

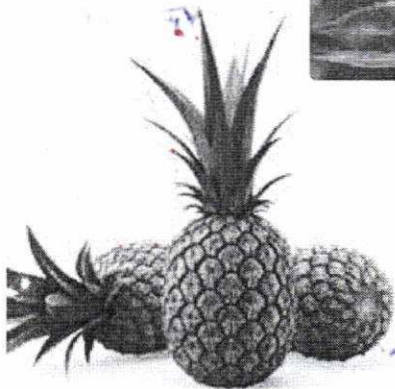
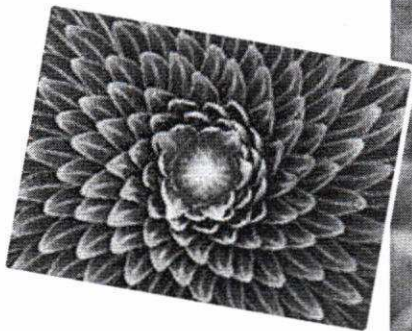
 @Faragiri10  
 ghadam.com



# مجموعه، الگو و دنباله



آلا داغلار یا کوه‌های رنگی در شهرستان زنجان



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

درس اول

متمم یک مجموعه

درس دوم

الگو و دنباله

درس سوم

دنباله‌های حسابی و هندسی

درس چهارم

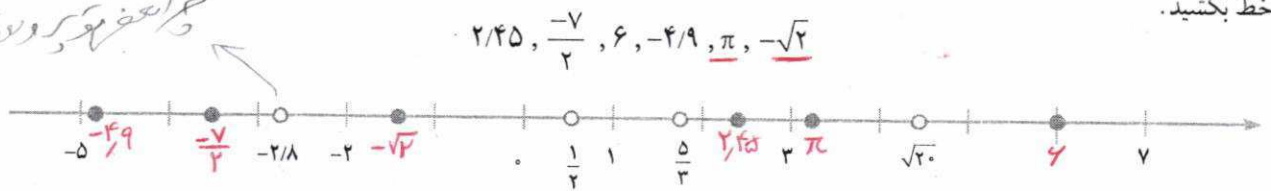




## تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۲ هر یک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ اند؟ زیر آنها خط بکشید.



### بازه‌ها

در اینجا گونه دیگری از زیرمجموعه‌های  $\mathbb{R}$  را در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $A$  مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین  $-2$  و  $1$  به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$ . اعضای  $A$  را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای  $A$  را فهرست کرد؟ آیا می‌توان اولین عدد حقیقی بعد از  $-2$  را مشخص کرد؟



زیرمجموعه‌هایی از  $\mathbb{R}$  را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص اند، «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. بازه‌ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل‌های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سرو کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده‌تری استفاده شود. بنابراین  $A$  را با نماد  $[-2, 1]$  نشان می‌دهیم و آن را بازه بسته از  $-2$  تا  $1$  می‌نامیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی  $-2$  و  $1$  را از  $A$  حذف کنیم، آنگاه مجموعه‌ای مانند  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$  به دست می‌آید که آن را بازه باز بین  $-2$  و  $1$  می‌نامیم و با نماد  $(-2, 1)$  نشان می‌دهیم. به طور خلاصه:

بازه بسته بین  $-2$  و  $1$ :  $A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$

بازه باز بین  $-2$  و  $1$ :  $B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$

بازه‌های نیم باز هم به روش مشابه تعریف می‌شوند.

### تعالیت

$a, b \in \mathbb{R}$

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که  $a < b$  آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

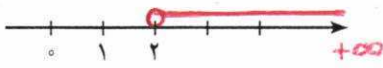
نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
مثال	نیم باز $(1, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	
مثال	نیم باز $[-3, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	

## تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگتر از ۲ مورد نظر است. به عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعه جواب نامعادله  $2x > 4$  به صورت  $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$  است. اعضای  $C$  را روی محور زیر نشان دهید.



آیا می‌توانید  $C$  را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد  $+\infty$  (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعه  $C$  را در قالب بازه با نماد  $(2, +\infty)$  نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$  نمایش بازه‌ای به صورت  $(-\infty, 1]$  خواهد بود که یک بازه نیم باز است. توجه داریم که  $+\infty$  و  $-\infty$  اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

**فعالیت**

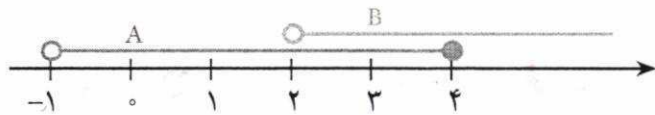
اگر  $a \in \mathbb{R}$  عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	$\mathbb{R}$	
نیم باز	$[3, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$	
باز	$(-\infty, 5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$	

مثال  
مثال

**مثال**

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه  $A = (-1, 4]$  و  $B = (2, +\infty)$  را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که  $A \cup B$  برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگتر از  $-1$  (یعنی:

$$(-1, 4] \cup (2, +\infty) = (-1, +\infty)$$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که  $A \cap B$  برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۴ به همراه خود عدد ۴: یعنی:

$$(-1, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4]$$

توضیح دهید که چرا  $2 \notin A \cap B$ .

۴ چون ۲ در بازه‌ی B نیست، پس در اشتراک نیست.

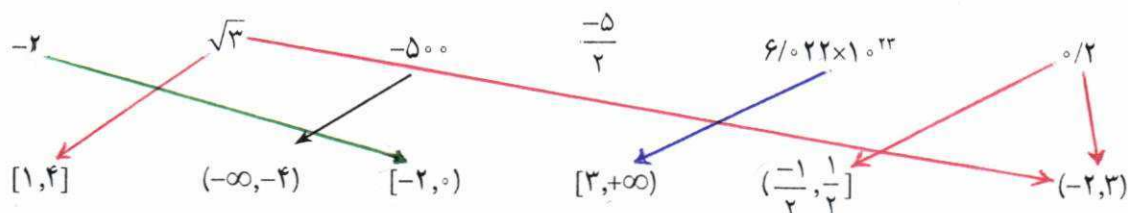
## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

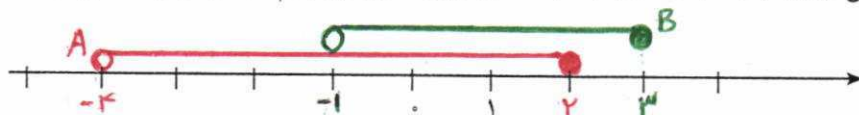
کاردر کلاس

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

- الف)  $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2)$  ✓ ب)  $-2 \in (-2, 0]$  ✗ ج)  $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$  ✗ د)  $\sqrt{2} \in (0, 1)$  ✗  
 ت)  $-2 \in \{-2, 0\}$  ✓ ث)  $-1 \in \{-2, 0\}$  ✗ خ)  $[2, 5) = (2, 5]$  ✗ ح)  $\emptyset \subseteq (-17, 0]$  ✓  
 هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



۳ نمایش هندسی دو بازه  $A = (-4, 2]$  و  $B = (-1, 3]$  را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



- الف)  $A \cap B = (-1, 2]$  ب)  $A \cup B = (-4, 3]$  پ)  $A - B = (-4, -1]$  ت)  $B - A = (2, 3]$

## مجموعه‌های منتهای و نامنتهای

### فعالیت

فرض کنید  $A$  مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و  $B$  مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

$$A = \{ ۱, ۲, ۳ \}$$

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

$$B = \{ ۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲, -۳ \}$$

ب)  $A$  چند عضو دارد؟ **۳ عضو**

پ) درباره تعداد اعضای  $B$  چه می‌توان گفت؟ **تعداد اعضا مشخص نیست (بسیار عضو دارد)**

مجموعه‌هایی مانند  $A$  را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های منتهای می‌نامیم.

با توجه به مطلب فوق،  $B$  یک مجموعه منتهای نیست؛ زیرا (نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را مجموعه‌های نامنتهای می‌نامیم.)

## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

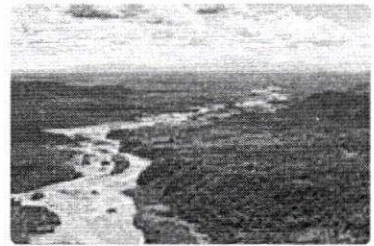


## تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

### کارد رگلاس

۱. منتهای یا نامتنهای بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های منتهای سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.



### جنگل‌های آمازون

آمازون که به ریه‌های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمال آمریکای جنوبی است و به دلیل همین وسعت، به آن جنگل‌های آمازون گفته می‌شود. حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزیل قرار دارد، همچنین بخش‌هایی از آن هم در کشورهای پرو، اکوادور، گویان، کلمبیا، و ترنلایا، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانه آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به عنوان پرآب‌ترین رودخانه دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد، نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجه یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که ۳۹۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰ اصله درخت در ۱۶۰۰۰ گونهٔ مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعه منتهای محسوب می‌شود یا نامتنهای؟

مجموعه	نامتنهای	منتهای	تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های منتهای)
مجموعه اعداد اول یک رقمی		✓	{۲, ۳, ۵, ۷}
مجموعه انسان‌های روی زمین		✓	۴ عقینو
مجموعه اعداد طبیعی فرد	✓		
مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان		✓	
مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات	✓		
مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما		✓	
مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی		✓	
مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون		✓	
مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک	✓		
مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰	✓		
بازه (۰, ۱)	✓		
مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب		✓	



طرحی از سلول‌های عصبی مغز

- ۲ دو مجموعهٔ منتهای نام ببرید. مجموعهٔ **دایره‌های ریاضی اهواز** - مجموعهٔ **باشندگان** **موجود در یک باشگاه**
- ۳ دو مجموعهٔ نامتنهای مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعهٔ دیگری باشد. مجموعهٔ **اعداد طبیعی** که **زیرمجموعهٔ مجموعهٔ اعداد حسابی است**.
- ۴ دو مجموعهٔ نامتنهای مثل A و B مثال بزنید که  $A \subseteq B$  بوده و  $B - A$  تک عضوی باشد.
- تذکر:** تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های منتهای ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.

۶ ادامهٔ جواب ۳) یا بازه‌ی (۰, ۱) و (-۳, ۷) که  $(۳, ۷) \subseteq (۰, ۱)$

یا مجموعه‌ی دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات با شعاع عدد صحیح که زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات است.

جواب ۴)  $W$  و  $N$  که هر دو منتهای اند و  $N \subseteq W$  و  $\{0\} = W - N$  و بازه‌ی (۰, ۱) و (۱, ۲) که  $(۱, ۲) \subseteq (۰, ۱)$  و  $\{1\} = (۱, ۲) - (۰, ۱)$



گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

- الف)  $\frac{1}{3}$  عددی بین  $0$  و  $1$  است. چهار عدد گویای دیگر از بازه  $(0, 1)$  بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید.  $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}$
- ب) آیا می‌توان بین  $0$  و  $1$  به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله
- پ) در مورد منتهای یا نامنتهای بودن اعداد گویای موجود در بازه  $(0, 1)$  چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ نامنتهای
- ت) در مورد منتهای یا نامنتهای بودن  $Q$  چه می‌توان گفت؟ نامنتهای
- ث) اگر  $A$  دارای یک زیر مجموعه نامنتهای باشد، آنگاه  $A$  یک مجموعه نامنتهای خواهد بود.

عدد آووگادرو  
در شیمی تعداد  $6.022 \times 10^{23}$  عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می‌نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب را که  $18$  گرم است، بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمردن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان ببرد. در این صورت کار شمارش نزدیک به  $20$  میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان است! به نظر شما، مجموعه مولکول‌های یک مول مشخص از آب، یک مجموعه منتهای است یا نامنتهای؟

تعریف

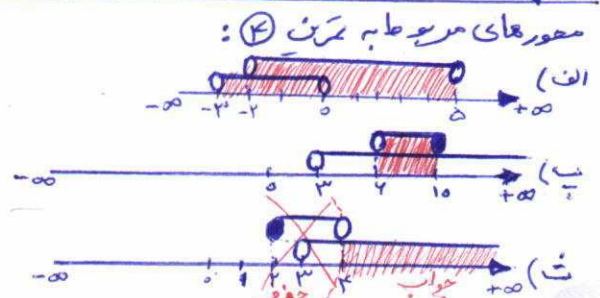
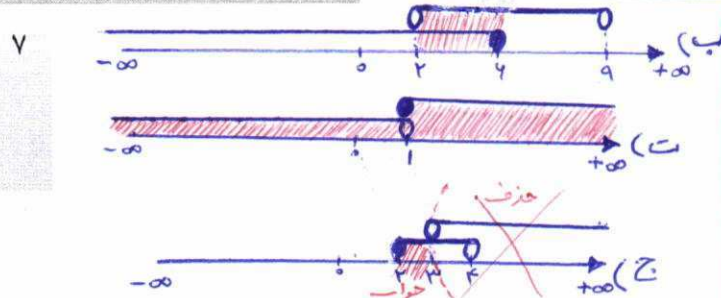
- الف) فرض کنید  $U$  مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد  $5$  باشد.  $U = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$
- ب)  $U$  منتهای است یا نامنتهای؟ نامنتهای
- پ) یک زیر مجموعه منتهای از  $U$  بنویسید.  $C = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$
- ت) دو زیر مجموعه نامنتهای مانند  $C$  و  $D$  از  $U$  بنویسید؛ به طوری که  $C \subseteq D$ .  
 $D = \{10, 20, 30, 40, \dots\}$  مضرب  $10$  و  $C = \{20, 40, 60, 80, \dots\}$  مضرب  $20$  که عبارتند از مضرب  $20$  که  $C \subseteq D$
- الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامنتهای
- ب) مجموعه شماره‌ده‌های طبیعی عدد  $36$ . منتهای
- پ) بازه  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ . نامنتهای
- ت)  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$ . منتهای (بازو جبهه مجموعه‌ی  $\mathbb{N}$  می‌شود  $\emptyset$ )
- ث) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد  $100$ . نامنتهای

- الف) دو مجموعه نامنتهای مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای منتهای باشد.  $[2, 5]$  و  $(-3, 2)$  که اشتراک آنها مجموعه‌ی  $\{2\}$  است که منتهای است.
- ب) حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:

الف)  $(-3, 5] = (-3, 0) \cup (-2, 5]$  ب)  $(2, 6] = (-\infty, 6] \cap (2, 9)$  پ)  $(4, 10] = (3, +\infty) \cap (6, 10]$  ت)  $1\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$  ث)  $[2, 4) = (3, +\infty) - [2, 4)$  ج)  $[2, 3] = [2, 4) - (3, +\infty)$

الف) مجموعه  $\mathbb{R} - \{3\}$  را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.  $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

ب) اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای منتهای باشد، آنگاه  $A$  منتهای خواهد بود یا نامنتهای؟ منتهای

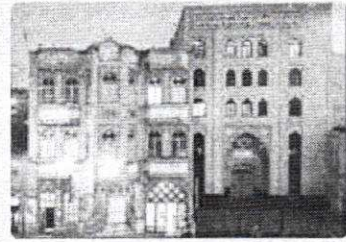




درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

فرض کنیم  $U$  نشان دهنده مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره) و مجموعه کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتاب‌های چاپی این کتابخانه است، با  $A'$  نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را درباره کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال  $U$  را که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد، مجموعه مرجع و  $A'$  را متمم مجموعه  $A$  می‌نامیم.

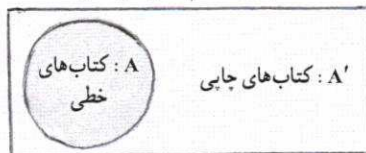


کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره)، در شهر مقدس قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نخستین کتابخانه کشور و سومین کتابخانه جهان اسلام به‌شمار می‌رود. جدول زیر اطلاعات مختصری درباره تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

تعداد	نوع کتاب
۴۲۰۰۰ جلد	کتاب‌های خطی
۱۰۰۰۰۰۰ جلد	کتاب‌های چاپی
۱۰۴۲۰۰۰ جلد	کل کتاب‌ها



$U$ : مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه



در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، **مجموعه مرجع** می‌نامیم و آن را با  $U$  نشان می‌دهیم.

هرگاه  $U$  مجموعه مرجع باشد و  $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه  $U - A$  را متمم  $A$  می‌نامیم و آن را با نماد  $A'$  نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر  $A'$  شامل عضوهای  $U$  است که در  $A$  نیستند.

فعالیت

الف) دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$

ب)  $A$  را با نمایش اعضا و  $B$  را به صورت یک بازه بنویسید.

$A = \{2, 1, 0, -1, -2\}$

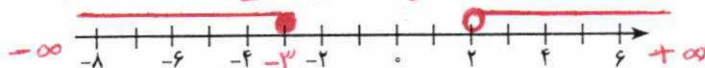
$B = (-3, 2]$

پ) در مورد  $A$ ، اگر مجموعه مرجع را  $\mathbb{Z}$  در نظر بگیریم،  $A'$  را مشخص کنید.

$A' = \mathbb{Z} - A = \{\dots, -4, -3, 3, 4, \dots\} = \{\pm 3, \pm 4, \dots\}$

ت) در مورد  $B$  با فرض این که  $\mathbb{R}$  مجموعه مرجع باشد،  $B'$  را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.

$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$



تهیه کننده:

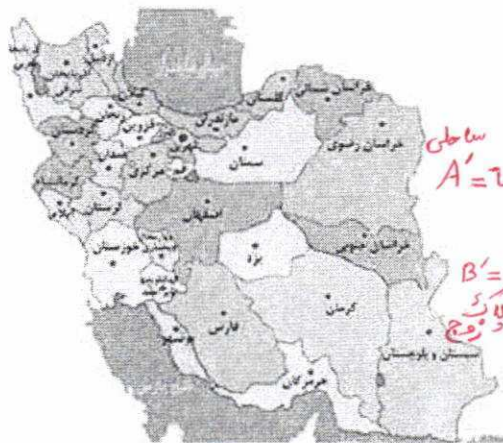
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



# تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

کار در کلاس



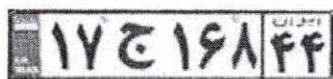
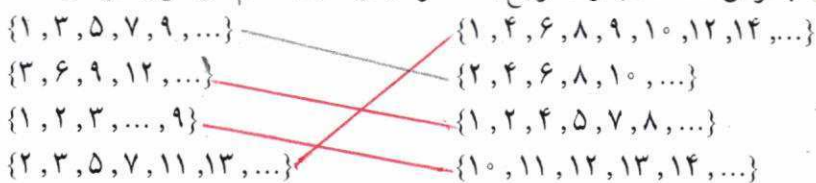
۱ اگر  $U$  مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و  $A$  مجموعه استان‌های غیر ساحلی، آنگاه  $A'$  را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ساحلی  
 $A' = U - A = \{ \text{مازندران، گلستان، خوزستان، بوشهر، هرمزگان، و بروجرد} \}$

۲ فرض کنیم  $U$  مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور و  $B$  مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت  $B'$  چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

مجموعه اتومبیل‌های با پلاک زوج  
 $B' = U - B = \{ \text{مجموعه اتومبیل‌های با پلاک زوج} \}$

۳ با فرض آنکه  $\mathbb{N}$  مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.



۴  $U$  مجموعه مرجع و  $A$  زیرمجموعه دلخواهی از آن می‌باشد. با رسم نمودار، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید. (مثال عددی اضافه در حل شود)



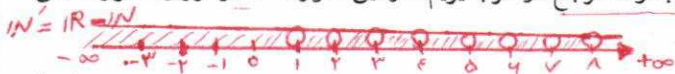
### نرخ بیکاری

جمعیت در سن کار در یک کشور را به عنوان مجموعه مرجع یعنی  $U$  در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $A$  نشان‌دهنده مجموعه افراد شاغل این کشور باشد. در این صورت  $A'$  برابر مجموعه افراد بیکار و نسبت  $\frac{n(A')}{n(U)}$  بیانگر نرخ بیکاری آن کشور خواهد بود.

۵ الف) اگر  $Z$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه  $\mathbb{N}'$  را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

$\mathbb{N}' = Z - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \dots, -1000\}$

ب) اگر  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت  $\mathbb{N}'$  را روی محور نمایش دهید.



۶ فرض کنیم  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{2, 4\}$ . ابتدا  $A'$  و  $B'$  را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$A' = \{4, 5\}$        $B' = \{1, 3, 5\}$

$(A')' = \{1, 2, 3\} = A$

$\Rightarrow (A')' = A$  متمم متمم مجموعه برابر خود مجموعه است.

$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5\}$	$\{5\}$

$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$  متمم اجتماع دو مجموعه برابر اشتراک متمم‌های آن دو مجموعه است.

$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\{2\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$

$\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$  متمم اشتراک دو مجموعه برابر اجتماع متمم‌های آن دو مجموعه است.

$A - B$	$A - (A \cap B)$
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$

$\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$

$B - A = B - (A \cap B)$

توجه:  $A - B = A \cap B'$  و  $B - A = B \cap A'$  اضافه شود، بهر است در حل تمرین



## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

#### تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

در سال گذشته دیدیم که اگر  $A$  یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت  $n(A)$  استفاده می‌شود (مثلاً اگر  $G = \{2, 3, 5, 7\}$  در این صورت می‌توانیم بنویسیم  $n(G) = 4$ ). در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای  $n(A \cup B)$  به دست آوریم.

#### فعالیت

۱ یک تیم کوه‌نوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به‌طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند.  
اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه  $A = \{\text{آینتا، زهرا، الناز، الهام}\}$  و اعضای دانشجوی آن مجموعه  $B = \{\text{فاطمه، معصومه، فرزانه}\}$  هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر  $A \cap B = \emptyset$ .



به هر دو مجموعه مثل  $A$  و  $B$  که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.  
 $(A \cap B = \emptyset)$

الف) اعضای  $A \cup B$  را که بیانگر اعضای تیم کوه‌نوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$A \cup B = \{\text{فرزانه و معصومه و فاطمه و الهام و الناز و زهرا و آینتا}\}$

A	B
آینتا	فاطمه
زهرا	معصومه
الناز	فرزانه
الهام	

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰

جمع تعداد عضوهای  $A$  و  $B$  با هم برابر تعداد عضوهای  $A \cup B$  است.

ب) تعداد عضوهای  $A \cup B$  چه رابطه‌ای با  $n(A)$  و  $n(B)$  دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.  
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه  $A$  و  $B$  برقرار است؟ **با شرط این که دو مجموعه اشتراکی نداشته باشند یعنی  $A \cap B = \emptyset$  (جدا از هم)**

۲ الف) مجموعه‌های شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب  $A$  و  $B$  می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$n(A) = 6 \Rightarrow A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$  : مجموعه شمارنده‌های عدد ۲۸

$n(B) = 8 \Rightarrow B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$  : مجموعه شمارنده‌های عدد ۳۰

$n(A \cap B) = 2 \Rightarrow A \cap B = \{1, 2\}$  : شمارنده‌های مشترک ۲۸ و ۳۰

$n(A \cup B) = 12 \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 28, 30\}$



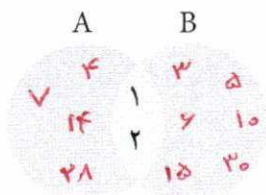
## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

(ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲

@Faragiri10  
ghadam.com



(پ) چرا رابطه ای را که در فعالیت (۱) به دست آوردید؛ یعنی  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$  در این مثال برقرار نیست؟ چون مجموعه های  $A$  و  $B$  عمق مشترک دارند، یعنی  $A \cap B \neq \emptyset$ .

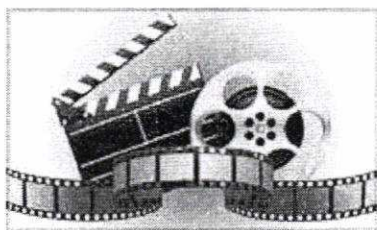
(ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای  $n(A \cup B)$  را حدس بزنید.

همان طور که دیدیم، اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار روبه‌رو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

### کاردرکلاس



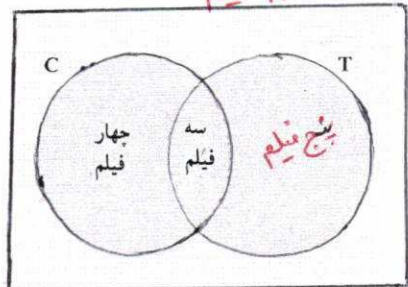
۱ یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

(الف) پویانمایی یا طنزند.

(ب) غیرپویانمایی و غیرطنزند.

روش اول حل: مجموعه شامل تمام فیلم‌ها را با  $U$ ، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با  $C$  و مجموعه فیلم‌های طنز را با  $T$  نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.

$n(A') = n(U) - n(A)$   
طبق این رابطه  
۲۱ فیلم  $U$



الف)  $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = ۷ + ۸ - ۳ = ۱۲$

ب)  $n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = ۲۱ - ۱۲ = ۹$

روش دوم حل: در نمودار وین مقابل، دو مجموعه  $C$  و  $T$  سطح درون  $U$  را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دوتا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.

الف)  $n(C \cup T) = ۴ + ۳ + ۵ = ۱۲$

ب)  $n(C \cup T)' = ۲۱ - ۱۲ = ۹$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

استان خوزستان، مقطع دوم متوسطه



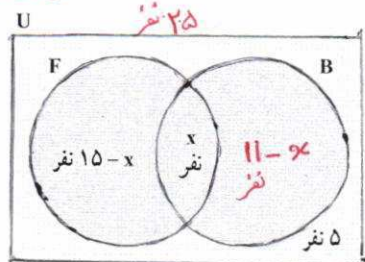
۲ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.

$$(15-x) + x + (11-x) + 5 = 25$$

$$31 - x = 25$$

$$x = 31 - 25$$

$$x = 6 \rightarrow n(B \cap F)$$

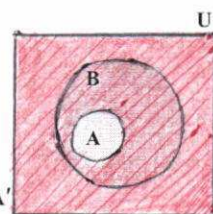


روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس  $n(B \cup F) = 20$ .

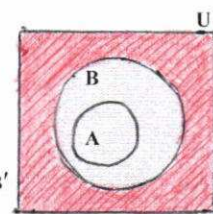
با نوشتن فرمول  $n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F)$  را به دست آورد:

$$20 = 11 + 15 - n(B \cap F) \rightarrow n(B \cap F) = 24 - 20 = 4 \rightarrow n(B \cap F) = 4$$

۳ الف) فرض کنیم  $A \subseteq B \subseteq U$  که در آن  $U$  مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل  $A'$  و  $B'$  را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین  $A'$  و  $B'$  هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟



را  $A'$  هاشور بزنید



را  $B'$  هاشور بزنید

ب) اگر  $U = \{a, b, c, d, e\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{a, b\}$  و  $B = \{a, b, c\}$  در این صورت  $A \subseteq B$  می باشد. با به دست آوردن نشان دهید که بین  $A'$  و  $B'$  هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است.

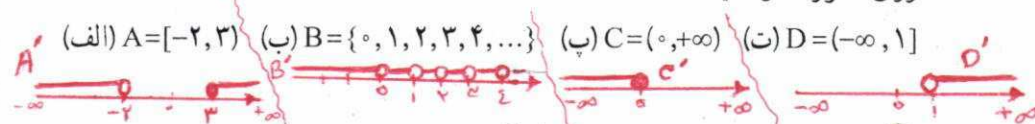
$$A' = U - A = \{c, d, e\} \Rightarrow B' \subseteq A'$$

$$B' = U - B = \{d, e\}$$

نتیجه وقتی بر مجموعه، زیر مجموعه می باشد، متمم مجموعه را نیز بر گرفته، متمم مجموعه ای کوچکتر می شود.

تمرین

۱ IR را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه های زیر را روی محور نشان دهید.



۲ IN را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که  $A'$  هم نامتناهی باشد. مجموعه ای نامتناهی زوج  $A'$  فرد.

ب) مجموعه ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که  $B'$  متناهی باشد.

پ) مجموعه ای متناهی مثل C مثال بزنید و  $C'$  را به دست آورید.  $C'$  متناهی است یا نامتناهی؟

متناهی  $B = \{5, 6, 7, 8, \dots\}$  مجموعه ای نامتناهی زوج  
بزرگتر از ۴

متناهی  $B' = \{1, 2, 3, 4\}$  مجموعه ای نامتناهی فرد  
کوچکتر یا مساوی ۴

$$C = \{2, 3, 5, 7\}$$

متناهی  $\rightarrow$  اعداد طبیعی بزرگتر از ۱

$$C' = \{1, 4, 6, 8, 9, \dots\}$$

نامتناهی  $\rightarrow$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

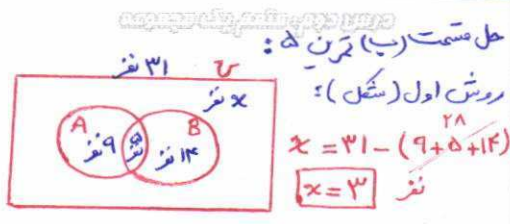


(ب)  $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 40 - 20 = 20$

(پ)  $n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 20 = 20$

(د)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$   
 $n(A \cup B) = 40 + 40 - 20 \Rightarrow n(A \cup B) = 60$

(ت)  $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 60 = 40$



روش دوم (مضروب):

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 14 + 19 - 5 = 28$$

$n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$   
 $n(A' \cap B') = 31 - 28 = 3$

اگر  $n(A) = 15$ ,  $n(A \cap B) = 5$  و  $n(A \cup B) = 30$  را محاسبه کنید.

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 30 = 15 + n(B) - 5$   
 $n(B) = 30 - 10 = 20 \Rightarrow n(B) = 20$

فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که  $n(U) = 100$ .

$n(A) = 60$ ,  $n(B) = 40$  و  $n(A \cap B) = 20$  مطلوب است:

(الف)  $n(A \cup B)$  (ب)  $n(A \cap B')$  (پ)  $n(A' \cap B)$  (ت)  $n(A' \cap B')$

در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

(الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.  $14 - 5 = 9$

(ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

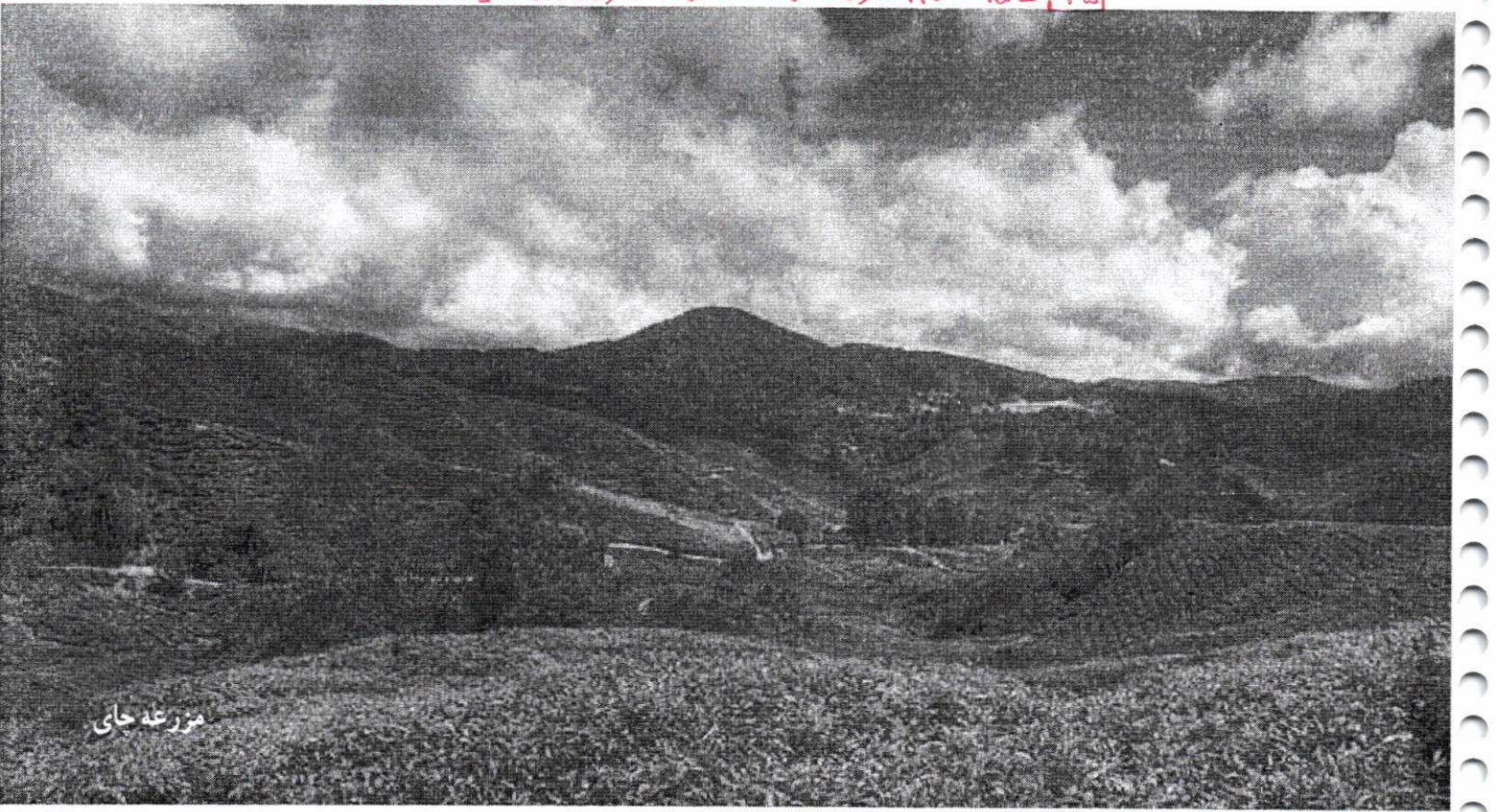
در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

(الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 57 - 32 = 95$

(ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.  $70 - 32 = 38$

(پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.  $38 + 25 = 63$

(ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.  $n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$



مزرعه خانی



## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

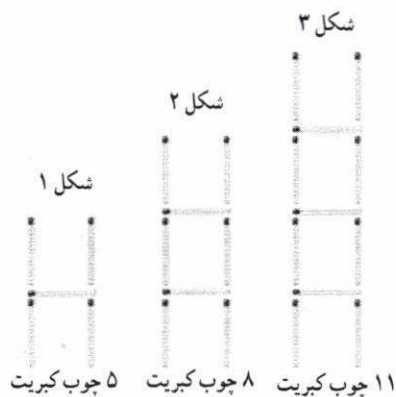
درس سوم: الگو و دنباله

@Faragiri10  
ghadam.com

الگو

مثال

به شکل های زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



شماره شکل: n	۱	۲	۳	۴	...	n	...
تعداد چوب کبریت ها: $a_n$	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین n و $a_n$	$a_1=5$	$a_2=8$	$a_3=11$	...	...	$a_n=...$	...

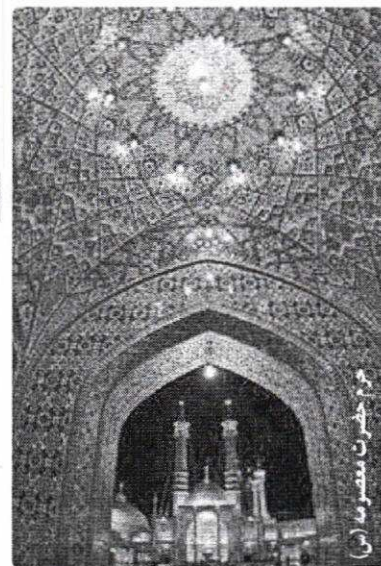
به عنوان مثال ملاحظه می شود که، «تعداد چوب کبریت های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت  $a_1=5$  نشان داده ایم (می خوانیم: a اندیس ۱ برابر ۵). عبارت های  $a_1$ ،  $a_2$  و  $a_3$  متغیرهای اندیس دار نامیده می شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵، ۸، و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگو است؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.

$a_1$	$a_2$	$a_3$
۵	۸	۱۱

الف) با این نمادگذاری،  $a_p$  نشان دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟ جمله پنجم الگو - ۱۴

ب)  $a_n$  به چه معناست؟ جمله n ام الگو

پ) آیا می توانید حاصل  $a_n$  را بر حسب n بدست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.



دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح های روی یک گل آفتابگردان، شکل های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا ماریچ های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

از طرف دیگر یکی از رسالت های مهم ریاضیات، مدل سازی کردن پدیده های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعه الگوها.

۱- در سال های گذشته با متغیرهایی مثل x و y و z سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس دار که در اینجا به کار می بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

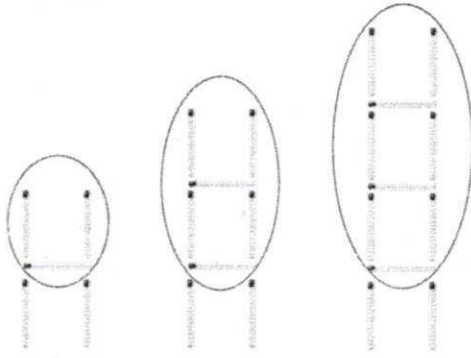


طی (۳) راه های دیگری برای به دست آوردن  $a_n$ :

$a_1 = 2(3) - 1$      $a_2 = 3(3) - 1$      $a_3 = 4(3) - 1$      $a_4 = 5(3) - 1$     ...     $a_n = (n+1)(3) - 1$  (ساده شده)  
 به راه اول  
 $a_1 = 2(4) - 3$      $a_2 = 3(4) - 4$      $a_3 = 4(4) - 5$      $a_4 = 5(4) - 6$     ...     $a_n = (n+1)(4) - (n+2)$  (نمایان)  
 به راه دوم  
 $a_1 = 5 + 0(3)$      $a_2 = 5 + 1(3)$      $a_3 = 5 + 2(3)$      $a_4 = 5 + 3(3)$     ...     $a_n = 5 + (n-1)(3)$  (نشان  $a_n = 3n + 2$  من شود)

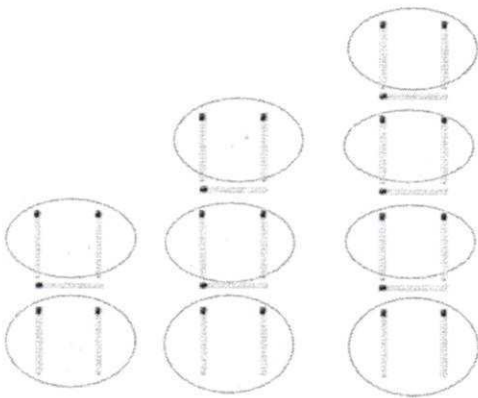
**فعالیت**

۱ آیدا برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  در مثال بالا، شکل های الگورا به صورت روبه رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار  $a_n$  و  $a_{10}$  را به دست آورید.



$a_1 = 1(3) + 2$      $a_2 = 2(3) + 2$      $a_3 = 3(3) + 2$      $a_4 = 4(3) + 2$     ...     $a_n = n(3) + 2$     ...     $a_{10} = 10(3) + 2$   
 تعداد چوب کبریت در شکل ①  
 مرتب شده  $a_n = 3n + 2$

۲ آیساروش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار  $a_n$  دست یابد. مقدار حاصل برای  $a_n$  از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.



$a_1 = 1 + 2(2)$      $a_2 = 2 + 3(2)$      $a_3 = 3 + 4(2)$      $a_4 = 4 + 5(2)$     ...     $a_n = 1 + (n-1)2$     ...     $a_n = n + (n-1)(2)$   
 چوب های عمودی    چوب های افقی

@Faragiri10  
ghadam.com

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل  $a_n$  می دانید؟ جواب در بالای صفحه

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیساروش به صورت های  $a_n = 3n + 2$  و  $a_n = n + (n-1)(2)$  به دست آوردند. جواب آیساروش را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

همان جواب آیدا  $a_n = 3n + 2$     همان جواب آیساروش  $a_n = n + 2n + 2 \Rightarrow a_n = 3n + 2$

۵ به کمک رابطه  $a_n = 3n + 2$  تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بیابید.

$n = 30 \Rightarrow a_{30} = 3(30) + 2 = 92 \Rightarrow a_{30} = 92$

۶ با استفاده از رابطه  $a_n = 3n + 2$  مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است. یعنی ۲۵ امین شکل دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.  $n = 25$

$a_n = 3n + 2 \Rightarrow 3n = 77 - 2 \Rightarrow n = \frac{75}{3} = 25 \Rightarrow n = 25$

تذکر: در مثال بالا دیدیم که  $a_n$  بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل  $n$  ام است.  $a_n = 3n + 2$  را جمله عمومی الگو می نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو است.

## تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تعلیق از مجموعه کتاب و جزئیات

### الگوی خطی

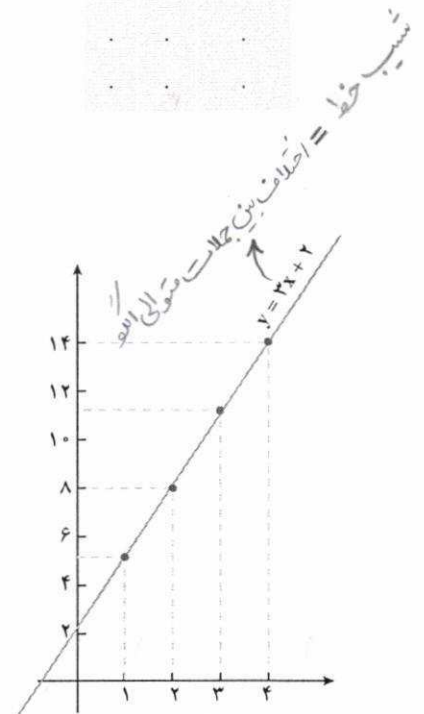
در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبل از خودش بود.

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...
۵	۸	۱۱	۱۴	...

$\begin{matrix} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ +3 & +3 & +3 \end{matrix}$

n	$a_n$	$(n, a_n)$
۱	۵	(۱, ۵)
۲	۸	(۲, ۸)
۳	۱۱	(۳, ۱۱)
۴	۱۴	(۴, ۱۴)
...	...	...

(چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم.) برای بی بردن به دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط  $y=3x+2$  قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند. شباهت بین معادله خط یعنی  $y=3x+2$  و جمله عمومی الگو یعنی  $a_n=3n+2$  اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.



$$... c_n, b_n, a_n, t_n$$

به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت  $t_n = an + b$  است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر  $a$  بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضرب  $n$  است. به عنوان مثال (در یک الگوی خطی با جمله عمومی  $t_n = -4n + 15$ )، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

$$\begin{matrix} -4 & -4 & -4 \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ 11, 7, 3, -1, -5, -9, \dots \end{matrix}$$

### مثال

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

شان حسابی شیب خط

$$a = \frac{\text{تفاضل ی‌ها}}{\text{تفاضل xها}} = \frac{41-17}{10-4} = \frac{24}{6} = 4 \quad \boxed{a=4}$$

حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت  $C_n = an + b$  باشد. پس داریم:

$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

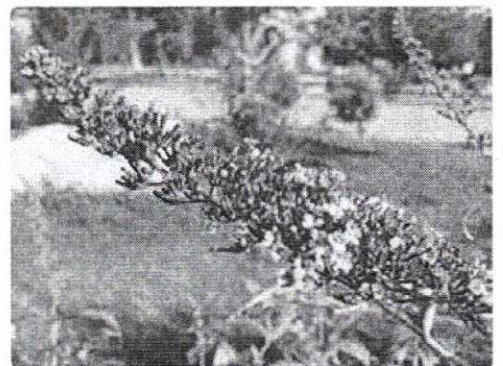
$$6a = 24 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

پس  $C_n = 4n + 1$  بنابراین جملات الگو به صورت زیر خواهند بود:

$$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, \dots$$

$\begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 & C_9 & C_{10} \end{matrix}$

یعنی هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد افزایش می‌یابد.

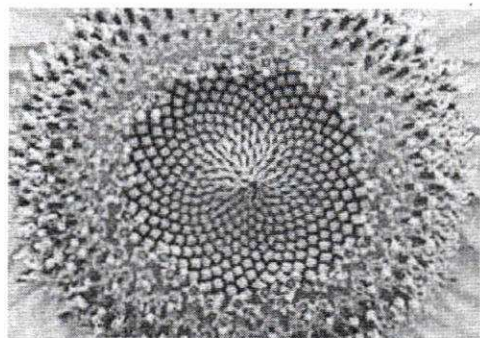




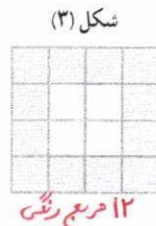
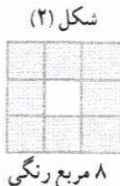
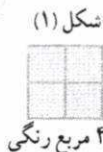
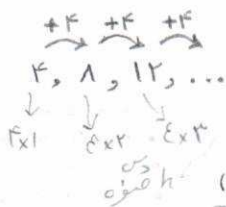
## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

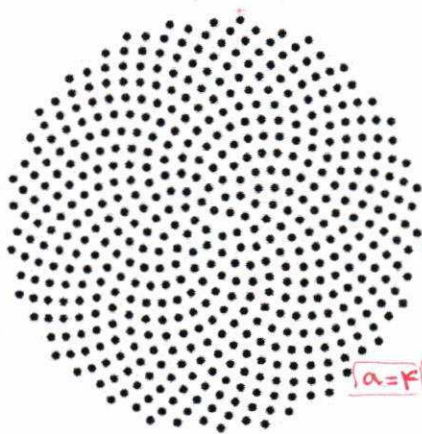
کاردرکلاس



۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد مربع های رنگی : $b_n$	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین n و $b_n$	$b_1=4$	$b_2=8$	$b_3=12$	$b_4=16$	$b_5=20$



۲ توضیح دهید که چرا این الگوی الگوی خطی محسوب می شود. **چون اختلاف هر دو جمله متوالی در آن عددی ثابت است**

۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه  $b_n = an + h$  را بیابید و پس از

حدس زدن مقدار h، حاصل  $b_n$  را به دست آورید. **اختلاف هر دو جمله متوالی برابر ۴ است پس  $a=4$  و  $h=0$  پس  $b_n = 4n + 0 = 4n$**

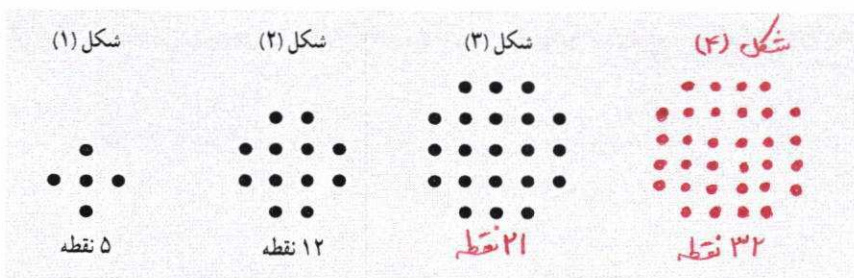
۴ شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟  **$b_{250} = 4 \times 250 = 1000$**

۵ در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟  
 **$b_n = 4n \Rightarrow 144 = 4n \Rightarrow n = \frac{144}{4} = 36 \Rightarrow n = 36$**   
یعنی در مرحله و شصت و سه، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ تا می شود

الگوهای غیر خطی

## فعالیت

۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.



شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه ها : $t_n$	۵	۱۲	۲۱	۳۲	...
رابطه بین n و $t_n$	$t_1=5$	$t_2=12$	$t_3=21$	$t_4=32$	...

۲ آیا این الگوی الگوی خطی است؟ چرا؟ **خیر - چون اختلاف هر دو جمله متوالی در آن عددی ثابت نیست**

## تهیه کننده:

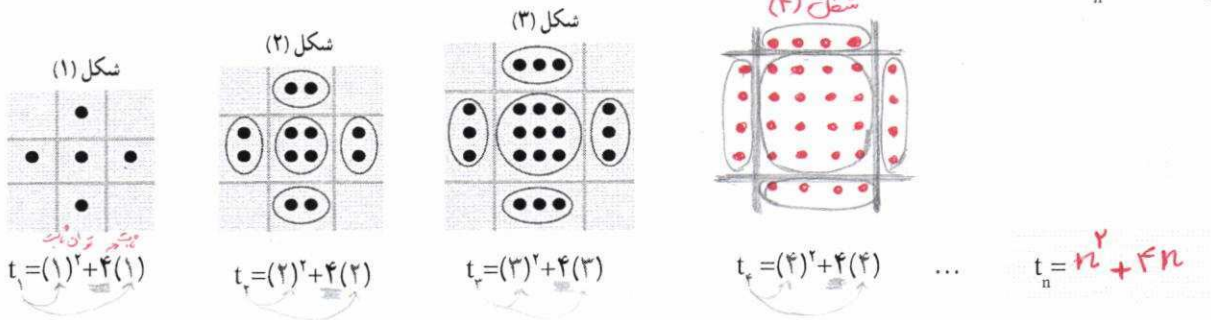
### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

## تهیه کننده:

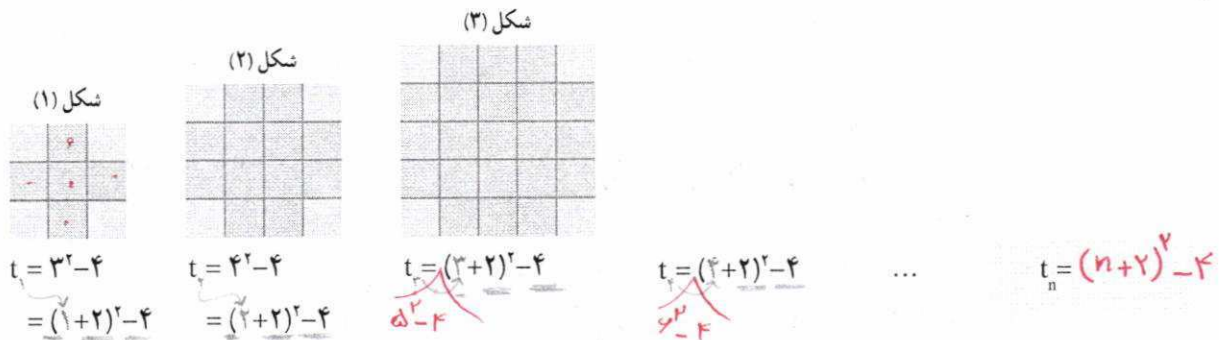
### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

شکل (۱) الگوی هندسی

۳ امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته بندی کرد. از شکل های امیررضا کمک بگیرید و مقدار  $t_n$  را بیابید.



۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل ها مقدار  $t_n$  را بنویسید.



۵ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای  $t_n$  در دو قسمت قبلی، برابرند. *آه (دو جوابی جواب امیرمحمد)*

$$t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 \Rightarrow t_n = n^2 + 4n \rightarrow \text{که همان جواب امیررضا است}$$

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن  $t_n$  می شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

#### دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظیر کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل های متوالی الگو به صورت زیر بود:

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵, .....

این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

یک سری (ردیف)

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می گیرند، یک **دنباله** می نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می شوند.

## تهیه کننده:

### گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

هر الگو عددی یک دنباله است



# تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

توجه داشته باشید

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با  $t_1$ ، جمله دوم را با  $t_2$  و به همین ترتیب جمله  $n$ ام یا جمله عمومی آن را با  $t_n$  نمایش می دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله ای درجه دوم است.

بجمله آخر گفته شد

کار در کلاس

۱ دو دنباله دلخواه مثال بزنید.

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

الف)  $a_n = n^2 - 1$  :  $0, 3, 8, 15, 24$

ب)  $b_n = -n + 4$  :  $3, 2, 1, 0, -1, -2$

ج)  $c_n = -12 + 2n$  :  $-11, -9, -7, -5, -3$

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	...	$t_n$	...
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	...	-n	...
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$	...	$\sqrt{2n-1}$	...
1	4	9	16	25	36	49	...	$n^2$	...
0/1	0/01	0/001	0/0001	0/00001	0/000001	0/0000001	...	$(0/1)^n$	...
-1	8	-27	64	-125	216	-343	...	$(-1)^n (n^3)$	...
5	18	31	44	57	70	83	...	$13n-8$	...
-2	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{32}$	...	$(-1)^n \times 2^{2-n}$	...
1	2	4	7	11	16	23	...	...	...
3	1	4	1	5	1	4	1	...	...
1	1	2	3	5	8	13	21	...	...
2	3	5	7	11	13	17	...	...	...
4	3	5	7	9	11	13	...	...	...

دنباله های مربعی

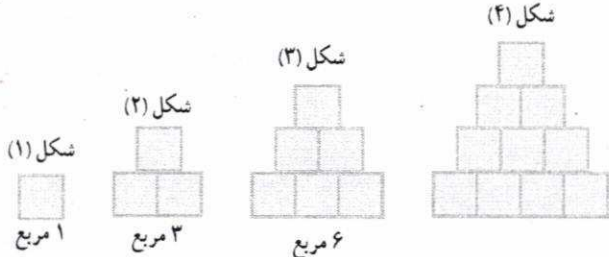
ن در صورت

دنباله های فیبوناچی

اعداد اول دنباله

اولی تک واحد اضافه شده و بعدی ها 2 واحد

خواسته شده



۴ الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

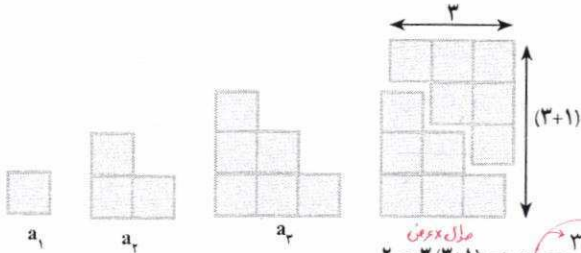
الف) تعداد مربع ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.  $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$  (دنباله مثلثی)

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟ چون اختلاف

هر دو جمله متوالی آن، عددی ثابت نیست.

# تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



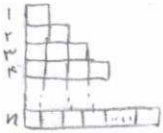
(ب) شکل های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می کنیم.  
با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل  $a_n$  را بر حسب  $n$  به دست آورید.

$$2a_2 = 2(3+1) \Rightarrow a_2 = \frac{2(3+1)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

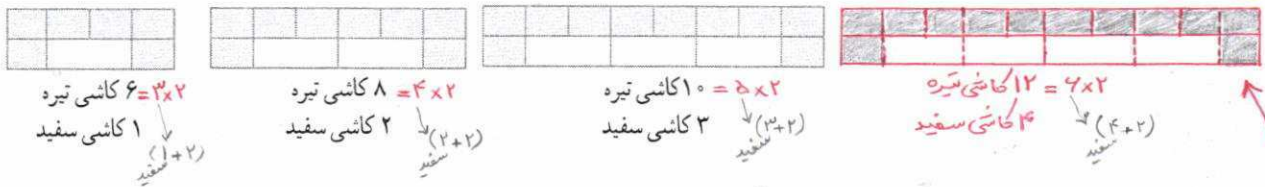
$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

همان جمله  $n$  ام مرتبه قبل



تمرین

۱ به الگوی زیر توجه کنید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی های تیره آن را مشخص کنید.

(ب) تعداد کاشی های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید.  $6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots$

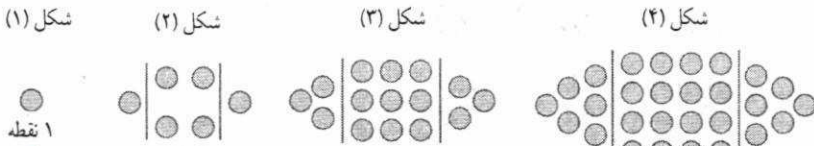
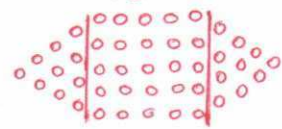
(پ) اگر  $n$  تعداد کاشی های سفید و  $t_n$  تعداد کاشی های تیره باشد، مقدار  $t_n$  را بر حسب  $n$  بنویسید.  
 $t_n = (n+2)(2)$  تعداد سفیدها

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟  
 $t_{100} = (100+2)(2) = 204$  کاشی تیره

(ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی های سفید آن چقدر است؟  $23$  تا

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.  
 $t_n = (n+2)(2) \Rightarrow 50 = 2n+4 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$

شکل (۵)



$$a_5 = 25 + 20 = 5^2 + (4 \times 5)$$

(الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید.  $1, 6, 15, 28, 45, 66, \dots$

(ب) جمله عمومی الگو را بیابید.  $a_n = n^2 + (n-1)n$  ساده شده شش

(پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟  
 $a_{10} = 10^2 + (10-1)(10) = 190$

۳ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید. (جواب در بالای صفحه بعد)

(الف)  $a_n = 4n$

(ب)  $b_n = 3n+1$

(پ)  $c_n = n^2+2$

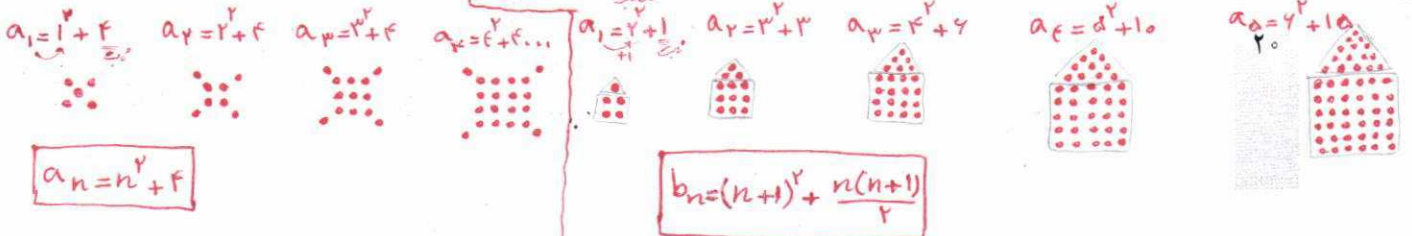
(ت)  $d_n = n^2+n$   $\frac{n(n+1)}{2}$

۴ برای دنباله های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

(الف)  $5, 8, 13, 20, 29, \dots$

(ب)  $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

۶ الگوی هندسی:  $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots$





الف) ... و ۲۰، ۱۴، ۸، ۲

$1 \times 1$     $2 \times 2$     $3 \times 3$     $4 \times 4$

ب) ... و ۱۰، ۷، ۴

$1 \times 1 + 1$     $2 \times 2 + 1$     $3 \times 3 + 1$     $4 \times 4 + 1$

پ) ... و ۱۸، ۱۱، ۶، ۳

$1^2 + 2$     $2^2 + 2$     $3^2 + 2$     $4^2 + 2$

ت) ... و ۲۰، ۱۲، ۶، ۲

$1 \times 2$     $2 \times 3$     $3 \times 4$     $4 \times 5$

ی  
 $\rightarrow n+n$   
 $\rightarrow n(n+1)$

### درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

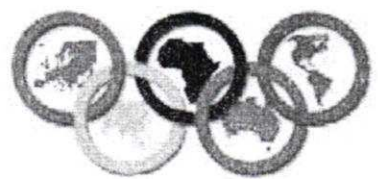
#### دنباله حسابی

در صفحات قبل، مثال‌هایی از الگوهای عددی خطی ارائه شد. نام دیگر این گونه الگوهای عددی، دنباله‌های حسابی است. به عبارت دیگر:

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنباله حسابی نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند.

(d)

#### فعالیت



۱ سال‌های برگزاری مسابقات المپیک از آغاز هزاره سوم میلادی به بعد به صورت زیر است که جملات یک دنباله حسابی اند.

۲۰۰۰، ۲۰۰۴، ۲۰۰۸، ۲۰۱۲، ۲۰۱۶، ۲۰۲۰، .....

الف) جمله اول و قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.  $t_1 = 2000$ ,  $d = 4$

ب) نهمین دوره المپیک در این هزاره در چه سالی برگزار خواهد شد؟ ۲۰۳۲

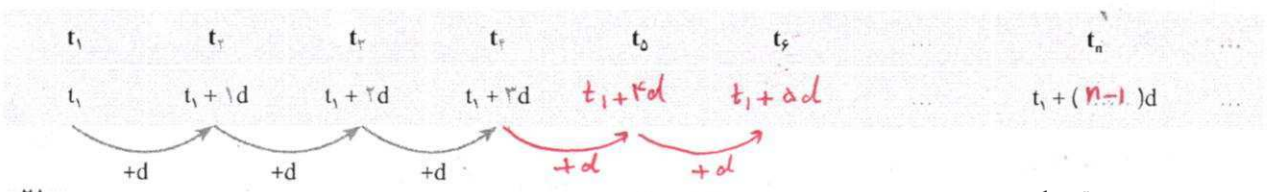
پ) با تکمیل جدول زیر، جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.

$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	...	$t_n$
$2000 + 0(4)$	$2000 + 1(4)$	$2000 + 2(4)$	$2000 + 3(4)$	...	$2000 + (n-1)(4)$

ت) بیست و چهارمین دوره المپیک در هزاره سوم میلادی در چه سالی برگزار خواهد شد؟

$t_{24} = 2000 + (24-1)(4) = 2092$

۲ با تکمیل جدول زیر، سعی کنید ساختار کلی جمله عمومی یک دنباله حسابی را به دست آورید.



تهیه کننده:

$$b_n = b_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

همان‌طور که مشاهده شد،

جمله  $n$ ام یک دنباله حسابی با جمله اول  $t_1$  و قدر نسبت  $d$  به صورت  $t_n = t_1 + (n-1)d$  است.

کاردرکلاس

۱ در دنباله‌های حسابی زیر با مشخص کردن قدرنسبت، سه جمله بعدی را بنویسید و سپس

جمله عمومی هر کدام را به دست آورید.

الف)  $5, 10, 15, 20, \boxed{25}, \boxed{30}, \boxed{35}, \dots, d=5, a_n = 5 + (n-1) \times 5 = 5n$

ب)  $1, 3, 5, 7, \boxed{9}, \boxed{11}, \boxed{13}, \dots, d=2, b_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$

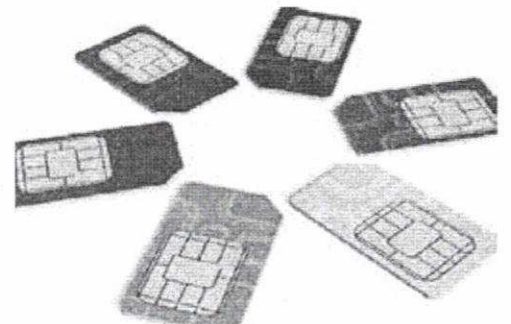
پ)  $5, 9, 13, 17, \boxed{21}, \boxed{25}, \boxed{29}, \dots, d=4, c_n = 5 + (n-1) \times 4 = 4n+1$

ت)  $13, 7, 1, -5, \boxed{-11}, \boxed{-17}, \boxed{-23}, \dots, d=-6, d_n = 13 + (n-1) \times (-6) = -6n + 19$

۲ A و B دو شرکت عرضه‌کننده سیم کارت‌های تلفن همراه با شرایط زیرند.

سیم کارت‌های شرکت B  
 هزینه ثابت ماهانه: ۳۰۰۰ تومان  
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۲۰ تومان

سیم کارت‌های شرکت A  
 هزینه ثابت ماهانه: ۲۰۰۰ تومان  
 هزینه هر دقیقه مکالمه: ۳۰ تومان



فرض کنیم  $a_n$  نشان‌دهنده هزینه کل  $n$  دقیقه مکالمه ماهانه از طریق سیم کارت شرکت A و  $b_n$  هزینه مشابه برای استفاده از سیم کارت شرکت B باشد.

$$a_n = 2000 + 30n$$

$$b_n = 3000 + 20n$$

الف) مقدار  $a_n$  و  $b_n$  را برحسب  $n$  بنویسید.  
 ب) جدول زیر را کامل کنید.

n: زمان مکالمه ماهانه (دقیقه)	۴۰	۸۰	۱۲۰	۱۶۰
A کارت سیم هزینه $a_n$	۲۰۰۰	۳۲۰۰	۴۴۰۰	۵۶۰۰
B کارت سیم هزینه $b_n$	۳۰۰۰	۳۸۰۰	۴۶۰۰	۵۴۰۰

چون جمله عمومی هر دو نشان به شکل خط  $t_n = an + b$  است با اینکه اختلاف هر دو جمله متوالی آن‌ها برابر عددی ثابت است.

پ) آیا  $a_n$  و  $b_n$  هر کدام می‌توانند جمله عمومی یک دنباله حسابی باشند؟ چرا؟

اگر جواب مثبت است، قدرنسبت هر یک را مشخص کنید  
 $a_n: d = 3200 - 2000 = 1200$   
 $b_n: d = 3800 - 3000 = 800$

ت) سارا در هر ماه حدود یک ساعت و فاطمه ماهانه تقریباً ۱۵۰ دقیقه با تلفن همراه مکالمه می‌کنند. به هر یک از آنها کدام سیم کارت را پیشنهاد می‌کنید؟ چرا؟

سیم سارا سیم کارت شرکت A شش‌دقیقه در یک ساعت

$$a_{40} = 2000 + 30(40) = 3200$$

$$b_{40} = 3000 + 20(40) = 3800$$

سیم فاطمه سیم کارت شرکت B

$$a_{150} = 2000 + 30(150) = 4500$$

$$b_{150} = 3000 + 20(150) = 6000$$







دنباله حسابی  $1, 5, 9, 13, 17, \dots$  دنباله حسابی  $1, 5, 9, 13, 17, \dots$

الف)  $t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow t_n = 1 + (n-1)4 \rightarrow \boxed{t_n = 4n - 3}$

پ)  $397 = 4n - 3 \rightarrow 400 = 4n \rightarrow \boxed{n = 100}$

مثال: دنباله حسابی  $t_n = t_1 + (n-1)d$   
الف)  $t_n = 3 + (n-1)7 \rightarrow t_{11} = 3 + 7 \times 10 = \boxed{74}$

ب)  $a_n = \sqrt{3} + (n-1)\sqrt{3} \rightarrow a_{11} = \sqrt{3} + 10\sqrt{3} = \boxed{11\sqrt{3}}$

ت)  $b_n = 10 + (n-1)(-2) \rightarrow b_{11} = 10 - 20 = \boxed{-10}$

ث)  $c_n = \frac{2}{5} + (n-1)(\frac{1}{5}) \rightarrow c_{11} = \frac{2}{5} + \frac{10}{5} = \boxed{\frac{12}{5}}$

ج)  $t_n = 2 + (n-1)(0) \rightarrow t_{11} = 2 + 0 = \boxed{2}$

از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آنها با تعیین قدرنسبت، جمله بیست و یکم را بیابید.

- الف)  $3, 10, 17, 24, \dots \rightarrow t_1 = 3, d = 7$
- ب)  $1, 2, 4, 8, \dots$
- پ)  $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots \rightarrow t_1 = \sqrt{3}, d = \sqrt{3}$
- ت)  $10, 7, 4, 1, \dots \rightarrow t_1 = 10, d = -3$
- ث)  $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots \rightarrow t_1 = \frac{2}{5}, d = \frac{1}{5}$
- ج)  $2, 2, 2, 2, \dots \rightarrow t_1 = 2, d = 0$

در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.  
ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید.  
پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ است؟



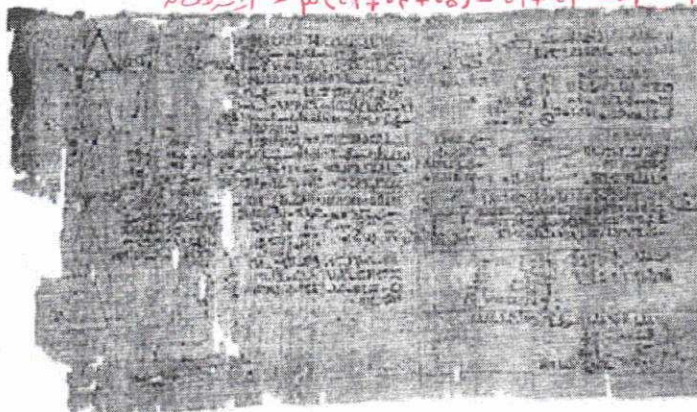
الف) واسطه حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟  
ب) واسطه حسابی بین ۲۰ و ۳۰ چه عددی است؟  
پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

برای جمله  $n$  وسط برابر مجموع جمله اول و سوم است یعنی  $2b = a + c$

مسئله زیر در پاپیروس رابند آمده است. آن را حل کنید.

«۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 100 \rightarrow 5t_1 + 10d = 100$   
 $\frac{1}{3}(t_3 + t_4 + t_5) = t_1 + t_2 \rightarrow -t_1 + 2d = 0$



بخشی از پاپیروس رابند

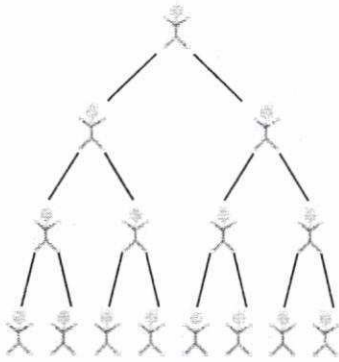
$$\begin{cases} 5t_1 + 10d = 100 \\ -t_1 + 2d = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{20d = 100}{20} \rightarrow d = 5 \quad -t_1 + 2d = 0 \rightarrow t_1 = 10$$

دنباله: ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰

قدیمی‌ترین کتاب ریاضی جهان تاریخ تقریبی پاپیروس رابند (یا احمس) سال ۱۶۵۰ قبل از میلاد است. این پاپیروس یک متن ریاضی می‌باشد که تا حدودی ماهیت یک کتاب راهنما را دارد و شامل ۸۵ مسئله به خط هیراتی است. احمس کاتب، آن را از روی یک اثر قدیمی‌تر نسخه‌برداری کرده است. این پاپیروس در سال ۱۸۵۸ میلادی به وسیله مصرشناس اسکاتلندی، هنری رابند، در مصر خریداری شد و سپس به موزه بریتانیا منتقل شد. پاپیروس‌های رابند (۱۶۵۰ ق.م. و مسکو (۱۸۵۰ ق.م.) از منابع اصلی اطلاعات ما درباره ریاضیات مصر باستان هستند. پاپیروس رابند در سال ۱۹۲۷ منتشر شد. این پاپیروس حدود ۵/۵ متر طول و ۳۰ سانتی‌متر عرض دارد.

۱- Ahmes  
۲- A. Henry Rhind





### دنباله هندسی

علی به بیماری آنفولانزا مبتلا شده است. روز شنبه چند تن از دوستانش بدون آنکه ماسک زده باشند، به عیادت او آمدند. در این زمان ویروس آنفولانزا از راه تنفس وارد بدن امید و محسن می شود؛ چرا که آنها روز یکشنبه مبتلا به این بیماری شدند. اگر پیشگیری انجام نشود و موارد بهداشتی مراعات نگردد، پیش بینی می شود که انتشار ویروس تا مدتی با همین الگو ادامه یابد؛ یعنی امید و محسن در روز اول بیماری خود، هر کدام ویروس را به ۲ نفر دیگر منتقل کنند؛ به طوری که روز دوشنبه ۴ نفر جدید از طریق آنها مبتلا شوند و این روند ادامه پیدا کند.

### فعالیت

۱ جدول مقابل را کامل کنید و  $t_n$  را بیابید.

۲ در روز دهم چند فرد جدید مبتلا می شوند؟  $n=10$

۳ در روز یازدهم چند شخص جدید به این بیماری مبتلا می شوند؟  $n=11$

۴ در روز چندم تعداد افراد جدیدی که به بیماری آنفولانزا مبتلا می شوند، برابر ۱۶۳۸۴  $n=?$

نفر می شود.  $t_n = 2^n \rightarrow 16384 = 2^n \rightarrow 2^{14} = 2^n \rightarrow n = 14$  نفر

در مثال بالا می توانیم تعداد مبتلایان جدید هر روز را به صورت دنباله زیر بنویسیم:

۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, .....

این دنباله یک دنباله حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

اینگونه دنباله ها را دنباله های هندسی می نامیم. یعنی:

$t_n$ : تعداد افراد جدیدی که در  $n$ : روز  
روز  $n$  ام مبتلا می شوند

۱ (امید و محسن) ۲

۲  $2 \times 2 = 2^2$

۳  $4 \times 2 = 2^3$

۴  $8 \times 2 = 16 = 2^4$

۵  $16 \times 2 = 32 = 2^5$

۶  $32 \times 2 = 64 = 2^6$

...

$t_n = 2^n$

دنباله هندسی، دنباله ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از

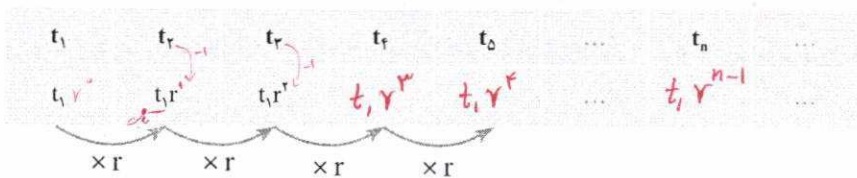
خودش در عددی ثابت به دست می آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می نامیم.

(عبارت صحیح)

سوال مهم: هندسی نسبت حسابی (در آن مرکز زینت است)

### فعالیت

در حالت کلی در یک دنباله هندسی، اگر جمله اول  $t_1$  و قدرنسبت  $r$  باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود. جدول را تکمیل کنید.



تهیه کننده:

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می شود که :

جمله nام دنباله هندسی به صورت  $t_n = t_1 r^{n-1}$  است که در آن  $t_1$  جمله اول و r قدرنسبت می باشد.

کار در کلاس

۱ نرگس و نگار برای محاسبه هفتمین جمله دنباله هندسی ۹، ۳، ۱، ..... روش های مقابل را به کار برده اند.

کدام یک از آنها این مثال را درست حل کرده اند؟ توضیح دهید برای محاسبه قدرنسبت دنباله هندسی باید هر جمله را نسبت به جمله قبلیش کرد.

نگار ✓	نرگس ✗
$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	$r = \frac{9}{3} = 3$
$t_7 = 9 \left(\frac{1}{3}\right)^{7-1}$	$t_7 = 9(3)^{7-1}$
$= \frac{1}{81}$	$= 6561$

۲ در دنباله های هندسی زیر، قدرنسبت را مشخص کنید و دو جمله بعدی را بنویسید. سپس جمله عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف)  $a_1, 6, 18, 54, \boxed{162}, \boxed{486}, \dots, a_n = 2 \times 3^{n-1}$   
 $\downarrow \quad \downarrow$   
 $\times 3 \quad \times 3 = r$

ب)  $b_1, 10, 20, 40, \boxed{80}, \boxed{160}, \dots, b_n = 5 \times 2^{n-1}$   
 $\downarrow \quad \downarrow$   
 $\times 2 \quad \times 2 = r$

ج)  $c_1, -6, -60, -600, -6000, \boxed{70000}, \boxed{-700000}, \dots, c_n = 7 \times (-10)^{n-1}$   
 $\downarrow \quad \downarrow$   
 $\times (-10) \quad \times (-10) = r$

د)  $d_1, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{4}}, \boxed{\frac{1}{8}}, \dots, d_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$   
 $\downarrow \quad \downarrow$   
 $\times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2} = r$

۳ الف) اگر بین ۳ و ۴۸، عدد ۱۲ را قرار دهیم، سه عدد حاصل تشکیل دنباله هندسی می دهند. در این حالت می گوئیم ۱۲ واسطه هندسی بین ۳ و ۴۸ است. برای این کار به جز ۱۲ چه عدد دیگری را می توان در نظر گرفت؟ هیچ عدد دیگری نمی شود در نظر گرفت.

$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_3 = 48 \end{cases} \Rightarrow \frac{48}{3} = r^2 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow \boxed{r = 4}$   
 $\begin{matrix} 3 & 12 & 48 \end{matrix}$

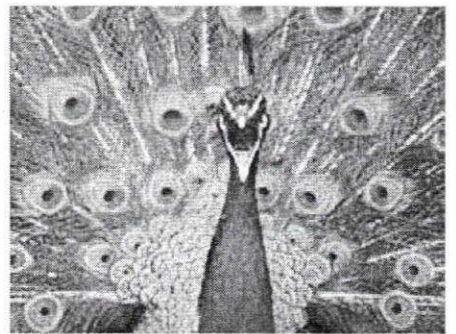
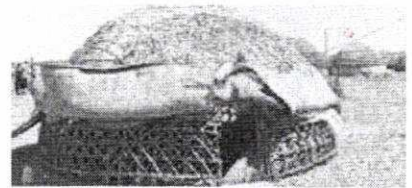
ب) بین ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟ خیر

$t_1 = 3, t_5 = 48 \Rightarrow \frac{48}{3} = r^4 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow \boxed{r = 2}$   
 $\begin{matrix} 3 & 6 & 12 & 24 & 48 \end{matrix}$

پ) جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

$t_1 = 10, t_4 = 4000 \Rightarrow \frac{4000}{10} = r^3 \Rightarrow r^3 = 400 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{400}}$   
 $\begin{matrix} 10 & 100 & 1000 & 10000 \end{matrix}$

$t_1 = 10, t_6 = 80000 \Rightarrow \frac{80000}{10} = r^5 \Rightarrow r^5 = 8000 \Rightarrow r = 16 \Rightarrow \boxed{r = 16}$   
 $\begin{matrix} 10 & 160 & 2560 & 40960 & 655360 & 10485760 \end{matrix}$





$10000$  و  $10000 \times \frac{4}{5}$  و  $10000 \times (\frac{4}{5})^2$  و  $10000 \times (\frac{4}{5})^3$  و  $10000 \times (\frac{4}{5})^4$  و ...  
 $10000$  و  $8000$  و  $6400$  و  $5120$  و  $4096$  و ...  
 $\rightarrow$  دنباله هندسی:  $a_n = 10000 \times (\frac{4}{5})^{n-1}$



۴ یک کوه بخی هزار تپی، در هر روز یک پنجم وزن خود را از دست می‌دهد.  
 پس از گذشت ۵ روز کدام گزینه درست است؟  
 الف) چیزی از آن باقی نمی‌ماند.  
 ب) حدود  $\frac{1}{3}$  آن باقی می‌ماند.  
 ج) تقریباً نصف آن آب می‌شود.  
 د) حدود  $\frac{2}{3}$  آن باقی می‌ماند.

تمرین

از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف)  $7, 28, 112, 448, \dots$   $\rightarrow r=4$   
 ب)  $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$   $\rightarrow r=1$   
 ج)  $5, 5, 5, 5, \dots$   $\rightarrow r=1$   
 د)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$   $\rightarrow r=\frac{1}{2}$

جند دنباله هندسی با قدر نسبت  $\frac{4}{5}$  می‌توان ساخت؟ دو مورد را بنویسید.  
 الف)  $2, 4, 8, 16, 32, \dots$  و ب)  $1, 2, 4, 8, 16, \dots$

درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن توضیح دهید و در صورت نادرست بودن مثال نقض ارائه کنید.  
 الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.  $\times$  دنباله‌ها می‌توانند هم حسابی و هم هندسی باشند.  
 ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.  $\times$  دنباله‌های ثابت هم حسابی و هم هندسی اند.  
 ج)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  و  $2, 4, 8, 16, 32, \dots$  هر دو دنباله هندسی هستند.

علی دوجرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوجرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.  $\frac{4}{5}$  قیمت قبلی باقی بماند.  
 الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوجرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟  
 ب) قیمت دوجرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟  
 $t_n = 500000 \times (\frac{4}{5})^{n-1}$

حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله هندسی مقابل را محاسبه کنید.  
 $2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{210}$

جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.  
 بنابر آمار منتشر شده از جانب پزشکی قانونی کشور، آمار تلفات جانشانی از عدد ۲۷۷۵۹ نفر در سال ۱۳۸۴ به عدد ۱۶۵۸۴ نفر در سال ۱۳۹۴ کاهش یافته است که نشان‌دهنده حدود ۵ درصد کاهش سالانه در این دهه است. اگر آمار حوادث رانندگی در کشور با همین سرعت کاهش یابد،  $5\% = \frac{1}{20}$  یعنی کاهش  $\frac{1}{20}$  است.  
 الف) پیش‌بینی می‌شود در هر یک از سال‌های منتهی به سال ۱۴۰۰ چند نفر از هم‌وطن‌های ما جان خود را در حوادث رانندگی از دست بدهند؟ نتایج را در جدول زیر ثبت کنید.

سال	۱۳۹۲	۱۳۹۵	۱۳۹۶	۱۳۹۷	۱۳۹۸	۱۳۹۹	۱۴۰۰
تعداد تلفات مورد انتظار	۱۷۵۸۴	۱۶۹۰۲	۱۶۲۱۶	۱۵۵۲۳	۱۴۸۳۳	۱۴۱۴۵	۱۳۴۵۷

ب) اعداد حاصل، چه نوع دنباله‌ای تشکیل می‌دهند؟ هندسی است.  $r = \frac{1}{20}$

$t_2 = 12 \rightarrow t_1 = 12$   
 $t_6 = 96 \rightarrow t_1 = 96$   
 $\frac{t_6}{t_2} = \frac{96}{12} = \frac{r^4}{r^2} = r^2 = 8 \rightarrow r = 2 \rightarrow t_1 = 12$   
 $t_1 \cdot r^2 = 12 \rightarrow t_1 \cdot 4 = 12 \rightarrow t_1 = 3$   
 ... و ۱۲ و ۲۴ و ۴۸ و ...  
 دنباله:  $3, 6, 12, 24, 48, \dots$