فصل چهارم

مثلثات

۱- یادوری سال دهم   **۲- نسبت‌های مثلثاتی زوایای دیگر**

۳- نمودار توابع $cosx$ و $y = sinx$ **۴- نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ برحسب α و β**

۱- یادآوری:

در سال گذشته مباحث زیر را یاد گرفتید:

1) دایره مثلثاتی(دایره واحد) و ویژگی های آن.

2)نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

3) نسبت های مثلثاتی برخی زوایای مهم از قبیل: 0° ، 30° ، 45° ، 60° ، 90° ، 180° ، 270° ، 360°

4) روابط بین نسبت های مثلثاتی

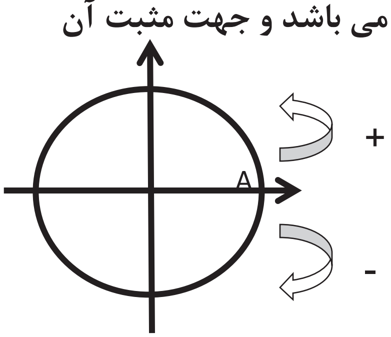
5) مساحت چند شکل هندسی

6) شیب خط و $\tan\alpha$

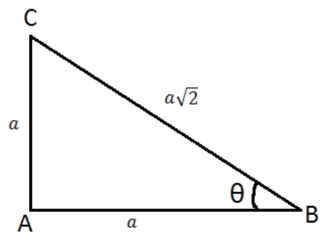
از هر قسمت چند مثال می زنیم.

مثال1) دایره مثلثاتی را تعریف کنید.

دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع واحد و جهت دار که شروع از A می باشد و جهت مثبت آن خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است.



مثال2) در یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه ، نسبت های مثلثاتی زاویه ی ساق و قاعده را بیابید.



$$\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$$

$$\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$$

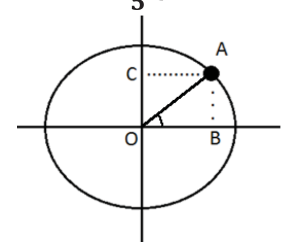
$$\tan\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = 1 = \tan 45^\circ \ \rightarrow\ \cot\theta = 1$$

مثال3) مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $A = \sin 30 \ \times \cos 180 + \sin 180 \times \cos 30 = \frac{1}{2} \times (-1) + 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$

ب) $B = \tan 60 + 2\cot 30 - \sin 90 = \sqrt{3} + 2 \times \sqrt{3} - 1 = 3\sqrt{3}$

مثال4) اگر $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ و α در ناحیه چهارم باشد ، سایر نسبت های مثلثاتی را بدست آورید.



می دانیم که در دایره مثلثاتی اگر $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ باش، آنگاه : $OC = \sin\theta$ و $OB = \cos\theta$ و $OA = 1$

با توجه به مطالب بالا داریم:

$$\cos\alpha = \frac{2}{5} = x \ \rightarrow\ x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \rightarrow |y| = \frac{\sqrt{21}}{5} \rightarrow y$$
$$= \pm\frac{\sqrt{21}}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه در چهارم}} y = -\frac{\sqrt{25}}{5}, \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{25}}{5}}{\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{21}}{2}, \cot\alpha = -\frac{2}{\sqrt{25}}$$

مثال5) با توجه به دایره مثلثاتی حدود $\cos\theta$ و $\sin\theta$ را بدست آورید.

$-1 \le \sin\theta \le 1$ و $-1 \le \cos\theta \le 1$

مثال6) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع 6 سانتیمتر، چند برابر مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع 4 سانتیمتر است؟

❶ $\boxed{S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C} \Longrightarrow \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 60 = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

❷ $S_{\hexagon} = 6 \times \left(a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boxed{a^2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}} = 16 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3} \quad \Longrightarrow$ ❶, ❷ $\frac{9\sqrt{3}}{24\sqrt{3}}$

مثال 7) درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) $\sin\theta + \cos\theta = 1$ ب) $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$ ج) $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

و) $\tan\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ه) $\sin(\propto + \beta) = \sin\propto + \sin\beta$ و) $\sin(90 - \alpha) = \cos\alpha$

ز) $\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$

در سال یازدهم مباحث زیر را در مورد مثلثات مورد بررسی قرار می‌دهیم.

1) واحدهای زاویه (درجه و رادیان)

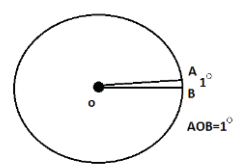
2) نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \pi K$ و $K\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ و $\alpha + \beta$ بر حسب α و β $(k \in z)$

3) توابع مثلثاتی (تابع سینوس و نمودار آن و ویژگی ها - تابع کسینوس و نمودار آن و ویژگی ها)

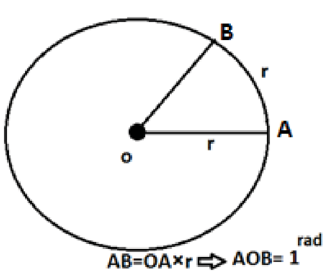
4) برخی کاربردهای مثلثاتی در حل مسائل

۱. واحد های زاویه:

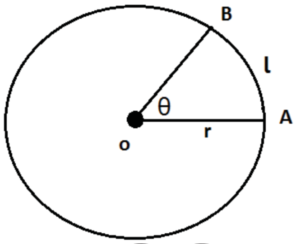
الف) درجه : اگر دایره را به 360 قسمت مساوی تقسیم کنیم، به یک قسمت آن درجه گفته می شود.



ب) رادیان : زاویه ای که اندازه ی کمان روبرو به آن برابر شعاع دایره باشد را یک رادیان می گوییم.



با توجه به این تعریف اندازه ی زاویه ی θ بر حسب رادیان که طول کمان رو به رو به آن زاویه l و شعاع دایره r باشد ، از رابطه زیر بدست می آید:



$$\theta^{rad} = \frac{l}{r} = \frac{AB}{r}$$

نکته: اگر D اندازه زاویه ای بر حسب درجه و R اندازه آن بر حسب رادیان :

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

مثال1) یک رادیان چند درجه است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \to \pi D = 180 \to D = \frac{180}{3/14} = 57/6^{\circ}$$

ب) یک درجه چند رادیان است؟

$$\frac{1}{180} = \frac{R}{\pi} \to 180R = \pi \to R = 180\pi = \frac{3/14}{180} = 0/01$$

مثال2) زوایای زیر را بر حسب درجه بدست آورید:

الف) $\frac{\pi}{20}^{rad} \to \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \to \frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{20}}{\frac{\pi}{1}} \to \frac{D}{180} = \frac{1}{20} \to D = 9^{\circ}$

روش دیگر: به جای π ، 180 قرار میدهیم. یعنی:

$$\frac{\pi}{20} \Rightarrow \frac{180}{20} = 9^{\circ}$$

ب) $6^{rad} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{6}{\pi} \Rightarrow \pi D = 180 \times 6 \Rightarrow D = \frac{180\times 6}{\pi} = 345^{\circ}$

ج) $15^{\circ} \Rightarrow \frac{15}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 15\pi = 180R \Rightarrow R = \frac{15\pi}{180} \to R = \frac{\pi}{12}$

سوال: π برابر 180 است یا تقریباً 3/14؟

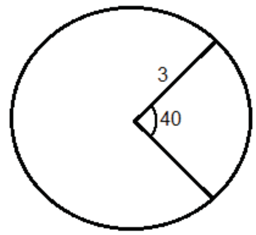
π یک عدد حقیقی گنگ است که تقریب آنرا 3/14 در نظر می گیریم اما به لحاظ واحد اندازه گیری زاویه خواهیم داشت: π رادیان برابر است با 180 درجه. یعنی:

$$3/14^{rad} \simeq \pi^{rad} = 180^{\circ}$$

نکته: طول کمان AB و مساحت قطاع AOB از دایره به شعاع r از روابط زیر نیز بدست می‌آید:

$$\text{طول کمان} = L = \pi r \frac{\alpha^\circ}{180} \quad \text{و} \quad \text{مساحت قطاع} = S = \pi R^2 \frac{\alpha^\circ}{360}$$

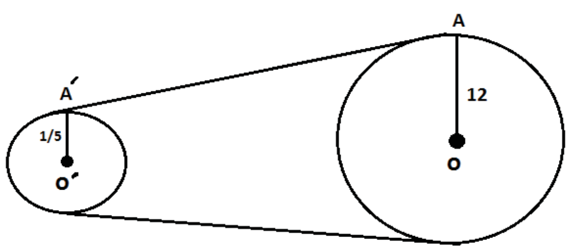
مثال 2) در شکل روبرو اندازه‌ی زاویه α را برحسب رادیان بدست آورید؛ سپس طول کمان AB و مساحت قطاع کوچک آن را حساب کنید.



$$\boxed{\frac{40}{180} = \frac{R}{\pi}} \Rightarrow 180R = 40\pi \Rightarrow R = \frac{40\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}^{rad} \text{ و } \boxed{\theta = \frac{l}{\pi}} \Rightarrow \frac{2\pi}{9} = \frac{l}{3} \Rightarrow l = \frac{2\pi}{3}$$

مثال3) در دایره ای به شعاع 4 س.م توسط زاویه ای θ کمانی به طول 6 س.م بریده می شود. مقدار θ به رادیان چقدر است؟

مثال4) در شکل مقابل وقتی قرقره بزرگتر $\frac{\pi}{4}$ رادیان بچرخد ، قرقره کوچکتر چند رادیان می چرخد؟



ابتدا مسافتی که قرقره بزرگتر طی می کند را حساب می کنیم. $l = PP´$

$$\theta = \frac{l}{r} \to \frac{\pi}{4} = \frac{l}{12} \to l = 3\pi = 9/42$$

به دلیل متصل بودن دو قرقره به یکدیگر، قرقره‌ی کوچک نیز همین مسافت را طی می کند؛ یعنی در قرقره کوچک داریم:

$$\theta = \frac{l}{r} \to \theta = \frac{3\pi}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{3\pi}{1}}{\frac{3}{2}} = 2\pi \to \theta = 2\pi^{rad}$$

یعنی وقتی قرقره بزرگتر $\frac{1}{8}$ دور ($\frac{\pi}{4}$) میچرخد، قرقره کوچکتر یک دور کامل می چرخد.

نکته: $\boxed{\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{r_2}{r_1}}$ پس: $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{4}}{\theta_2} = \frac{\frac{3}{2}}{12} \Rightarrow \theta = 2\pi$

مثال5) اندازه زاویه ای که عقربه ی ساعت شمار از ساعت 1 بعد از ظهر تا 4 بعد از ظهر حرکت می کند را بر حسب درجه و رادیان بیان کنید.

عقربه ساعت شمار از ساعت 1 تا 4 ، 3 تا 5 دقیقه حرکت می کند. هر یک دقیقه ، شش درجه است بنابرین $15 \times 6 = 90$ حرکت کرده است.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{90}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2} rad$$

یعنی $\frac{\pi}{2}$ رادیان حرکت کرده است

مثال6) زاویه ی بین عقربه های ساعت شمار ودقیقه شمار از چه رابطه ای بدست می آید؟ در ساعت h و M دقیقه

1) زاویه عقربه شمار با عدد 12: $0.5 \times (M + 60h) = \alpha$

2) زاویه دقیقه شمار با عدد 12: $6 \times \mathrm{M} = \beta$

3) زاویه ی A بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار:

$$\boxed{\widehat{A} = \alpha - \beta = 5.5M - 30h}$$

مثال7) چه مدت طول می‌کشد تا عقربه دقیقه شمار به اندازه‌ی $\frac{5\pi}{2}$ رادیان دوران کند؟

مثال8) چرخ و فلکی 40 کابین شماره گذاری شده دارد. اگر در آغاز حرکت از نقطه A خلاف عقربه های ساعت، شما روی کابین 4 نشسته باشید ، بعد از $\frac{49\pi}{10}$ رادیان دوران ، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟

مثال9) در شکل فاصله ی بین دو تهران و مشهد تقریباً چندکیلومتر است؟(O مرکز زمین)

تهران : A و مشهد : B و $AB = 6320$ و $A\widehat{O}B = 10^{\circ}$

مثال10) در یک مخروط، شعاع 5 س.م و ارتفاع 12 س.م می باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

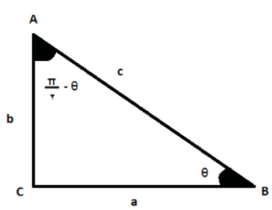
مثال11) طول برف پاک کن جلوی اتومبیلی35 س.م است. اگر برف پاک کن کمانی به اندازه ی 120 درجه طی کند:

الف) اندازه کمان بر حسب رادیان چقدر است؟

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چقدر است؟

۲. نسبت های مثلثاتی برخی زوایا:

در سال قبل نسبت های مثلثاتی زوایای 30 ، 60 ، 45 ،0 ،90 ، 180 ، 270 و 360 درجه و علامت نسبت ها را در چهار ناحیه یاد گرفتید. جهت یاد آوری:



$$\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cos(\theta) = \;\ldots\ldots\ldots\ldots =$$

نکته: در ناحیه اول دایره ی واحد، زوایا و نسبت‌های مثلثاتی آنها برای سینوس و تانژانت رابطه مستقیم دارند و در کسینوس و کتانژانت رابطه عکس دارند. مثلاً:

$\sin 41^\circ > \sin 30^\circ$ و $\tan 20 > \tan 10$ و $\cos 90 < \cos 40^\circ$ و $\cot 18^\circ < \cot 17^\circ$

نسبت های مثلثاتی زوایای مهم:

زاویه	0	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
Cos								
tan								
cot								

مثال: حاصل را بدست آورید.

$$A: \frac{\sin^2 30°-2\cos^4 30°+\cos 180°-\sin 360°}{\tan^2 60°-3\cot 60°+\sqrt{3}\tan 45°-\tan 360} = \ ...$$

۳. نسبت‌های مثلثاتی $K\pi \pm \alpha$ (K عددی صحیح است)

1) زاویه را به صورت مجموع و یا تفاضل مضرب صحیحی از $180°$ و α می‌نویسیم.

2) مضرب صحیح و 180 و علامت را حذف می‌کنیم ($\pi K\pm$) و نسبت را با α می‌نویسیم.

3) علامت نسبت مثلثاتی زاویه‌ی اصلی سوال را در ناحیه‌ی مربوطه‌اش پشت نسبت مثلثاتی جواب می گذاریم.

مثال:

$$\sin 240 = \sin(180+60) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$ 240 در ناحیه سوم است

$$\cos(3\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$ $3\pi-\alpha$ در ناحیه دوم است

$$\tan(121\pi+\beta) = -\tan\beta$$ مضارب زوج π همان 2π هستند و مضارب فرد π همان π هستند

نسبت های مثلثاتی $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$; (K فرد صحیح است)

1) زاویه را به صورت مجموع و یا تفاضل مضرب صحیح فردی از $\frac{\pi}{2}$ و α می نویسیم.

2) ($\frac{k\pi}{2}\pm$) را حذف و نسبت مثلثاتی متقابل آن را می نویسیم. یعنی $\sin \leftrightarrow cos$ و $\tan \leftrightarrow cot$

3) علامت نسبت مثلثاتی صورت سوال را با توجه به زاویه‌ی اصلی پشت جواب می‌گذاریم.

مثال: $\sin 250° = \sin(270 - 20°) = -\cos 20°$

$$\cos 130° = \cos(90 + 40°) = -\sin 40°$$

$$\cot(\frac{125\pi}{2} + \alpha) = \left(\frac{124\pi + \pi}{2} + \alpha\right) = \tan(62\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot\alpha$$

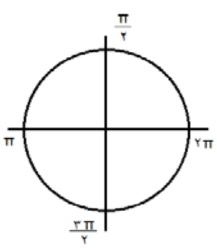
مثال: حاصل؟

الف) $\sin(-\frac{7\pi}{3}) =$

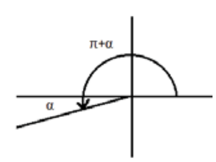
ب) $\cos(135°) + \sin\left(405\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$

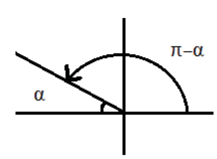
ج) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) - sin^3\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{97\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) =$

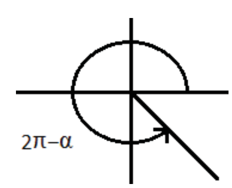
6. علامت نسبت های مثلثاتی را در چهار ناحیه دستگاه مختصات تعیین کنید:



نسبت های مثلثاتی $\pi \pm \alpha$ و $2\pi \pm \alpha$ و بطور کلی $K\pi \pm \alpha$



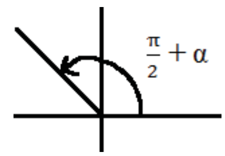




نسبت های مثلثاتی $\alpha \pm \frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$

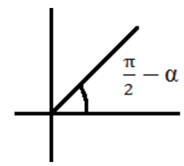
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$



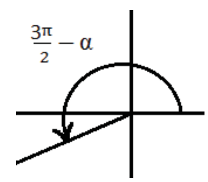
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$



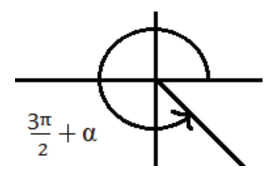
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$



$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=+\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$



4. بین نسبت های مثلثاتی روابط زیر برقرارند:

A: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ $\qquad$ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ $\qquad$ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

B: $\tan\theta\,.\cot\theta=1$ $\qquad$ $\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ $\qquad$ $\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}$

C: $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad$ $cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

D: $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ $\qquad$ $1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$

مثال2) 6 درجه چند رادیان است؟ 3 رادیان چند درجه است؟

$$\frac{D}{180}=\frac{3}{\pi}\rightarrow D=\frac{180\times 3}{\pi}=172^\circ \frac{6}{180}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{6\pi}{180}\xrightarrow{rad} R=\frac{\pi}{30}\ rad$$

مثال3) زوایای زیر کاربرد بیشتری دارند. در دایره ی مثلثاتی جایگاه آنها را تعیین کنید.

$\pi=$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2}=$ $\qquad$ $\frac{\pi}{4}=$ $\qquad$ $\frac{\pi}{8}=$ $\qquad$ $\frac{3\pi}{4}=$

$\frac{7\pi}{4} =$ $\frac{\pi}{3} =$ $\frac{\pi}{6} =$ $\frac{\pi}{12} =$ $\frac{5\pi}{3} =$ $\frac{7\pi}{6} =$

مثال4) حاصل را بدست آورید.

$$A = \sin\frac{121\pi}{3} + \cos\left(18\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\sin\frac{121\pi}{3} = \sin\left(\frac{120\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\left(40\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \cos\left(18\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 60$$

$$B: \sin(\alpha - 3\pi) + \tan\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha - \cot\alpha$$

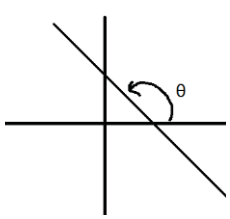
$$\sin(\alpha - 3\pi) = -\sin\alpha \quad , \ \tan\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$$

مثال5) اگر $\tan 15 = 0/28$ باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.(زوایا درجه‌اند) (تجربی 94)

$$A = \frac{\cos 285 - \sin 255}{\sin 525 - \sin 105} = \cdots$$

مثال6) اگر $\tan\theta = 0/2$ باشد ، مقدار $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) - \cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta) - \sin(3\pi+\theta)}$ را بیابید.(ریاضی 91)

نکته: اگر خط l با محور Ox زاویه ی θ در جهت مثبت مثلثاتی بسازد، در این صورت شیب خط l برابر است با $\tan\theta$ یعنی:



y=mx+b

m= tan θ

مثال5) خط l با محور Ox زاویه $\frac{5\pi}{6} rad$ می سازد. شیب خط را بدست آورید.

$$m = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{6\pi - \pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

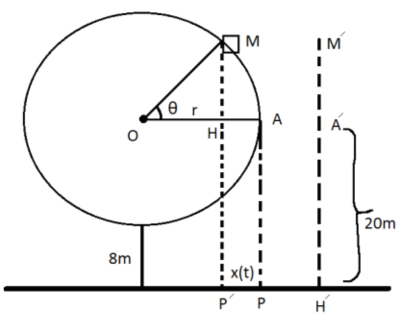
توابع مثلثاتی:

هر تابعی که متغیر در جایگاه زاویه‌ی نسبت مثلثاتی قرار بگیرد را تابع مثلثاتی نامند.

مثال6) حاصل را بیابید.

$$f(x) = -2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) - \cos 6x + 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) - \cos\frac{6\pi}{6} + 1 = -2\sin 120^\circ - (-1) + 1 = -2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \cdots$$



مثال7) فرض کنید چرخ و فلکی به قطر 24متر داریم که هر 4 دقیقه یک دور در جهت مثبت می چرخد. اگر پایین ترین نقطه چرخ و فلک 8 متر بالای زمین باشد و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه $t = 0$ در نقطه ی A باشد و روبه بالا در حال حرکت است.الف) در هر لحظه ارتفاع کابین از سطح زمین را مشخص کنید.

۱. پس از گذشت t ثانیه ، کمانی که کابین طی می کند چند رادیان است؟

۲. تابعی بنویسید که ارتفاع کابین را نسبت به زمان نشان دهد.

ارتفاع کابین = M´H´= H´A´+A´M´ h(θ)=20+12sinθ

A´H´=12+8=20 OMH: $\sin\theta = \frac{MH}{OM} = \frac{MH}{12} \Rightarrow MH = 12\sin\theta \qquad \theta = \frac{\pi t}{120}$

جواب الف : $h(t) = 20 + 12\sin\frac{\pi t}{120}$

ب) اگر در لحظه ی t فاصله سایه این کابین روی زمین تا نقطه P را با $x(t)$ نمایش دهیم ، تابع آن:

$$x(t) = PP' = AH = OA - OH$$

$$= 12 - 12\cos\theta \;, OMH:\quad \cos\theta = \frac{OH}{12} \to OH = 12\cos\theta$$

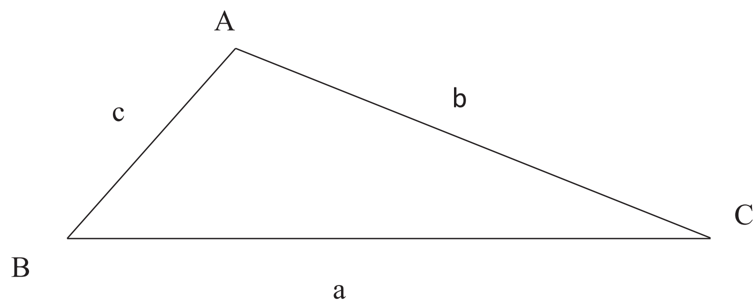
$$\Rightarrow x(\theta) = 12 - 12\cos\theta \;\; \text{و} \;\; \theta = \frac{\pi t}{120} \qquad \Rightarrow \boxed{x(t) = 12 - 12\cos\frac{\pi t}{120}}$$

ج) اگر کابین از نقطه ی A ، زاویه ی $\frac{7\pi}{6}$ رادیان طی کند ، ارتفاع کابین و طول سایه را بیابید.

قانون کسینوس‌ها:

تعمیم یافته ی قضیه ی فیثاغورس در مورد تمام مثلث ها به صورت زیر است که روابط آن به قانون کسینوس ها معروف است.

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \\ c^2 &= b^2 + a^2 - 2ba\cos\widehat{C} \end{aligned}}$$



دستور مساحت‌ها:

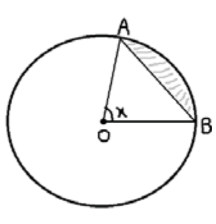
مساحت مثلث ABC با توجه به معلوم بودن طول دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها :

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}cb\sin\widehat{A}}$$

قانون سینوسها:

به کمک دستور مساحت‌ها (مساوی قرار دادن رابطه های بالا) رابطه زیر را بدست می‌آید:

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$$



مثال12) وتر AB به سمت مرکز دایره در حال حرکت است. (x برحسب رادیان) الف) تابعی بسازید که مساحت قطاع دایره را بر حسب x نمایش دهد.

ب) تابع تغییرات وتر بر حسب x را به دست آورید. $AB = \sqrt{2r^2(1-\cos x)}$

$\frac{1}{2}r \times r \times \sin x =$ مساحت مثلث   و $\frac{1}{2}r^2x =$ مساحت قطاع

$$S = \frac{1}{2}r^2x - \frac{1}{2}r^2\sin x \Rightarrow$$

$$AB^2 = r^2 + r^2 - 2r.r.\cos x$$

$$AB^2 = 2r^2 - 2r^2\cos x \Rightarrow$$

$$\boxed{AB = r\sqrt{2(1-\cos x)} \quad \text{و} \quad S(x) = \frac{1}{2}r^2(x - \sin x)}$$

رسم نمودار تابع سینوس

با توجه به جدول روبرو نمودار سینوس به شکل زیر است:

مثال: نمودار توابع $y = sinx + 1$ و $g = sin(x - \frac{\pi}{3})$ و $t = -sin2x$ و $h = 2sinx$ را رسم کنید.

ویژگی‌ها: (در تمام نکات $k \in \mathbb{Z}$)

۱- دوره تناوب ان $T = \frac{2\pi}{|\text{ضریب ایکس}|}$ یعنی نمودار تابع $y = sinx$ در فاصله 2π تکرار می‌شود.

۲- نمودار، محور طول‌ها را در نقاط $x = k\pi$ قطع می‌کند. در واقع صفرهای تابع $2k\pi$ است.

۳- مقدار ماکزیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ است که برابر با یک است.

۴- مقدار مینیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ است که برابر با منفی یک است.

مثال: نکات ۱ الی ۴ را در مورد تابع $f(x) = 2sin\left(\frac{x}{5}\right) - 1$ بررسی و تعیین کنید.

رسم نمودار تابع کسینوس

با توجه به جدول روبرو نمودار کسینوس به شکل زیر است:

مثال: نمودار توابع $y = sinx + 1$ و $g = sin(x - \frac{\pi}{3})$ و $t = -sin2x$ و $h = 2sinx$ را رسم کنید.

ویژگی‌ها:

۱- دوره تناوب ان $T = \frac{2\pi}{|\text{ضریب ایکس}|}$ یعنی نمودار تابع $y = cosx$ در فاصله 2π تکرار می‌شود.

۲- نمودار، محور طول‌ها را در نقاط $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ قطع می‌کند. یعنی صفرهای تابع $2k\pi$ است.

۳- مقدار ماکزیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi$ است که برابر با یک است.

۴- مقدار مینیمم تابع در نقاطی به طول $x = (2k + 1)\pi$ است که برابر با منفی یک است.

مثال: نکات ۱ الی ۴ را در مورد تابع $f(x) = -\frac{1}{2}cos(-2x) + 1$ بررسی و تعیین کنید.

مثال: به روش رسم نمودار مقدار تقریبی $sin2$ و $sin2^{\circ}$ و $cos\sqrt{2}^{\circ}$ و $cos5$ را تعیین کنید.

مثال: به روش رسم مجموعه جواب معادلات را بیابید:

الف) $0 = |cosx| - 1 \quad : \quad [-2\pi , 2\pi]$ ب) $2sinx + 1 = 0 \quad : \quad [-\pi , \pi]$

ج) $4 = sinx + 2 \quad : \quad [-4\pi , 2\pi]$ د) $2cosx - \sqrt{3} = 0 \quad : \quad [-\pi , 2\pi]$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = -|sinx| + 1 \quad [0 , 2\pi]$ ب) $y = 2\sin (\frac{\pi}{2} + x) + 1 \quad [-\pi , \pi]$

ج) $y = [sinx] - 1 \quad [-2\pi , 2\pi]$ د) $y = \begin{cases} \sin(-x) & [0 , \pi] \\ -cosx & [-\pi , 0] \end{cases}$

نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو کمان ؛ $(\alpha \pm \beta)$ بر حسب α و β

در درس گذشته نسبت‌های مثلثاتی مضاربی از π و $\frac{\pi}{2}$ را که با $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ جمع یا تفریق می شد را یاد گرفتید چگونه محاسبه کنید. مثلا برای نسبت های 240° آنرا با (180+60) تبدیل کرده و نسبت های مثلثاتی 60 را ملاک کار قرار داده و با توجه به ناحیه ی 240، علامت نسبت‌ها را قرار می دادیم.

در این مبحث نسبت های مثلثاتی $(\alpha \pm \beta)$ را بر حسب αوβ بررسی می کنیم.

ابتدا به فرمول‌های آن می پردازیم و بعد به کاربرد آنها و در آخر برخی را اثبات می‌کنیم.

$$\boxed{\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha \, cos\beta \ \pm sin\beta \, cos\alpha}$$

مثال:

$$sin75^\circ = \sin(45 + 30) = sin45 \, cos30 + sin30 \, cos45 = \cdots$$

$$sin105^\circ = \cdots$$

$$\boxed{cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha \, cos\beta \ \mp sin\beta \, sin\alpha}$$

$$cos\,15^\circ = \cos(60 - 45) = cos60 \, cos45 \ \pm sin60 \, sin45 = \cdots$$

$cos75° = \cdots$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \times \tan\beta}$$ و $$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \times \tan\beta}$$

مثال: $\tan 105° = \tan(60+45) =$

$$\frac{\tan 60 + \tan 45}{1 - \tan 60 \times \tan 45} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \times \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1^2 - \sqrt{3}^2} = \cdots$$

tan75°=

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha \times \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$ و $$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha \times \cot\beta + 1}{\cot\alpha - \cot\beta}$$

نسبت‌های مثلثاتی 2α و 3α بر حسب α

۲α بر حسب α

$$sin2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) =$$

$$sin\alpha\,.\,cos\alpha + sin\alpha.\,cos\alpha = 2sin\alpha\, cos\alpha \Rightarrow \boxed{sin2\alpha = 2sin\alpha\, cos\alpha}$$

$$cos2\alpha = cos(\alpha+\alpha) = cos\alpha\,.\,cos\alpha - sin\alpha.\,sin\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$

$$\boxed{cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha} \quad \boxed{cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1} \quad \boxed{cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha}$$

$$tan2\alpha = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \times \tan\alpha} \Rightarrow \boxed{tan2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}}$$

$$cot2\alpha = \frac{\cot\alpha\,.\,\cot\alpha - 1}{\cot\alpha + \cot\alpha} = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \Rightarrow \boxed{\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}}$$

۳α بر حسب α

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) &= sin2\alpha\,.\,cos\alpha + sin\alpha.\,cos2\alpha \\
&= 2sin\alpha\, cos\alpha\, cos\alpha + sin\alpha(1 - 2sin^2\alpha) \\
&= 2sin\alpha(1 - sin^2\alpha) + sin\alpha - 2sin^3\alpha \\
&= 2sin\alpha - 2sin^3\alpha + sin\alpha - 2sin^3\alpha = 1sin\alpha - 4sin^3\alpha \\
&\Rightarrow \boxed{\sin 3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha}
\end{aligned}$$

$cos3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = ...$

مثال13) حاصل عبارات را بدست آورید:

A) $sin200\ cos40 + sin40\ cos200 = \sin(200 + 40) = sin240 = \sin\ (180 + 60)$

B) $\frac{\tan\alpha - \tan2\alpha}{1+\tan\alpha.\tan2\alpha} = \tan(\alpha - 2\alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

C) $cos\frac{\pi}{3}\ cos\frac{\pi}{3} + sin\frac{\pi}{3}\ sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

D) $-cos45\ cos105 + sin45\ sin105 = \cdots$

E) $\tan^2\alpha - \tan^2 2\alpha =$

F) $sin\frac{13\pi}{12} =$

مثال14) مقادیر زیر را بدست آورید.

A) $\tan\frac{23\pi}{12} = \tan\left(\frac{24\pi - \pi}{12}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\tan\frac{\pi}{12} = -\tan(45 - 30) =$

$\frac{\tan45 - \tan30}{1+\tan45.\tan30} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\times\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \times \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12-2\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2-\sqrt{3})}{6} = \cdots$

B) $coc345 = \cdots =$

مثال15) ثابت کنید:

A) $\boxed{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta}$

اتحاد مزدوج= $(\sin\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\beta \,.\, \cos\alpha)(\sin\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\beta \,.\, \cos\alpha) =$ طرف اول

با توجه به طرف دوم= $\sin^2\alpha \,.\, \cos^2\beta - \sin^2\beta \,.\, \cos^2\alpha =$

$\sin^2\alpha\,(1-\sin^2\beta) - \sin^2\beta(1-\sin^2\alpha\,) =$

$\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\ \times \sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\beta \times \sin^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

$$\boxed{\text{B) } \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

مثال16) حاصل را بدست آورید.

A) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) =$

$$\sin\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\beta \,.\, \cos\alpha + \sin\alpha \,.\, \sin\beta - \sin\beta \,.\, \sin\alpha = 2\sin\alpha \,.\, \cos\beta$$

B) $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) =$

C) $\tan(\alpha+\beta) + \tan(\alpha-\beta) =$

مثال17) درست و نادرست را تعیین کنید.

A) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha + \sin\beta$ B) $\frac{\cos 2\alpha}{2} = \cos\alpha$

C) $\cos(\alpha+10)\cos(\alpha-10) - \sin(\alpha+10)\sin(\alpha-10) = \cos 2\alpha$

D) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sin^2 x - \sin^2\frac{\pi}{6}$

E) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin x$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1+\tan 2\alpha \times \tan\alpha} = \frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \frac{\tan\alpha}{1}}{1 - \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \times \tan\alpha}$$

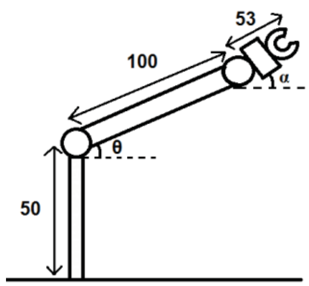
$$= \frac{\frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}}$$

روش دیگر اثبات: به عهده شما...

$$\tan 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \cdots$$

مثال18) در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت ربات ها ، معمولا در مفصل مکانیکی برای بازوی آن، مطابق شکل زیر در نظر می گیرند. اگر $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ و $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ باشد؛



الف) ارتفاع نوک گیره را از سطح زمین تابعی بر حسب θ و α بنویسید.

ب) این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع 22/5 ، مفصل خود را در حالت α=−30 قرار داده است. تعیین کنید زاویه ی θ در این وضعیت چند درجه است؟

مثال19) هر گاه داشته باشیم $\tan\beta = \frac{5}{12}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ، مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

(α منفرجه و β حاده)

$\cos(\alpha+\beta) = ?$ و $\sin 2\alpha = ?$ و $\tan 2\beta = ?$

برای حل این نوع مسائل چند روش مختلف داریم:

روش اول: نسبت های α و β را به کمک مثلث قائم الزاویه بیابیم.

روش دوم: نسبت های α و β را به کمک روابط بین نسبت‌ها بیابیم.

روش سوم: نسبت های α و β را به کمک به کمک نسبت های رو برو بیابیم: $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$

$$\alpha: \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow{\text{منفرجه }\alpha} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\beta: 1 - \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} \rightarrow 1 + \frac{25}{144} = \frac{1}{\cos^2\beta} \rightarrow \cos\beta = \pm\frac{12}{13} \xrightarrow{\text{حاده }\beta} \cos\beta = +\frac{12}{13}$$

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\frac{144}{169} \to \sin\beta = \pm\frac{5}{13} \xrightarrow{\text{منفی غیر قابل قبول}} \sin\beta = \frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \sin\alpha \,.\, \sin\beta = \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{-63}{65}$$

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha \,.\, \cos\alpha = 2\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{6}{13}$$

$$\tan2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{114}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}} = \frac{114\times5}{119\times6} = \frac{120}{119}$$

مثال20) اگر $\tan(\alpha+\beta) = 3$ و $\tan\beta = \frac{2}{5}$ آن گاه $\tan\alpha$ را بیابید.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan^2\beta} \xrightarrow{\tan\alpha = x} 3 = \frac{x+\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}x} \to 3-\frac{6}{5}x = x+\frac{2}{5}$$

$$\to 3-\frac{2}{5} = x+\frac{6}{5}x \to \frac{13}{5} = \frac{11}{5}x \to x = \frac{13}{11} = \tan\alpha$$

مثال21) عبارات زیر را ساده کنید.

$$A)\ \frac{\sin2\theta}{1+\cos2\theta} = \frac{2\sin\theta \,.\, \cos\theta}{1+2\cos^2\theta-1} = \frac{2\sin\theta \,.\, \cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$B)\ \frac{\sin2\theta}{1-\cos2\theta} = \frac{2\sin\theta \,.\, \cos\theta}{1-1+2\sin^2\theta} = \frac{2\sin\theta \,.\, \cos\theta}{2\sin^2\theta} =$$

$$C)\ \frac{1+\cos2\theta}{1-\cos2\theta} =$$

مثال22) نسبت های مثلثاتی $\frac{\pi}{8}$ را بدست آورید.

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}\to\tan\frac{\pi}{8}=\frac{\sin 2\times\frac{\pi}{8}}{1+\cos\ 2\times\frac{\pi}{8}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{4}}{4-2}=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$$

$$=\sqrt{2}-1\to\tan 22/5=\sqrt{2}-1\to\cot 22/5=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

روش اول یافتن کسینوس$\frac{\pi}{8}$:

$$1+\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}=1+(\sqrt{2}-1)^2=1+2-2\sqrt{2}+1=4-2\sqrt{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}\to$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\times\frac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{4+2\sqrt{2}}{16-8}=\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{8}\Longrightarrow\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

روش ساده تر: (فرمول تقلیل درجه)

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\to\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\Longrightarrow$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos 45}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\to\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

به همین ترتیب سینوس22/5:

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\Longrightarrow\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$\sin^2 22/5=\frac{1-\cos 45}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\sin 22/5=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

کار در کلاس

1) نمودارتوابع زیر را رسم کنید:

$A)\ y=\frac{1}{2}+|\cos x|\qquad [0,2\pi]$

$B)\ y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\qquad [0,2\pi]$

$C)\ y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$

$D)\ y = -\sin 2x + 1$

2) درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) $\cos x$ یعنی کسینوس زاویه ای از دایره مثلثاتی که اندازه ی آن x درجه باشد.

ب) $\sin\sqrt{2}$ یک عدد حقیقی است. ج) $\sin 2 = \sin 2^\circ$

د) اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد ، آنگاه $-1 < \cos x < 0$

هـ) عددی می توان یافت که کسینوس آن $\frac{3}{2}$ باشد.

و) همواره داریم $|\sin x| \le 1\ ,\ |\cos x| \le 1$

ز) $x = -\frac{\pi}{2}$ صفر تابع $y = \cos x$ می باشد و $x = 0$ صفر تابع $y = \sin x$ است.

ح) همواره داریم $(k\epsilon z)$ $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$

ط) $\sin(\pi + \theta) - \sin\theta = 0$ ی) $\sin(\alpha + \alpha) = 2\sin\alpha$

3) مقدارهای مثلثاتی زیر را بدست آورید.

$A)\ \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) =$

$B)\ \tan 225^\circ + \cos(-\frac{7\pi}{4}) =$

$C)\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) =$

4) حاصل را بدست آورید.

$A)\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$

$B)\cos x - \sin x =$

$C)\ \sin\frac{2\pi}{3}\ .\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\ .\cos\frac{2\pi}{3} =$

$D)$ (ریاضی 96) $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} =$

5) اگر $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}$ باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی92)

$$\cos 2x=?$$

6) اگر $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان آلفا در ربع چهارم باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی 96)

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=?$$

7) اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی 95)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)=?$$

8) اگر $\tan x=\frac{4}{3}$ باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی 96)

$$\tan\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=?$$

9) حاصل را بدست آورید. (A: تجربی 94 و B: ریاضی 91)

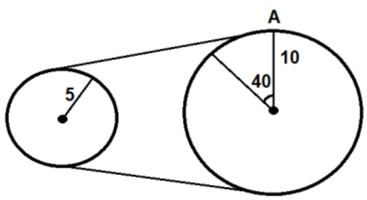
$A)\ \tan 15=0/28\ \rightarrow\ \dfrac{\cos 285-\sin 255}{\sin 525-\sin 102}=?$

$B)\ \tan\theta=0/2\ \rightarrow\ \dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi+\theta)-\sin(3\pi+\theta)}=?$

$C)\ \dfrac{\sin 91^\circ+\sin 92^\circ+\cdots+\sin 179^\circ}{\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\sin 3^\circ+\cdots+\sin 89^\circ}=$

D) $\tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{2\pi}{7}+\tan\frac{3\pi}{7}+\cdots+\tan\frac{6\pi}{7}=$

10) در شکل اگر نقطه A ، 40 درجه جابه جا شود، چرخ کوچکتر چند درجه جابه جا می‌شود؟



11) نقاط برخورد دو تابع $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ و $y=1-|sinx|$ را به کمک رسم نمودار بیابید.

12) مقادیر $\sin 5^\circ$, $\cos 7^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\cos 85^\circ$, $\sin 100^\circ$, $\sin 5$ را با رسم نمودار بیابید.

13) زاویه قطاع حاصل از گسترده‌ی مخروطی با شعاع قاعده 4 و ارتفاع 10واحد چند رادیان است؟

14) حاصل عبارت $A=\frac{|\sin x-\cos x|}{2}+\frac{\sin x+\cos x}{2}$ به ازای $x\epsilon\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ را بدست آورید.

15) مساحت قطاعی از دایره به شعاع 5 سانتیمتر که طول کمان آن $\frac{3}{2}$است را بیابید.

16) حاصل را بیابید.

$A)\ \sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$

$B)\ \tan(\alpha-13\pi).\cot(87\pi+\alpha)-\cos(16\pi-\alpha).\cos(\alpha-36\pi)=$

$C)\ \cot 34^\circ = 1/5 \ \rightarrow\ \dfrac{2\sin 326^\circ + 3\sin 56^\circ}{\cos 304} =$

17) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دوره تناوب آنها را تعیین کنید.

$A)\ y = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$B)\ y = -\cos\dfrac{x}{3} + 1$

$C)\ y = \cos^2 x$

$[-\pi , 2\pi]$ مجموعه جواب x دربازه $\Rightarrow D)\ \frac{1}{2} = \cos x + 1$ و $\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{3}$

18) کمترین و بیشترین مقدار توابع زیر را تعیین کنید.

$y = -2\sin 3x + 1$

$y = 1 - 2|\cos x|$

$y = 4\sin^2 x - \dfrac{1}{3}$

19) اگر دوره ی تناوب تابع رو به رو 2 باشد و بیشترین مقدار تابع 7 باشد، حاصل $a + b = ?$

$y = -2\sin ax + \dfrac{b}{3}$

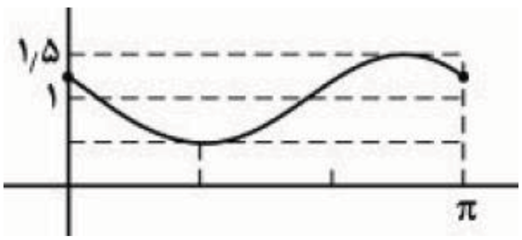
20) تابع $v = 0/8\sin\frac{\pi t}{3}$ (t ثانیه است) معرف سرعت جریان هوا طی یک دوره‌ی تنفسی برای یک شخص در حال استراحت است.

الف) زمان لازم برای یک دوره ی کامل دم و بازدم چقدر است؟

ب) اگر سرعت جریان هوا $\frac{2}{5}$ (لیتر بر ثانیه) باشد ، مقدار t چقدر است؟

21) نمودار تابع به معادله $y = -4\cos(\frac{\pi}{4} - 3\pi x)$ روی بازه $[-1, 1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟ (تجربی91)

22) شکل روبه رو قسمتی از نمودار $y = 1 + a\sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b =?$ (ریاضی95)



23) اگر $\tan\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1$ باشد ، مقدار $\cos 2x =?$ (تجربی88)

24) ساده شده کسر رو به رو را بدست آورید. (ریاضی91)

$$\frac{(1 + \tan^2 x)(1 + \cot^2 x)}{1 - \sin^2 \alpha - \cos^4 x} =?$$

25) اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5}$ باشد ، $\tan 2\alpha =?$ (ریاضی88)

26) $a + b = \frac{\pi}{4}$ است. حاصل را بدست آورید.

$$8\cos a\cos b\cos(\frac{\pi}{2} - a)\cos(\frac{\pi}{2} - b) =?$$

27) اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^4 x$ باشند، ضابطه ی تابع $\mathbf{fog}$ را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید. (تجربی93)

28) دامنه ی توابع زیر را بدست آورید. نمودار قسمت $(\mathbf{B})$ و $(\mathbf{C})$ را رسم کنید.

$A)\, y = \dfrac{1}{[\cos \pi x]}$

$B)\ y = \dfrac{\sin x}{\sin x}$

$C)\ y = \dfrac{\cos x}{\cos x}$