سوال های فصل 5 حسابان گروه ریاضی راور(کرمان)

1- اگر $y=\sqrt{\sqrt{x}+۱}$ آن گاه شیب خط قائم بر نمودار این تابع در نقطه ی $x_۰=۹$ را بیابید.

$$m=y'=\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۲\sqrt{\sqrt{x}+۱}}\xrightarrow{x=۹} m=\frac{\frac{۱}{۶}}{۴}=\frac{۱}{۲۴}$$

حال برای بدست آوردن شیب خط قائم داریم: $m'=-\frac{۱}{f'(۹)}=-۲۴$

2- فرض کنید $f(۱-x^۳)=۴x^۲$ باشد آن گاه $f'(۹)$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$f(۱-x^۳)=۴x^۲\rightarrow -۳x^۲f'(۱-x^۳)=۸x$$

$$f'(۱-x^۳)=\frac{۸x}{-۳x^۲}=\frac{۸}{-۳x}\rightarrow f'(۹)=\frac{۸}{۶}=\frac{۴}{۳}$$

3- به ازای کدام مقدار b تابع f با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{۲}x\right)+b & -۲<x<۱\\ a|x|-۱ & ۱\leq x<۲\end{cases}$ در نقطه ی x=1 مشتق پذیر است؟

پاسخ:

اولا تابع در نقطه ی x=1 پیوسته می باشد زیرا

$$\begin{cases}\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} a|x|-۱=a(۱)-۱=a-۱\\ \lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} \cos\left(\frac{\pi}{۲}x\right)+b=\cos\frac{\pi}{۲}+b=b\\ f(۱)=a(۱)-۱=a-۱\end{cases}$$

حال داریم :

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}x & -۲<x<۱\\ a & ۱\leq x<۲\end{cases}$$

پس

$$f'_+(1)=f'_-(1)\rightarrow a=-\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}x\xrightarrow{x=۱} a=-\frac{\pi}{۲}\sin\frac{\pi}{۲}\rightarrow a=-\frac{\pi}{۲}$$

توضیح:

$$a|x|-۱\xrightarrow{x\to ۱^+} ax-۱\rightarrow (ax-۱)'=a$$

پس:

$$a-۱=b\xrightarrow{a=-\frac{\pi}{۲}} -\frac{\pi}{۲}-۱=b\rightarrow b=-\frac{\pi+۲}{۲}$$

سوال های فصل 5 حسابان گروه ریاضی راور(کرمان)

4- معادله ی خط عمود بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x+۲}$ در نقطه ای به طول $x=۰$ واقع بر آن را بنویسید.

پاسخ:

$$m=\frac{۱}{(x+۲)^{۲}}\xrightarrow{x=۰}m=\frac{۱}{۴}$$

پس شیب خط قائم برابر است با 4- حال با توجه به نقطه ی $\left(۰,\frac{۱}{۲}\right)$ و شیب 4- داریم:

$$y-y_{۰}=m(x-x_{۰})\to y-\frac{۱}{۲}=-۴(x-۰)\to y=-۴x+\frac{۱}{۲}$$

5- مشتق تابع $f(x)=(۳x+۴)\sin(۵x^{۲}+x)$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$f'(x)=۳(\sin(۵x^{۲}+x))+((۱۰x+۱)\cos(۵x^{۲}+x))(۳x+۱)$$

6- اگر به ازای هر $x\epsilon R$ داشته باشیم $f'(\mathrm{x})=\frac{۱}{\sqrt{۱-\mathrm{x}^{۲}}}$ مشتق $f(cosx)$ را یابید. $(\forall\, x\,\epsilon\, R, sinx>۰)$

پاسخ:

$$\left(f(cosx)\right)'=(-\mathrm{sinx}).\mathrm{f}'(\mathrm{cosx})=(-\mathrm{sinx}).\frac{۱}{\sqrt{۱-\cos^{۲}\mathrm{x}}}$$

$$=(-\mathrm{sinx})\frac{۱}{\sqrt{\sin^{۲}\mathrm{x}}}=\frac{-\mathrm{sinx}}{|\mathrm{sinx}|}\xrightarrow{sinx>۰}=\frac{-\mathrm{sinx}}{\mathrm{sinx}}=-۱$$

7- حد $\lim_{\mathrm{h}\to ۰}\frac{(۲+h)^{۸}-۲^{۸}}{h}$ را بدست آورید

پاسخ:

فرض کنید $f(x)=x^{۸}$. در این صورت $f'(\mathrm{x})=8x^{۷}$. اکنون داریم:

$$\lim_{\mathrm{h}\to ۰}\frac{(۲+h)^{۸}-۲^{۸}}{h}\lim_{\mathrm{h}\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=f'(۲)=۸\times ۲^{۷}=۱۰۲۴$$

8- مشتق پذیری تابع f با ضابطه ی $f(x)=\sqrt{(x+۲)sin^{۲}x}$ را در نقطه ی $x_{۰}=۰$ بررسی کنید.

$$f'(۰)=\lim_{\mathrm{x}\to ۰}\frac{\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(۰)}{x-۰}=\lim_{\mathrm{x}\to ۰}\frac{\sqrt{(x+۲)sin^{۲}x}}{x}$$

$$=\lim_{\mathrm{x}\to ۰}\frac{|sinx|\sqrt{x+۲}}{x}=\begin{cases}\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{sinx\sqrt{x+۲}}{x}=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{sinx}{x}\sqrt{x+۲}=\sqrt{۲}\\ \lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-sinx\sqrt{x+۲}}{x}=\lim_{x\to ۰^{-}}-\frac{sinx}{x}\sqrt{x+۲}=-\sqrt{۲}\end{cases}$$

لذا f در x=0 مشتق پذیر نیست.

9- حجم مخروطی به ارتفاع ثابت 5 سانتی متر تابعی از شعاع قاعده ی آن است .آهنگ تغییر حجم مخروط را نسبت به شعاع قاعده ی آن وقتی r=3 سانتی متر باشد حساب کنید.

پاسخ:

$$V=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h \xrightarrow{h=۵} V(r)=\frac{۵}{۳}\pi r^{۲}$$

$$V'(r)=\frac{۱۰}{۳}\pi r \quad \xrightarrow{r=۳} V'(r)=\frac{۱۰}{۳}\pi\times ۳=۱۰\pi$$

10- تابع $f(x)=x-sinx$ را در نظر بگیرید.الف) در چه نقاطی مشتق f صفر می شود؟ب) f صعودی است یا نزولی یا هیچ کدام؟ج) معادله ی $x=sinx$ چند جواب دارد؟

پاسخ:

الف) $f'(x)=۱-\cos x=۰\rightarrow x=۲k\pi$

ب) $f'(x)\geq ۰$ لذا تابع همواره صعودی است

ج) یک جواب دارد که همان صفر است.

11- فرض کنید X عددی حقیقی و غیر صفر باشد ثابت کنید $\cos x>۱-\frac{x^{۲}}{۲}$

پاسخ:

فرض کنید $f(x)=cosx+\frac{x^{۲}}{۲}-۱$ که در آن $x\epsilon R$

چون f تابعی زوج است کافی است ثابت کنیم $f(x)>۰, x\epsilon(۰,+\infty)$

توجه کنید که $x\epsilon R$ $\quad f'(x)=-sinx+x,$ داریم $x\epsilon(۰,+\infty)\quad f'(x)>۰,$

پس f روی بازه ی $[۰,+\infty)$ صعودی است و بنابراین $f(x)>f(۰)=۰,\ x\epsilon(۰,+\infty)$

یعنی $x\epsilon(۰,+\infty)$ $\quad \cos x>۱-\frac{x^{۲}}{۲}$ که همان نابرابری مورد نظر است.

12- نقاطی از نمودار تابع $f(x)=sinx-cosx$ را پیدا کنید که مماس بر نمودار در هر یک از این نقطه ها با خط $y=\sqrt{۲}x+۱$ موازی باشد.

پاسخ:

باید معادله ی $f'(x)=\sqrt{۲}$ را حل کنیم . می توانیم بنویسیم $f'(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{۲}$ از طرفی داریم

$sinx+cosx=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ پس $\sqrt{۲}\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=\sqrt{۲}\rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=۱$

و در نتیجه $x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$

بنابراین هر نقطه از نمودار که طول آن برابر $۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$ باشد نقطه ی مطلوب است.

13- آیا تابع $f(x)=\frac{x-1}{x+1}(-1)^{[x]}$ در نقطه ی 1 مشتق پذیر است؟

پاسخ:

توجه کنید که $f(1)=0$ و داریم:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{x-1}{x+1}(-1)^0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x-1}{x+1}(-1)^1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x+1}=-\frac{1}{2}$$

چون حد چپ و راست بالا با هم مساوی نیستند پس تابع فوق در نقطه ی 1 مشتق پذیر نیست.

14- ثابت کنید از هر نقطه ی خط $y=-\frac{1}{4}$ می توان دو مماس عمود بر هم بر سهمی $y=x^2$ رسم کرد.

پاسخ:

فرض کنید نقطه ی (α,α^2) نقطه ی تماس خط مماس با سهمی است شیب خط مماس در این نقطه برابر است با $y'(\alpha)=2\alpha$ و معادله ی خط مماس در این نقطه عبارتست

از $\quad y-\alpha^2=2\alpha(x-\alpha)$

هر نقطه از خط $y=-\frac{1}{4}$ به شکل $\left(x_0,-\frac{1}{4}\right)$ است پس خطوط مماسی که از این نقطه می گذرند خطوطی هستند که مختصات نقطه ی $\left(x_0,-\frac{1}{4}\right)$ در آنها صدق می کنند یعنی

$$-\frac{1}{4}-\alpha^2=2\alpha(x_0-\alpha)$$

$$\alpha^2-2\alpha x_0-\frac{1}{4}=0$$

از این معادله دو مقدار α_1 و α_2 برای α به دست می آید زیرا $\Delta=4\alpha^2+1>0$

و در نتیجه شیب خطوط مماسی که از نقطه ی $\left(x_0,-\frac{1}{4}\right)$ می گذرند $2\alpha_1$ و $2\alpha_2$ است و

$$2\alpha_1\times 2\alpha_2=4\alpha_1\alpha_2=4\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$$