# درس سوم : جبر مجموعه ها

اجتماع (Union) : تعریف می کنیم $A\cup B=\{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$

خواص اجتماع:

① $A\cup\varnothing = A$ , $A\cup U = U$

② $A\cup A = A$ , $A\cup A' = U$

③ خاصیت جابه جایی : $A\cup B = B\cup A$

اثبات ③ :

$$A\cup B=\{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}=\{x\in U \mid x\in B \vee x\in A\}=B\cup A$$

④ خاصیت شرکت پذیری : $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

اثبات ④ :

$$\begin{aligned}
A\cup(B\cup C) &= \{x\in U \mid x\in A \vee x\in(B\cup C)\}\\
&= \{x\in U \mid x\in A \vee (x\in B \vee x\in C)\}\\
&= \{x\in U \mid (x\in A \vee x\in B) \vee x\in C\}\\
&= \{x\in U \mid x\in(A\cup B) \vee x\in C\}\\
&= (A\cup B)\cup C
\end{aligned}$$

⑤ $A\subseteq B \Longleftrightarrow A\cup B = B$

اثبات ⑤ : (از چپ به راست)

گیریم $A\subseteq B$ باید نشان دهیم $A\cup B = B$ .

میدانیم: $\left.\begin{aligned} A\subseteq B\\ B\subseteq B\end{aligned}\right\}\Rightarrow A\cup B\subseteq B$

طبق تعریف اجتماع : $B\subseteq A\cup B$

$\Longrightarrow A\cup B = B$

اثبات ⑤ : (از راست به چپ)

گیریم $A\cup B=B$ باشد باید نشان دهیم $A\subseteq B$ .

میدانیم : $A\subseteq A\cup B \xrightarrow{A\cup B=B} A\subseteq B$

تمرین : به روش عضوگیری ثابت کنید : $A\subseteq B \Rightarrow A'\cup B=U$

پاسخ :

$$x\in U \Rightarrow x\in A'\cup A \Rightarrow x\in A' \vee x\in A \xrightarrow{A\subseteq B} x\in A' \vee x\in B$$
$$\Longrightarrow x\in A'\cup B$$

بنابراین : $U\subseteq A'\cup B$

میدانیم : $A'\cup B\subseteq U$

$\longrightarrow A'\cup B=U$

---

اشتراک (Intersection) :

تعریف می کنیم $A\cap B=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\in B\}$

خواص اشتراک :

① $A\cap\varnothing=\varnothing$ , $A\cap U=A$

② $A\cap A=A$ , $A\cap A'=\varnothing$

③ خاصیت جابه جایی : $A\cap B=B\cap A$

اثبات ③ :

$$A\cap B=\{x\in U \mid x\in A\wedge x\in B\}=\{x\in U \mid x\in B\wedge x\in A\}=B\cap A$$

④ خاصیت شرکت پذیری : $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

اثبات ④ :

$$A\cap(B\cap C)=\{x\in U \mid x\in A\wedge x\in(B\cap C)\}$$
$$=\{x\in U \mid x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C)\}$$

$= \{x \in U \mid (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\}$

$= \{x \in U \mid x \in A \cap B \wedge x \in C\}$

$= (A \cap B) \cap C$

۵) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

اثبات ۵: (از چپ به راست)

گیریم $A \subseteq B$ باید نشان دهیم $A \cap B = A$.

میدانیم: $\left.\begin{matrix} A \subseteq B \\ A \subseteq A \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A \subseteq A \cap B$

طبق تعریف اشتراک: $A \cap B \subseteq A$

$\Longrightarrow A \cap B = A$

اثبات ۵: (از راست به چپ)

گیریم $A \cap B = A$ باید نشان دهیم $A \subseteq B$.

میدانیم: $A \cap B \subseteq B \xrightarrow{A \cap B = A} A \subseteq B$

تمرین: عبارت $(B' \cap A') \cap B$ را ساده کنید.

پاسخ:

عبارت $= (A' \cap B') \cap B = A' \cap (B' \cap B) = A' \cap \varnothing = \varnothing$

تست: درصورتی که $B' \subseteq A'$ باشد، ساده شده‌ی عبارت $(A \cup B) \cap (A \cap B)$ کدام است؟

۱) $A$ ۲) $B$ ۳) $A \cup B$ ۴) $U$

$B' \subseteq A' \Rightarrow A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ , $A \cap B = A$

عبارت $= B \cap A = A$

تمرین: ثابت کنید: $(X \subseteq A) \wedge (X \subseteq A') \Longrightarrow X = \varnothing$

$\left.\begin{matrix} X \subseteq A \\ X \subseteq A' \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cap} X \subseteq A \cap A' \Rightarrow X \subseteq \varnothing \xrightarrow{\varnothing \subseteq X} X = \varnothing$

# قوانین مشترک اجتماع و اشتراک

1 قانون پخشی :

الف : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ب : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

اثبات الف : $\forall x \in A \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

بنابراین $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ است.

به همین ترتیب می‌توان نشان داد : $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

و در نتیجه تساوی برقرار است.

اثبات ب : $\forall x \in A \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$

$\Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cap C)$

بنابراین $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ است.

به همین ترتیب $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$ است.

و در نتیجه تساوی برقرار است.

مثال: عبارت $(A\cup B)\cap(A\cup B')$ را ساده کنید.

عبارت $\xrightarrow{\text{از } A\cup \text{ فاکتور می‌گیریم}} A\cup(B\cap B') = A\cup\varnothing = A$

مثال: ثابت کنید: $(C\cap A)\cup(A'\cap C) = C$

$$(C\cap A)\cup(A'\cap C) \xrightarrow{\text{از } C\cap \text{ فاکتور می‌گیریم}} C\cap(A\cup A') = C\cap U = C$$

مثال: اگر $A$ و $B$ دو مجموعه جدا از هم باشند، نشان دهید: $A\cap B' = A$

$$A\cap B' = (A\cap B')\cup\varnothing \xrightarrow{\varnothing = A\cap B} (A\cap B')\cup(A\cap B) \xrightarrow{\text{فاکتور } A\cap} A\cap(B'\cup B)$$

$$= A\cap U = A$$

تمرین: به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید

$$[A\cap(A'\cup B)]\cup[B'\cap(A\cup B)] = A$$

$$\text{چپ} = [\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(A\cap B)]\cup[(B'\cap A)\cup\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing}]$$

$$= (A\cap B)\cup(B'\cap A) \xrightarrow{\text{فاکتور } A\cap} A\cap(\underbrace{B\cup B'}_{U}) = A$$

$\boxed{2}$ قانون جذب :

الف) $A\cup(A\cap B)=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=A$

اثبات الف :

چپ $=(A\cap U)\cup(A\cap B)$

$\xlongequal{A\cap\ \text{فاکتور}} A\cap(\underbrace{U\cup B}_{U})=A$

اثبات ب :

چپ $=(A\cup \varnothing)\cap(A\cup B)$

$\xlongequal{A\cup\ \text{فاکتور}} A\cup(\underbrace{\varnothing\cap B}_{\varnothing})=A$

مثال : اگر $A\cup B=A\cap B$ ، به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید $A=B$ .

$A\cup B=A\cap B \xrightarrow{\cup A} A\cup(A\cup B)=A\cup(A\cap B) \xrightarrow{\text{جذب}} A\cup B=A$

$A\cup B=A\cap B \xrightarrow{\cup B} B\cup(A\cup B)=B\cup(A\cap B) \xrightarrow{\text{جذب}} A\cup B=B$

$\Longrightarrow A=B$

مثال : عبارت $(A\cap B)\cup\Big((B\cup C)\cap[\underbrace{(B\cup A)\cap B}_{B\ \text{جذب}}]\Big)$ را ساده کنید.

عبارت $=(A\cap B)\cup[\underbrace{(B\cup C)\cap B}_{B\ \text{جذب}}]$

$=(A\cap B)\cup B \xlongequal{\text{جذب}} B$

تست : حاصل عبارت $[(A\cup B)\cap(B'\cup A)]\cup(A\cap B)$ کدام است ؟

۱) $A\cup B$ ۲) $A\cap B$ ۳) $A$ ۴) $B$

عبارت $\xlongequal{A\cup\ \text{فاکتور}} [A\cup(\underbrace{B\cap B'}_{\varnothing})]\cup(A\cap B)=A\cup(A\cap B) \xlongequal{\text{جذب}} A$

تمرین : عبارت $(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]$ را ساده کنید.

عبارت $= (A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(A\cup B')] \xrightarrow{\text{جذب}} A\cup B'$

3 قانون دمورگان :

الف) $(A\cup B)' = A'\cap B'$

ب) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

اثبات الف :

$$\forall x\in(A\cup B)' \Rightarrow x\notin A\cup B$$
$$\Rightarrow x\notin A \wedge x\notin B$$
$$\Rightarrow x\in A' \wedge x\in B'$$
$$\Rightarrow x\in A'\cap B'$$

بنابراین $(A\cup B)'\subseteq A'\cap B'$ است.

به همین ترتیب می‌توان نشان داد $A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$ .

در نتیجه تساوی برقرار است.

اثبات ب :

$$\forall x\in(A\cap B)' \Rightarrow x\notin A\cap B$$
$$\Rightarrow x\notin A \vee x\notin B$$
$$\Rightarrow x\in A' \vee x\in B'$$
$$\Rightarrow x\in A'\cup B'$$

بنابراین $(A\cap B)'\subseteq A'\cup B'$ است.

به همین ترتیب می‌توان نشان داد $A'\cup B'\subseteq(A\cap B)'$

در نتیجه تساوی برقرار است.

مثال: عبارت $[(A\cup(A\cup B)')\cap B]\cup A$ را ساده کنید:

عبارت $= [(A\cup(A'\cap B'))\cap B]\cup A$

$= [(\underbrace{(A\cup A')}_{U}\cap(A\cup B'))\cap B]\cup A$

$= [(A\cup B')\cap B]\cup A$

$= [(A\cap B)\cup\underbrace{(B'\cap B)}_{\varnothing}]\cup A$

$= (A\cap B)\cup A \xlongequal{\text{جذب}} A$

مثال: در تساوی مقابل مجموعه‌ی $X$ را بیابید: $[X\cap(B'\cap C')]\cup[X\cap(B\cup C)] = A\cap(B\cup A)$

چپ $\xlongequal{\text{فاکتور } X\cap} X\cap[(B'\cap C')\cup(B\cup C)]$

$= X\cap[\underbrace{(B\cup C)'\cup(B\cup C)}_{U}] = X$

راست $= A\cap(B\cup A) \xlongequal{\text{جذب}} A$

بنابراین $X=A$ است.

تست (سراسری ریاضی ۸۴):

اگر مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد، $A'=\{1,2,3\}$ و $B'=\{2,3,4,5\}$، آنگاه $(A\cup B)'$ کدام مجموعه است؟

۱) $\{2,3\}$ ۲) $\{2,4,5\}$ ۳) $\{3,4,5\}$ ۴) $\{4,5\}$

$(A\cup B)' = A'\cap B' = \{2,3\} \longrightarrow$ گزینه‌ی ۱

تفاضل (difference) : تعریف می‌کنیم $A-B=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

خواص تفاضل :

① $A-\varnothing=A$ ، $\varnothing-A=\varnothing$

② $A-U=\varnothing$ ، $U-A=A'$

③ $A-A=\varnothing$

توجه ۱: در تفاضل خاصیت جا به جایی وجود ندارد یعنی $A-B\neq B-A$
فقط در صورتی که $A=B$ باشد ، $A-B=B-A$ است .

توجه ۲ : $A-B\subseteq A$

نکته‌ی بسیار مهم : $A-B=A\cap B'$

اثبات :

$$A-B=\{x\in U \mid x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U \mid x\in A\wedge x\in B'\}=A\cap B'$$

مثال : به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید :

الف) $(A-B)\cap B=\varnothing$

$$\text{چپ}=(A\cap B')\cap B=A\cap(B'\cap B)=A\cap\varnothing=\varnothing$$

ب) $A-B=B'-A'$

$$\text{چپ}=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$$

پ) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

$$\text{چپ}=(A\cup B)\cap C'$$
$$=(A\cap C')\cup(B\cap C')$$
$$=(A-C)\cup(B-C)$$

مثال: اگر $Z$ مجموعه‌ی مرجع و $A'\cup B=\{1,3,4\}$، آنگاه متمم مجموعه‌ی $A-B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

$$(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B=\{1,3,4\}$$

مثال: ثابت کنید اشتراک روی تفاضل خاصیت پخشی دارد.

باید نشان دهیم: $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

$$
\begin{aligned}
\text{راست} &= (A\cap B)\cap(A\cap C)' \\
&= (A\cap B)\cap(A'\cup C') \\
&= [(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C'] \\
&= [(\underbrace{A\cap A'}_{\varnothing})\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')] \\
&= \varnothing\cup[A\cap(B-C)] \\
&= A\cap(B-C)
\end{aligned}
$$

مثال: نشان دهید تساوی $A-(B-C)=(A-B)-C$ درست نیست.

کافیست با یک مثال نشان دهیم تساوی نادرست است.

$A=\{1,2,3\}$ , $B=\{1,2\}$ , $C=\{1\}$

$\text{چپ}=\{1,2,3\}-\{2\}=\{1,3\}$

$\text{راست}=\{3\}-\{1\}=\{3\}$

تساوی برقرار نیست

تمرین: ثابت کنید:

الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq X \\ A' \subseteq X \end{array}\right\} \xrightarrow{\cup} A \cup A' \subseteq X \Rightarrow U \subseteq X \xrightarrow{X \subseteq U} X = U$$

ب) $(A-B) \cap (B-A) = \varnothing$

$$\text{چپ} = (A \cap B') \cap (B \cap A') = (A \cap \underbrace{(B' \cap B)}_{\varnothing}) \cap A' = \varnothing \cap A' = \varnothing$$

پ) $(A-B) \cap (C-D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

$$\text{چپ} = (A \cap B') \cap (C \cap D')$$

$$= (A \cap C) \cap (B' \cap D') = (A \cap C) - (B' \cap D')' = (A \cap C) - (B \cup D)$$

ت) $A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

$$\text{چپ} = A \cap (B \cap C)'$$

$$= A \cap (B' \cup C') = (A \cap B') \cup (A \cap C') = (A-B) \cup (A-C)$$

ث) $(A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A) = A \cup B$

$$\text{چپ} = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (B \cap A')$$

$$= [A \cap \underbrace{(B' \cup B)}_{U}] \cup (B \cap A')$$

$$= A \cup (B \cap A')$$

$$= (A \cup B) \cap \underbrace{(A \cup A')}_{U} = A \cup B$$

ج) $(A-B) - C = (A-C) - B$

$$\text{چپ} = (A \cap B') \cap C' = (A \cap C') \cap B' = (A-C) - B$$

تمرین: نشان دهید اجتماع روی تفاضل خاصیت پخشی ندارد.

باید نشان دهیم: $A \cup (B-C) \neq (A\cup B)-(A\cup C)$

گیریم $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{1,2\}$ و $C=\{1\}$، بنابراین:

$$A\cup(B-C)=\{1,2,3\}\cup\{2\}=\{1,2,3\}$$
$$(A\cup B)-(A\cup C)=\{1,2,3\}-\{1,2,3\}=\varnothing$$
$\Longrightarrow$ تساوی برقرار نیست

تمرین: اگر $A\cup B=C$ و $A\cap B=\varnothing$ ثابت کنید: $A=C-B$

$$C-B=(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B'=\underbrace{(A\cap B')}_{A-B}\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}$$

$$\underline{\underline{A\cap B=\varnothing \Rightarrow A-B=A}}\quad A\cup\varnothing=A$$

تمرین: عبارات زیر را ساده کنید

الف) $\big((A'\cap B)\cup[(B\cap A)-B']\big)\cap(B\cup A)$

عبارت $=\big((A'\cap B)\cup[\underbrace{B\cap A\cap B'}_{\varnothing}]\big)\cap(B\cup A)$

$$=(A'\cap B)\cap(B\cup A)$$
$$=A'\cap\big(B\cap(B\cup A)\big)\ \underset{=}{\overset{\text{جذب}}{=}}\ A'\cap B=B\cap A'=B-A$$

ب) $(A\cup B)-B$

عبارت $=(A\cup B)\cap B'=\underbrace{(A\cap B')}_{A-B}\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}=A-B$



PAPCO

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

عبارت $= [(A\cup B)\cap A']\cup(A\cap B)$

$= [\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(B\cap A')]\cup(A\cap B)$

$= (B\cap A')\cup(A\cap B) = B\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{U} = B$

ت) $(A-B)\cup(A\cap B)$

عبارت $= (A\cap B')\cup(A\cap B) = A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U} = A$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')$

عبارت $= (A\cup B) - (A'\cap B')' = (A\cup B)-(A\cup B) = \varnothing$

تمرین: ثابت کنید تفاضل روی اشتراک، از راست خاصیت پخشی دارد.

باید نشان دهیم: $(A\cap B)-C = (A-C)\cap(B-C)$

راست $= (A\cap C')\cap(B\cap C') = (A\cap B)\cap C' = (A\cap B)-C$

تمرین: اگر $A\cup B = A\cup C$ و $A\cap B = A\cap C$، نشان دهید $B=C$.

قانون جذب: $B = B\cap(B\cup A)$

$= B\cap(A\cup C)$

$= (B\cap A)\cup(B\cap C)$

$= (A\cap C)\cup(B\cap C)$

$= C\cap(A\cup B)$

$= C\cap(A\cup C) \overset{\text{جذب}}{=\!=} C$

## تفاضل متقارن : (Symmetric difference)

تعریف می‌کنیم : $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$

خواص $\Delta$ :

① $A \Delta \emptyset = A$ ، $A \Delta U = A'$

② $A \Delta A = \emptyset$ ، $A \Delta A' = U$

③ خاصیت جابه‌جایی : $A \Delta B = B \Delta B$

مثال : اگر $A \subseteq B$ ثابت کنید $A \Delta B = A' \cap B$

$$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) \xrightarrow{A \subseteq B} \emptyset \cup (B-A) = B-A = B \cap A'$$

مثال : ثابت کنید $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$$\text{راست} = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$$

$$= (A \cup B) \cap (A' \cup B')$$

$$= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B']$$

$$= [\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup \underbrace{(B \cap A')}_{B-A}] \cup [\underbrace{(A \cap B')}_{A-B} \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset}]$$

$$= (B-A) \cup (A-B) = A \Delta B$$

④ خاصیت شرکت‌پذیری : $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

## ضرب دکارتی: (Cartesian Product of sets)

تعریف می‌کنیم $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$

مثال: با فرض $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۴,۵\}$ مطلوبست:

الف) $A\times B=\{(۲,۴),(۲,۵),(۴,۴),(۴,۵),(۶,۴),(۶,۵)\}$

ب) $B\times A=\{(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۵,۲),(۵,۴),(۵,۶)\}$

پ) $B^۲=B\times B=\{(۴,۴),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۵)\}$

نکات مهم:

① درحالت کلی $A\times B\neq B\times A$ است. (مثال قبل دقت کنید)

② اگر $A$ مجموعه $n$ عضوی و $B$ مجموعه $m$ عضوی باشند آنگاه $A\times B$ دارای $n\times m$ عضو است.

③ $(A\subseteq B)\wedge(C\subseteq D)\Rightarrow(A\times C)\subseteq(B\times D)$

اثبات ③

$(x,y)\in A\times C\Rightarrow x\in A\wedge y\in C$

$\xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B} x\in B\wedge y\in D$

$\Longrightarrow (x,y)\in B\times D$

بنابراین $A\times C\subseteq B\times D$

④ ضرب دکارتی نسبت به اجتماع، اشتراک، تفاضل و تفاضل متقارن خاصیت پخشی دارد. به عنوان نمونه:

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

⑤ $$A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$$

اثبات ⑤ برهان خلف:

گیریم $A\times\varnothing\neq\varnothing$ ، در این صورت، وجود دارد حداقل یک عضو مانند $(x,y)$ در $A\times\varnothing$ یعنی:

$$(x,y)\in A\times\varnothing \Rightarrow x\in A \wedge y\in\varnothing$$ ← تناقض

بنابراین: $A\times\varnothing=\varnothing$

به طریق مشابه ثابت می‌شود $\varnothing\times A=\varnothing$ .

⑥ به شرط تهی نبودن $A$ و $B$ داریم: $A\times B=B\times A\Longrightarrow A=B$

اثبات ⑥:

$A$ و $B$ ناتهی اند بنابراین وجود دارد $x\in A$ و $y\in B$ و در نتیجه:

$$x\in A\wedge y\in B\Rightarrow(x,y)\in A\times B\xrightarrow{A\times B=B\times A}(x,y)\in B\times A$$
$$\Rightarrow x\in B\wedge y\in A\Rightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$$
$$\Longrightarrow A=B$$

مثال: اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$ و $B=\{x+1,۴,-۲\}$ ، $A\times B=B\times A$ ، بیشترین مقدار $x^۲+y^۲+z^۲$ را بیابید.

$$A\times B=B\times A\Longrightarrow A=B$$

$$(x+1=۵\rightarrow x=۴)\wedge(y+۲=۴\rightarrow y=۲)\wedge(z=-۲)\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۲۴$$

$$(x+1=۵\rightarrow x=۴)\wedge(y+۲=-۲\rightarrow y=-۴)\wedge(z=۴)\Rightarrow x^۲+y^۲+z^۲=۴۸$$

بنابراین بیشترین مقدار $x^۲+y^۲+z^۲$ برابر ۴۸ است.

تمرین: با فرض ناتهی بودن مجموعه‌های $A$ ، $B$ و $C$ ثابت کنید:

$$A\times B\subseteq A\times C \iff B\subseteq C$$

اثبات (از چپ به راست)

$$x\in A\wedge y\in B\Rightarrow (x,y)\in A\times B \xrightarrow{A\times B\subseteq A\times C} (x,y)\in A\times C$$
$$\Rightarrow x\in A\wedge y\in C \Rightarrow B\subseteq C$$

اثبات (از راست به چپ)

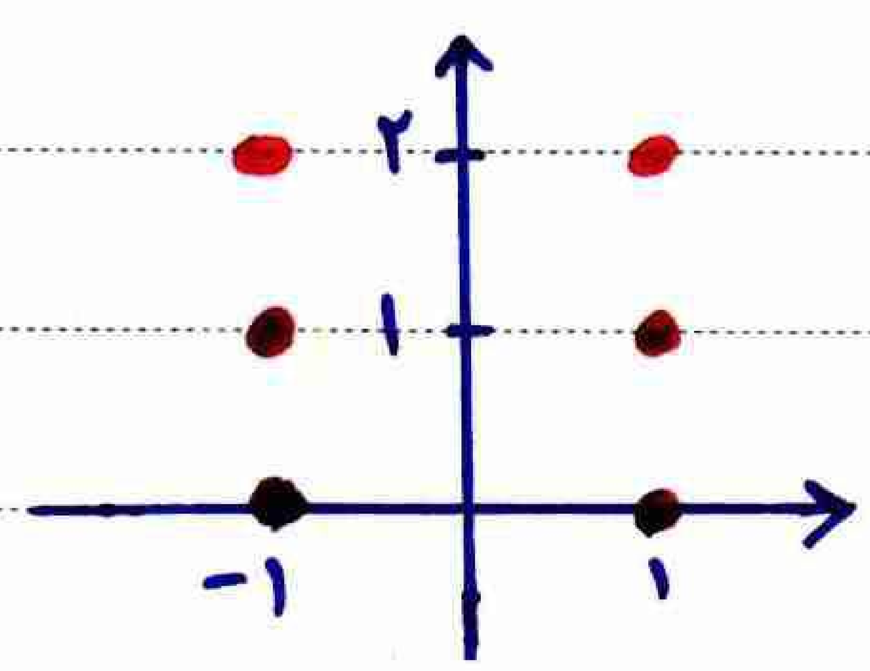
$$(x,y)\in A\times B\Rightarrow x\in A\wedge y\in B$$
$$\xrightarrow{B\subseteq C} x\in A\wedge y\in C \Rightarrow (x,y)\in A\times C$$
$$\Rightarrow A\times B\subseteq A\times C$$

توجه: نوع دیگر نمایش ضرب دکارتی، نمودار مختصاتی است.

مثال: در هر یک از حالات زیر نمودار مختصاتی $A\times B$ را رسم کنید.

الف) $A=\{-1,1\}$ ، $B=\{0,1,2\}$

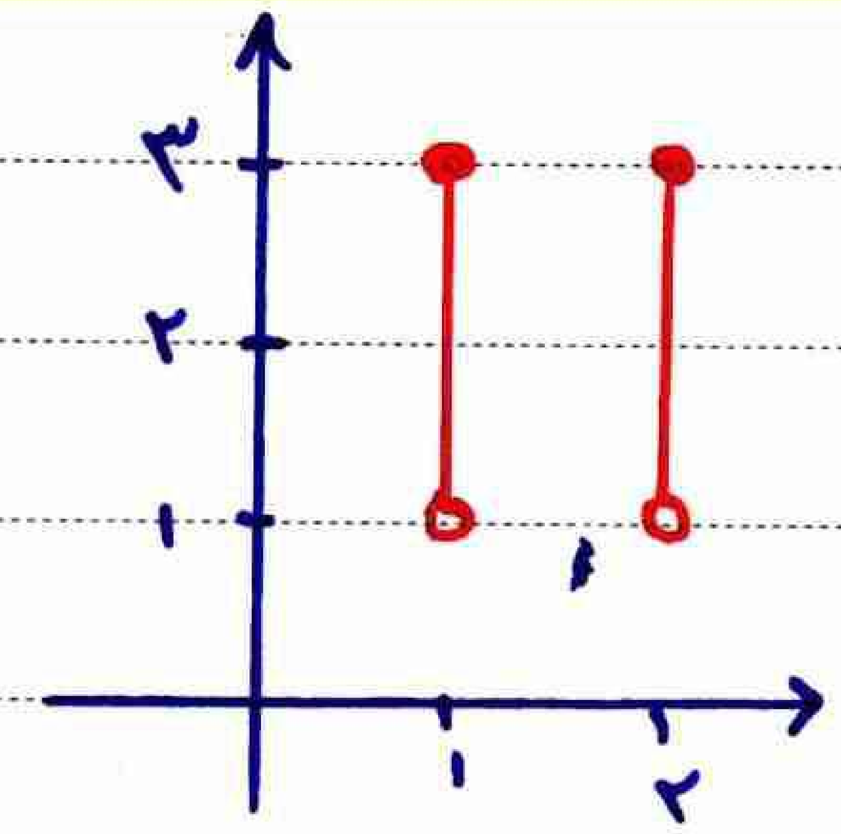
$$\Rightarrow A\times B=\{(-1,0),(-1,1),(-1,2),(1,0),(1,1),(1,2)\}$$





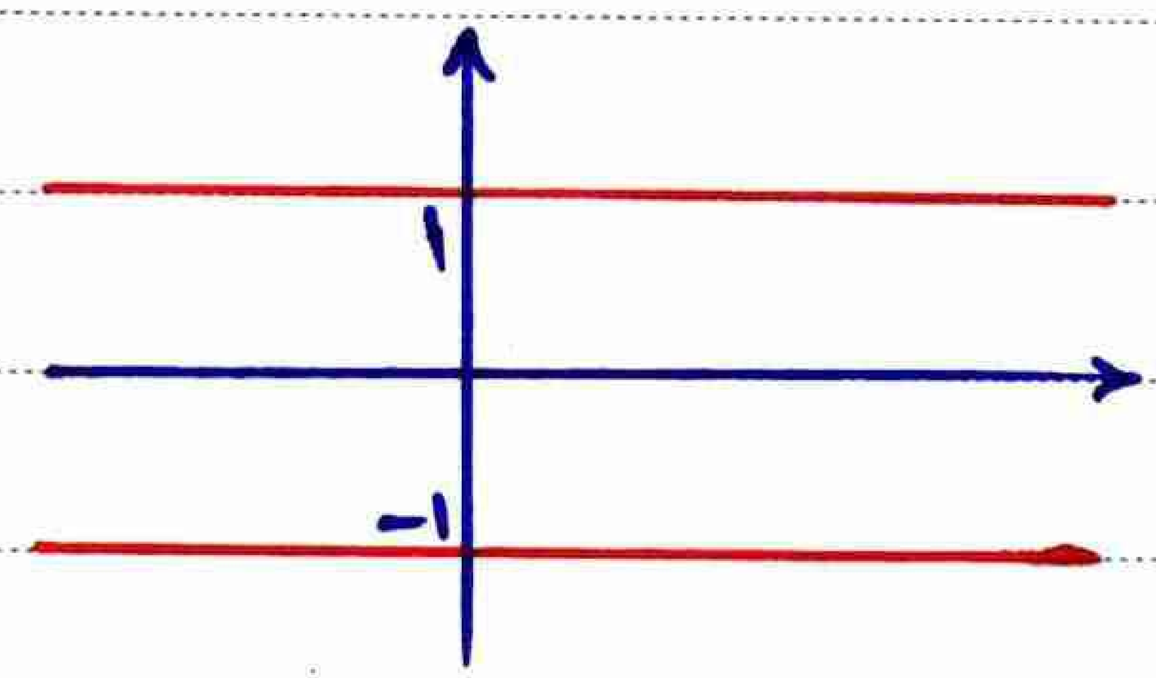

ب) $A=\{1,2\}$ ، $B=(1,3]$

$$\Rightarrow A\times B=\{(x,y)\mid (x=1\vee x=2)\wedge 1<y\leq 3\}$$



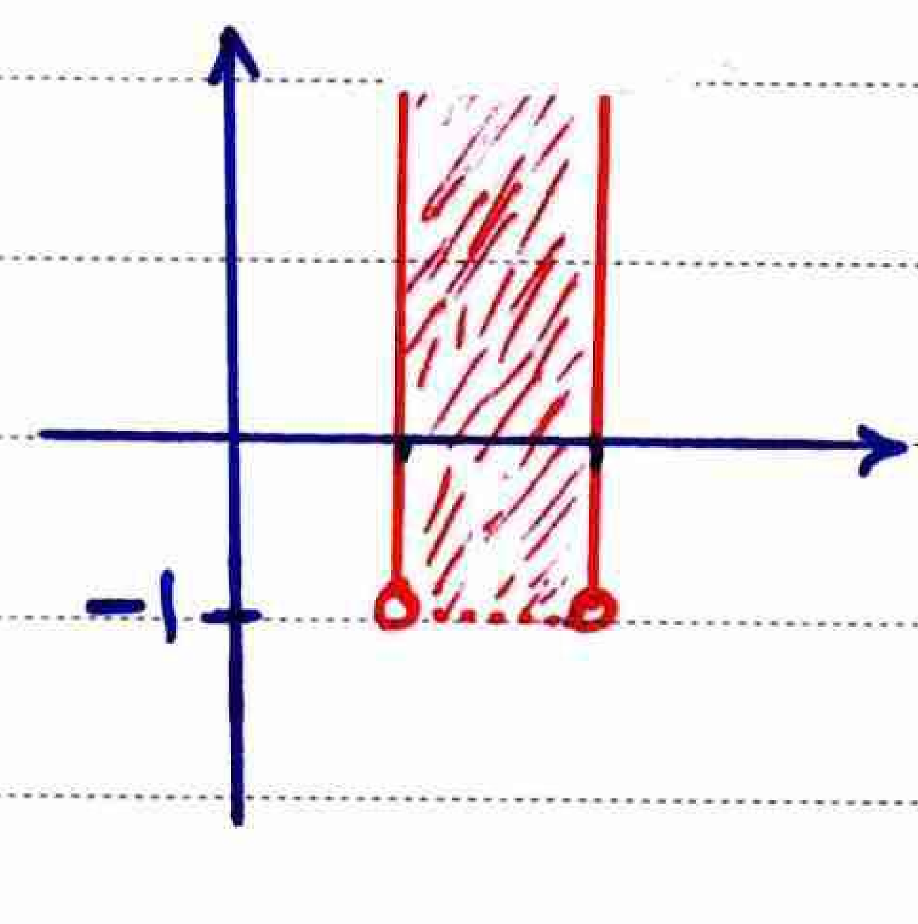
پ) $A=\mathbb{R}$ و $B=\{-1,1\}$

$A\times B=\{(x,y) \mid x\in\mathbb{R} \wedge (y=-1 \vee y=1)\}$



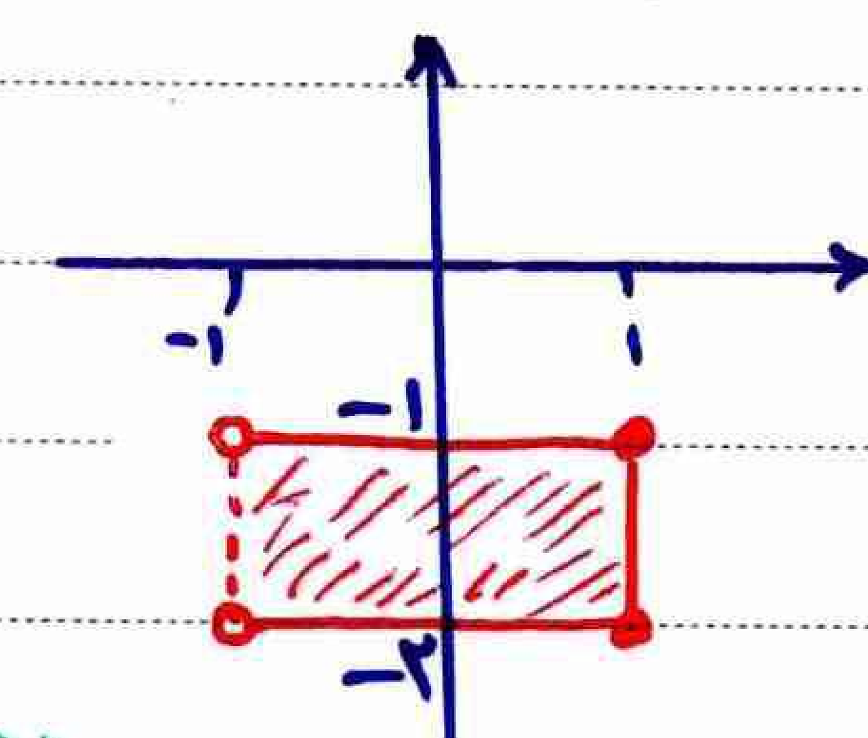
ت) $A=[1,2]$ و $B=(-1,+\infty)$

$A\times B=\{(x,y) \mid 1\leq x\leq 2 \wedge y>-1\}$



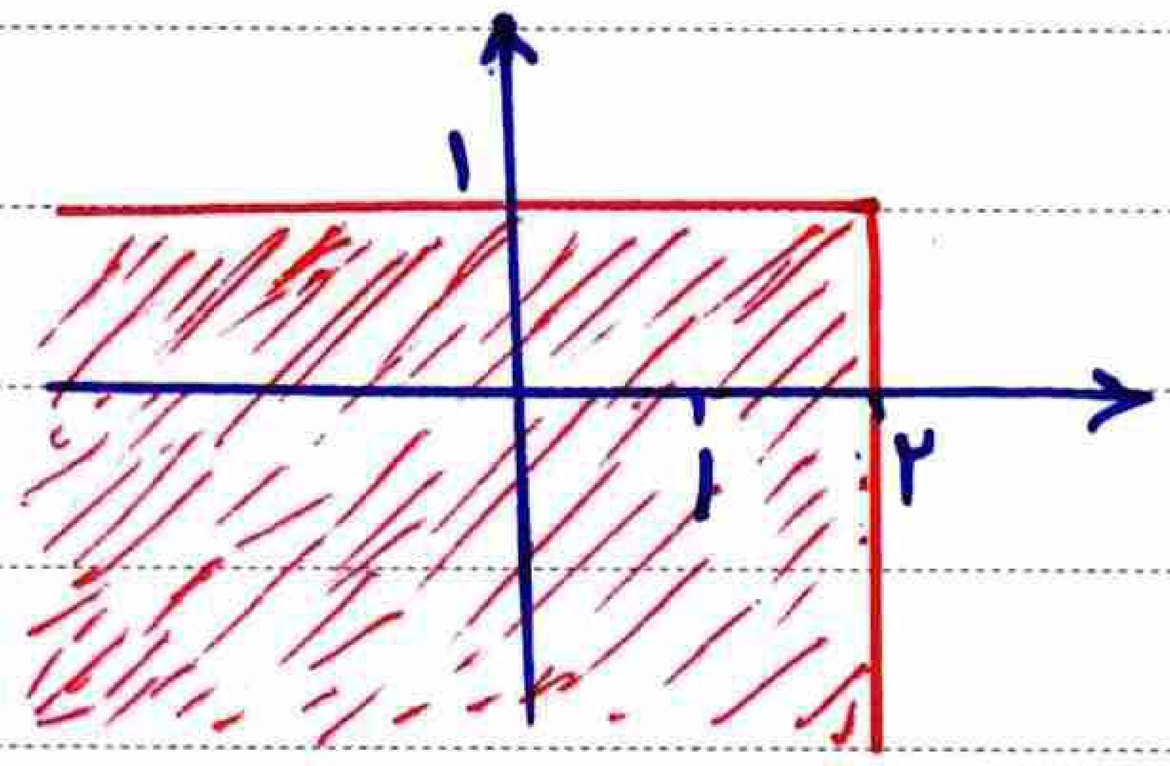
ث) $A=(-1,1]$ و $B=[-2,-1]$

$A\times B=\{(x,y) \mid -1<x\leq 1 \wedge -2\leq y\leq -1\}$

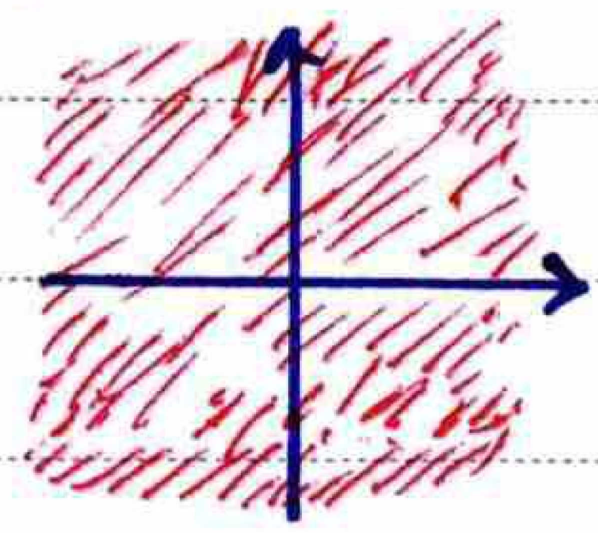


ج) $A=(-\infty,2]$ , $B=(-\infty,1]$

$A\times B=\{(x,y)\mid x\leq 2 \wedge y\leq 1\}$




توجه: درصورتی که $A=\mathbb{R}$ ، $B=\mathbb{R}$ فرض شود $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ خواهد شد که نمودار آن، تمام نقاط صفحه‌ی مختصات است.



توجه: به کمک شکل فرضی زیر می‌توان نتیجه گرفت:

$$(A\times B)'=(A'\times B')\cup(A'\times B)\cup(A\times B')$$