$P(B) = \frac{1}{9} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{72}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{72} = \frac{13}{72}$$



نکته ی مهم: اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند آنگاه:

الف) A و B' نیز مستقل از یکدیگرند یعنی: $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$

ب) A' و B نیز مستقل از یکدیگرند، یعنی: $P(A' \cap B) = P(A') \cdot P(B)$

ج) A' و B' نیز مستقل از یکدیگرند، یعنی: $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cup B') = \frac{3}{4}$ باشد، $P(B)$ چقدر است؟

جواب: چون دو پیشامد A و B مستقل از همند بکنند پس A و B' نیز مستقل از یکدیگرند و

(۱) $P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$

از طرفی داریم:

(۲) $P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$

$(۱), (۲) \Rightarrow P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A) \cdot P(B')$

$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B') - \frac{1}{3} \times P(B') \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{3} P(B') \Rightarrow P(B') = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

مثال: احتمال موفقیت عمل پیوند عضو روی یک بیمار ۰٫۹ و روی بیماری دیگر ۰٫۸ است. احتمال اینکه عمل پیوند عضو روی فقط یکی از این دو نیز موفقیت آمیز باشد، چقدر است؟

A : موفقیت آمیز بودن عمل پیوند عضو روی بیمار اول و B : موفقیت آمیز بودن عمل پیوند عضو روی بیمار دوم
 بی دایم که $(A \cap B)$ و $(A' \cap B)$ ناسازگارند (زیرا اشتراک آنها خالی است)

$P[(A \cap B') \cup (A' \cap B)] = P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A) \cdot P(B') + P(A') \cdot P(B)$

$= 0.9 \times (1 - 0.8) + (1 - 0.9) \times 0.8$

$= 0.18 + 0.08 = 0.26$

A' و B مستقل اند $\Rightarrow A$ و B مستقل هستند

A و B' مستقل اند $\Rightarrow P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B')$



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...)

فیروز محمودی

همراه: ۰۲۷۴۰۲۷۳۰۹۱۳۷۰

صفحه

۳۴