حسابان ۱

پایه ی یازدهم « رشته ی ریاضی فیزیک »

فصل ۲ : تابع

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

www.mathtower.ir

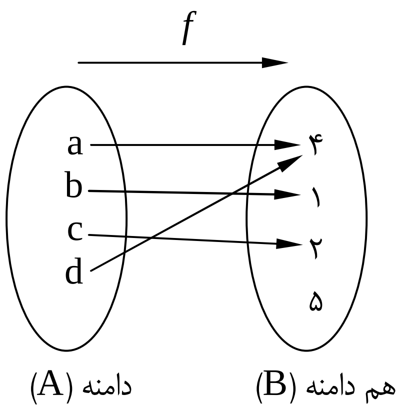
@mathameri

مهر ۱۴۰۱

درس اوّل : آشنایی بیشتر با تابع

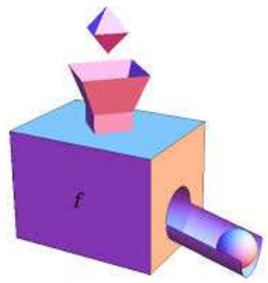
آشنایی با مفهوم تابع به عنوان یکی از مفاهیم اساسی ریاضیات ، برای درک و فهم بسیاری مفاهیم دیگر در ریاضیات و فیزیک و ... لازم و ضروری است. در پایه‌ی دهم با این مفهوم به صورت مقدماتی آشنا شدید. در اینجا ضمن یادآوری آن موضوعات تکمیلی دیگری را معرفی می کنیم.

قسمت اوّل : یادآوری مفهوم تابع



هر رابطه که هر عضو مجموعه‌ی A را **دقیقاً** به یک عضو از مجموعه‌ی B نسبت دهد را یک **تابع** از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B می نامند.

یک تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن، به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نظیر می شود. در این وضعیت مجموعه‌ی A را **دامنه** و مجموعه‌ی B را **هم دامنه** یا مقصد تابع می نامند و می نویسند.



$$f : A \to B$$

در ریاضیات، تابع را به روش های مختلفی نمایش می دهند. مهمترین این روش ها عبارتند از :

۱ : نمایش پیکانی

یک رابطه از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، که با **روش پیکانی** یا نمودار وِن نمایش داده می شود، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود. در این روش نمایش تابع، ممکن است به یک یا چند عضو هم دامنه پیکانی وارد نشود، یا به بعضی از آنها یک یا چند پیکان وارد شود. هر زیر مجموعه از هم دامنه که به آن پیکان وارد شده است را **برد** تابع می نامند.

در تابع مثال فوق داریم.

دامنه $A = D_f = \{a,b,c,d\}$ هم دامنه $B = \{۱,۲,۴,۵\}$ برد $R_f = \{۱,۲,۴\}$

تذکر : مجموعه‌ی تمام عضو هایی که یک تابع روی آنها اثـر مـی کنـد (کـه همگـی در مجموعـه‌ی A هستند.) را **دامنه** و مجموعه‌ی تمام عضوهایی از مجموعه‌ی B (هم دامنه) که متناظر با اعضای دامنه قـرار می گیرند را **برد** آن تابع می نامند. معمولاً دامنه‌ی تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نمایش می دهند.

تمرین ۱ : تمام تابع هایی را بنویسید که از $A=\{a,b,c\}$ به $B=\{p,q\}$ تعریـف مـی شـوند. سـپس تعداد آنها را تعیین کنید.

تمرین ۲ : اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{p,q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟

حل : طبق تعریف تابع ، هر عضو B می تواند حداکثر از ۴ عضو A به دست آمده باشد و چـون B دو عـضو دارد ، پس حداکثر توابعی که از A به B تعریف می شوند برابر $۱۶ = ۲^۴ = ۲\times۲\times۲\times۲$ باشند[1].

***

۲ : نمایش تابع توسط زوج های مرتب

مجموعه‌ای از زوج های مرتب[2] را در نظر می گیریم. اگر هیچ دو زوج مرتب متمایزی موجود نباشند که مولفه های اوّل آنها برابر باشند، این مجموعه تابعی خواهد بود که درآن مولفه های اوّل، اعضای دامنه و مولفه های دوّم ، اعضای برد می باشند.

به عنوان مثال، تابعی که در ابتدا اشاره کردیم، با روش پیکانی نمایش داده ایم. در واقع مجموعه‌ی زوج های مرتبی به صورت زیر را تشکیل می دهد.

$$f=\{(a,۴),(b,۱),(c,۲),(d,۴)\}$$

به طور کلی برای تابع f که از x به y تعریف شده است، می توان نوشت:

$$f=\{(x,y)\mid x\in D_f , y\in R_f\}$$

بنابراین در نمایش تابع به صورت **زوج مرتب**، اگر زوج های مرتب دارای مولفه های اوّل برابر باشـند، بایـد مولفه های دوّم آن ها نیز برابر باشند[3].

---

1 . به طور کلی اگر مجموعه‌ی A دارای m عضو و مجموعه‌ی B دارای n عضو باشد.حداکثر n^m تابع از A بـه B وجـود دارد.

2 . هر دو تایی به شکل (a,b) که محل قرار گرفتن اجزای آن مهم است را زوج مرتب می نامند. a را مؤلفـه‌ی اوّل (طـول) و b را مؤلفه‌ی دوّم (عرض) می نامند.

تمرین۳ : دامنه و برد تابع زیر را بنویسید.

$$f=\{(۳,۲),(۵,۸),(-۳,۲),(۲,۴),(۱,۲)\}$$

۳ : نمایش تابع از طریق ضابطه

برای تابع f که از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B تعریف شده است. رابطه‌ای که هر x از A را به y متناظرش از B مرتبط می کند. **ضابطه** یا قانون تابع می گوییم و به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$f:A\to B$$
$$y=f(x)$$

به عنوان مثال اگر تابع به هر عضو مجموعه‌ی $A=R$ مربع آن را نسبت دهد، در این صورت می توان نوشت.

$$f:R\to[۰,+\infty)$$
$$y=f(x)=x^{۲}$$

تذکر : خروجی هر عضو دامنه مانند x را با y یا $f(x)$ نمایش می دهند.

مثال الف : اگر گفته شود که تابع $f(x)=\dfrac{x+۱}{۲x-۶}$ داده شده است. نتیجه می گیریم که دامنه‌ی تابع باید $R-\{۳\}$ باشد.

مثال ب : اگر گفته شود که تابع $g(x)=\sqrt{۴-x}$ داده شده است. نتیجه می گیریم که دامنه‌ی تابع باید $(-\infty,۴]$ باشد.

تمرین۴ : تابعی مثال بزنید که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارد؟

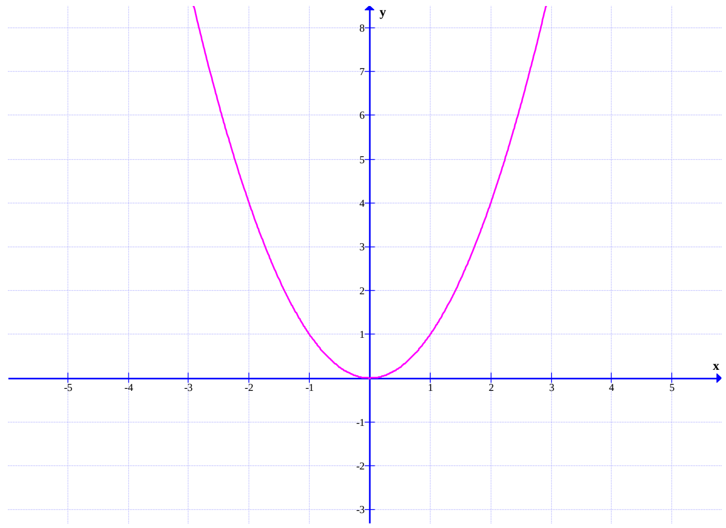
۴ : نمایش تابع به صورت هندسی (نمایش دکارتی)

اگر مجموعه‌ی f ، نمایش زوج های مرتب تشکیل دهنده‌ی یک تابع باشد، هر زوج مرتب مانند $(a,b)\in f$ یک نقطه از صفحه (در دستگاه مختصات دکارتی) را مشخص می کند. با تعیین محل تمام نقاط، نمودار (منحنی) تابع f پدید می آید.

---

[3] . اگر چنین نباشد، مجموعه ی داده شده تابع نیست.

برای مثال نمودار تابع $f(x)=x^2$ به شکل زیر است. که قبلاً آن را سهمی نامیده ایم.



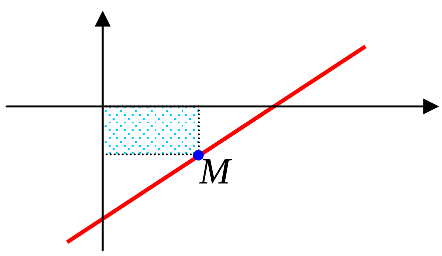
از دیدگاه هندسی، یک منحنی هنگامی نمایش یک تابع است که هر خط موازی محور عرضها آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط قائم)

تمرین۵ : نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$ ب) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ج) $f(x)=|x|$

***

تمرین۶ : در شکل مقابل یک مستطیل به محور های مختصات و خط $2y+x=1$ محدود شده است، معادله‌ی تابعی را بنویسید که مساحت مستطیل را به x وابسته کند.

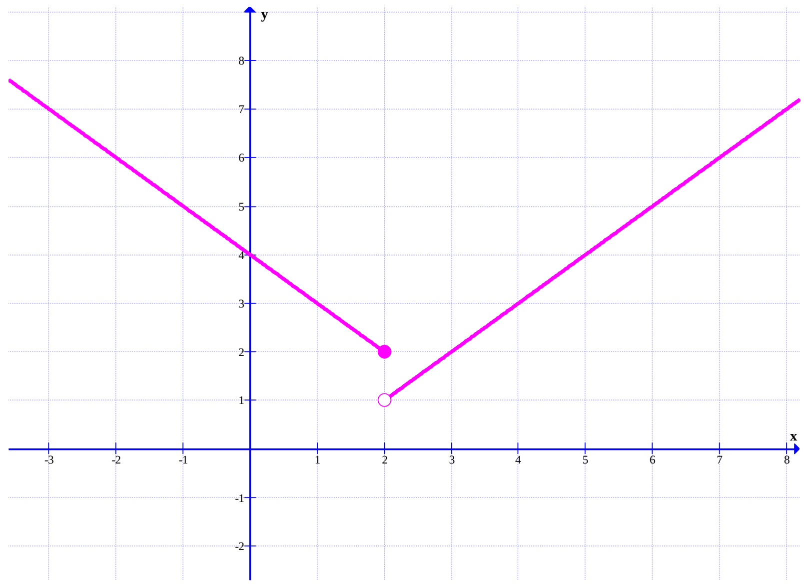


***

توجه: گاهی تابع را فقط با یک ضابطه تعریف می کنند، ولی گاهی لازم است که تابع را با چند ضابطه تعریف کرد. تابع زیر نمونه ای از یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x>2 \\ 4-x & x\le 2 \end{cases}$$

نمودار این تابع نیز به شکل زیر است.



روش رسم این تابع را توضیح دهید؟

مثال ۱ : تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x< ۰ \end{cases}$$

$$D_f=\{x\in R \mid x\geq ۰\}\cup\{x\in R \mid x< ۰\}=R$$

$$R_f=\{y\in R \mid y\geq ۰\}=[۰,+\infty)$$

مثال ۲ : تابع علامت یک تابع سه ضابطه ای است.

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} ۱ & x> ۰ \\ ۰ & x= ۰ \\ -۱ & x< ۰ \end{cases}$$

$$D_s=\{x\in R \mid x> ۰\}\cup\{۰\}\cup\{x\in R \mid x< ۰\}=R$$

$$R_s=\{۱,۰,-۱\}$$

تمرین ۷ : نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\geq ۰ \\ -۲x-۳ & x< ۰ \end{cases}$$

تمرین برای حل :

۸ : معادله‌ی یک تابع خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $(۳,۵)$ و $(-۱,-۳)$ بگذرد.

۹ : تابع f با مشخصات زیر داده شده است. نمودار تابع f را رسم کنید و ضابطه‌ی آن را بنویسید.

الف : $f(۲)=۳$ و $f(-۵)=-۲$ باشد.

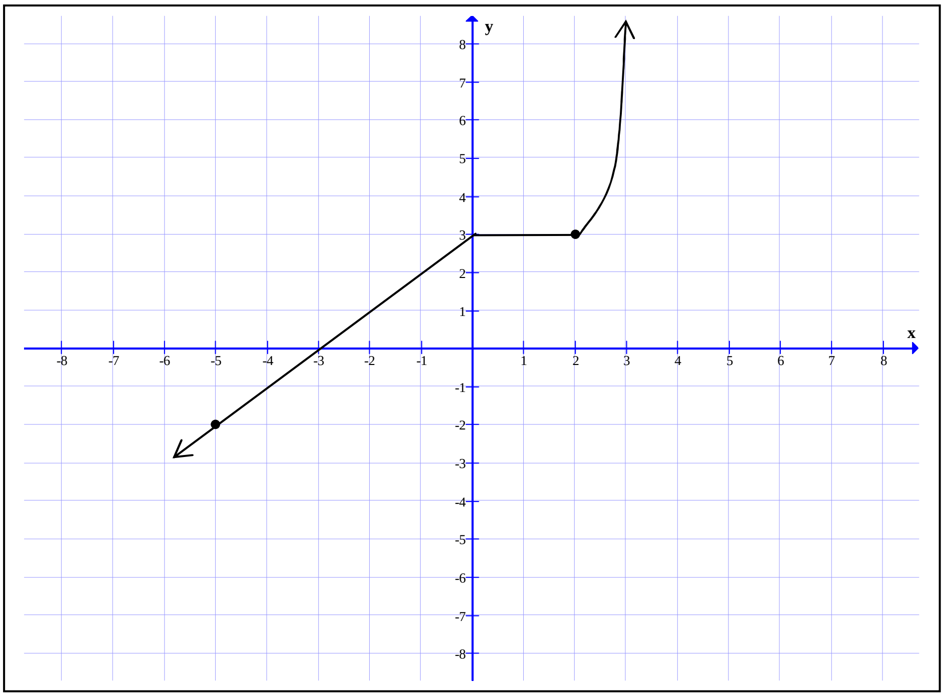
ب : دامنه‌ی تابع f برابر همه‌ی اعداد حقیقی است.

ج : تابع f در بازه‌ی $[۰,۲]$ ثابت باشد.

د : تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می دهد.

هـ : روی اعداد منفی، تابع خطی است.

حل :



برای تعیین معادله‌ی تابع وقتی که $x \le ۰$ باشد. طبق مسئله دو نقطه‌ی $(۰,۳)$ و $(-۵,-۲)$ را داریم و چون تابع خطی است. پس :

$$m=\frac{۳+۲}{۰+۵}=۱$$

$$y=۱(x-۰)+۳ \rightarrow y=x+۳$$

در نهایت معادله‌ی کلی تابع به شکل زیر است.

$$f(x)=\begin{cases} x+۳ & x<۰ \\ ۳ & ۰\le x\le ۲ \\ x^{۲} & x>۲ \end{cases}$$

۱۰ : اگر $f(x)=۲^{x}$ نشان دهید که: $\dfrac{f(x+۳)}{f(x-۱)}=f(۴)$

۱۱ : کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل خود را بیان کنید.

الف : برد و هم دامنه‌ی یک تابع می توانند یکی باشند.

ب : هم دامنه‌ی تابع زیر مجموعه ای از برد آن است.

ج : بی شمار تابع وجود دارد که دامنه‌ی آن بازه‌ی $[۰,۳]$ است.

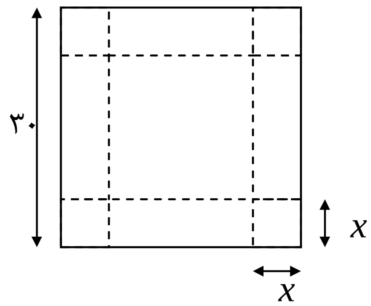
۱۲ : فرض کنید، تعداد افرادی که طی یک مدت معین به وسیله‌ی یک نوع ویروس آلوده می شوند با دستور زیر باشد. (در آن $t>۰$ زمان بر حسب ماه است.)

$$n(t)=\frac{۹۵۰۰t+۲۰۰۰}{۴+t}$$

الف : تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده اند، چقدر است؟

ب : پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۹۰۰ نفر خواهد رسید؟

۱۳ : از چهار گوشه‌ی مقوایی مربع شکل به ضلع ۳۰ سانتی متر، مربع های دیگری به ضلع x سانتی مترجدا می کنیم. سپس لبه های مقوا را از روی خط چین تا می کنیم تا جعبه ای (بدون در) به دست آید. حجم جعبه را به صورت تابعی از x بنویسید.



***

قسمت سوّم : روش رسم نمودار تابع چند ضابطه ای

برای رسم نمودار تابع چند ضابطه ای کافی است که نمودار هر ضابطه را به طور مجزا رسم کرده و روی هرکدام از نمودار ها قسمت هایی را که در دامنه شان است، پررنگ کرده و بقیه را پاک کنیم.

تمرین۱۴: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-x+۲ & x>۱\\ x^{۲} & -۱\le x\le ۱\\ x+۲ & x<-۱\end{cases}$$

تمرین ۱۵ : نمودار تابع زیر را رسم کنید و سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -۲x-۳ & x<۱ \\ ۴ & ۱\le x\le ۲ \\ x+۲ & x>۲ \end{cases}$$

***

قسمت چهارم : تساوی دو تابع

دو تابع f و g را مساوی گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) دامنه های هر دو تابع مجموعه های مساوی باشند. ($D_f=D_g$)

ب) به ازای هر x عضو دامنه مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ برابر باشند. ($f(x)=g(x)$)

به عبارتی دیگر، دو تابع مساوی هستند، هرگاه نمودار های آنها در یک دستگاه مختصات دقیقاً بر هم منطبق شوند.

مثال۱: دو تابع زیر مساوی نیستند زیرا دامنه‌ی یکسان ندارند.

$$f(x)=x+۱ \qquad \text{و} \qquad g(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$$

$$D_f=R \qquad \text{و} \qquad D_g=R-\{۱\} \qquad \Rightarrow \qquad D_f\neq D_g$$

مثال۲ : دو تابع زیر مساوی نیستند، زیرا با اینکه دامنه‌ی یکسان دارند. ولی مقادیر نابرابر دارند.

$$f(x)=x^۲ \qquad \text{و} \qquad g(x)=|x|$$

$$D_f=D_g=R \qquad \text{و} \qquad f(x)\neq g(x)$$

مثال۳ : دو تابع $f(x)=|x|$ و $g(x)=\sqrt{x^۲}$ بنابر تعریف فوق مساوی هستند. زیرا

اولاً : دامنه‌ی هر دو تابع مجموعه های مساوی هستند. $D_f=D_g=R$

ثانیاً : به ازای هر x عضو دامنه، مقادیر دو تابع برابر هستند. $g(x)=\sqrt{x^۲}=|x|=f(x)$

تمرین برای حل :

۱۶ : در هر مورد ، تساوی دو تابع داده شده را بررسی کنید.

الف) $f(x)=x^{۲}-۴$ و $g(x)=\dfrac{x^{۴}-۱۶}{x^{۲}+۴}$

ب) $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x+۲}$

ج) $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

د) $f=\{(۱,۲),(۵,۷)\}$ و $g=\{(۱,۷),(۵,۲)\}$

هـ) $f(x)=x|x|$ و $g(x)=x^{۲}$

۱۷ : دو تابع زیر مساویند. مقدار a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+۳x+۲}{x+۱} & x\neq -۱\\ ۳a+۷ & x=-۱\end{cases} \qquad \text{و} \qquad g(x)=x+۲$$

۱۸ : کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل خود را بیان کنید.

الف : اگر دامنه‌ی دو تابع با هم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب : اگر دو تابع مساوی باشند، آنگاه بردهای مساوی دارند.

پ : اگر نمودار های دو تابع کاملاً بر هم منطبق باشند، آن دو تابع مساویند.

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

درس دوّم : انواع توابع

در این درس با انواع مختلفی توابع آشنا می شویم. شناخت انواع توابع جهت مدل سازی پدیده های طبیعی می تواند مفید باشد.

قسمت اوّل : معادلات و توابع

بسیاری از توابع را با یک معادله بیان می کنند، مثلاً می نویسند.

$$y = x^{۲} + ۳x - ۱$$

ولی توجه داشته باشیم یک معادله با دو متغیر x و y الزاماً یک تابع نیست. برای مثال معادله ی زیر ، یک تابع نیست.

$$x^{۲} + y^{۲} = ۴$$

طبق تعریف تابع، یک معادله با دو متغیر y و x ، هنگامی یک تابع مشخص می کند که اگر (a,b) و (a,c) در آن صدق کنند، باید $b = c$ باشد. یعنی :

$$\left.\begin{matrix}(a,b)\in f\\(a,c)\in f\end{matrix}\right\} \rightarrow b = c$$

و اگر نتوان نتیجه گرفت که $b = c$ ، معادله ی داده شده تابع نمی باشد[1].

تمرین ۱ : کدام یک از معادلات زیر، تابع است.

الف) $y = x^{۲} + ۱$ ج) $x^{۲} + y^{۲} = ۱$

ب) $y = x^{۳} - ۲$ د) $y = x^{۲} + ۲x$

حل:

---

[1] . در برخی از تساوی های از جمله تساوی های زیر نمی توان نتیجه گرفت $b = c$

الف) $b^{۲} = c^{۲} \nrightarrow b = c$ ب) $|b| = |c| \nrightarrow b = c$ ج) $[b] = [c] \nrightarrow b = c$

جزء صحیح یک عدد حقیقی مانند x که با نماد $[x]$ نمایش داده می شود ، به صورت زیر تعریف می شود.

اگر x عدد صحیح باشد. $[x]$ با خود x برابر است. مثلاً $[۵] = ۵$

اگر x عدد صحیح نباشد. $[x]$ با بزرگترین عدد صحیح قبل از x برابر است. مثلاً $[۲/۵] = ۲$ و $[-۳/۵] = -۴$

الف:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f \to b=a^{۲}+۱\\ (a,c)\in f \to c=a^{۲}+۱\end{array}\right\}\to b=c$$

معادله‌ی $y=x^{۲}+۱$، تابع است.

ب:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f \to b=a^{۳}-۲\\ (a,c)\in f \to c=a^{۳}-۲\end{array}\right\}\to b=c$$

معادله‌ی $y=x^{۳}-۲$، تابع است.

ج:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f \to a^{۲}+b^{۲}=۱\\ (a,c)\in f \to a^{۲}+c^{۲}=۱\end{array}\right\}\to a^{۲}+b^{۲}=a^{۲}+c^{۲}\to b^{۲}=c^{۲}\nrightarrow b=c$$

معادله‌ی $x^{۲}+y^{۲}=۱$، تابع نیست.

د:

$$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in f \to b=a^{۲}+۲a\\ (a,c)\in f \to c=a^{۲}+۲a\end{array}\right\}\to b=c$$

معادله‌ی $y=x^{۲}+۲x$، تابع است.

***

تمرین۲ : کدام یک از معادلات زیر یک تابع مشخص می کند.

۱) $-x^{۲}+y=۴$

۲) $x-y^{۲}=۴$

۳) $y^{۲}=x^{۲}$

۴) $x=۱$

۵) $y=-۲$

۶) $y=|x|$

تمرین۳ : آیا ضابطه‌ی زیر یک تابع است؟ چرا؟

$$f(x)=\begin{cases}x+۳ & x\leq ۰\\ x-۱ & x\geq ۰\end{cases}$$

تمرین برای حل :

۴ : کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می کند.

۱) $x=|y|+۳$

۲) $۱+\sqrt{y}=x$

۳) $y=|x|-۱$

۴) $y=\frac{۳x-۱}{x+۵}$

۵) $y=x^{۲}-۶x$

۶) $y^{۳}+۳y^{۲}+۳y+x^{۳}+x=۵$

۵ : ضابطه‌ی زیر یک تابع است. مقدار a را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}-۲ & x\le ۱ \\ ۳x+۵ & x\ge ۱ \end{cases}$$

***

قسمت دوّم : توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای بوده و $Q(x)$ غیرصفر باشد، را تابع گویا می نامند.

مثال: هر یک از توابع زیر، گویا هستند.

$$f(x)=\frac{x^{۲}+۳x-۱}{x+۵} \quad و \quad f(x)=\frac{\sqrt{۲}x}{۵-x^{۳}} \quad و \quad f(r)=\frac{۱-r}{۳r-۷} \quad و \quad f(k)=۵k-۱$$

همچنین هر یک از توابع زیر گویا نمی باشند. (چرا؟)

$$f(x)=\frac{۱-\sqrt{x}}{۲x-۹} \qquad و \qquad f(u)=\sqrt{۵u^{۲}+۳}$$

دامنه‌ی هر تابع گویا ، برابر مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی بجز ریشه های مخرج آن است.

$$D_f=R-\{\text{ریشه های مخرج}\}$$

مثال : دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{۳x+۱}{x^{۲}-۵x}$ را تعیین کنید.

حل :

$x^{۲}-۵x=۰ \to x(x-۵)=۰ \to x=۰ \quad , \quad x=۵$

$D_f=R-\{۰,۵\}$

تمرین۶ : دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x+۳}{۲x-۱۰}$

ب) $f(x)=\dfrac{۵}{۴x^{۲}-۹}$

ج) $f(x)=\dfrac{۱-x}{x^{۳}-۹x^{۲}}$

د) $f(x)=\dfrac{۵x-۱}{۲۵+x^{۲}}$

تمرین۷ : معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $R-\{۳\}$ باشد.

***

قسمت سوّم : توابع رادیکالی (ریشه‌ی دوّم)

هر تابع به شکل $f(x)=\sqrt{P(x)}$ که در آن عبارت $P(x)\geq ۰$ باشد، را یک تابع رادیکالی می نامند.

مثال: هر یک از توابع زیر، رادیکالی هستند.

$f(x)=\sqrt{x^{۲}+۳x-۱}$ و $f(u)=\sqrt{۳-u}$

همچنین هر یک از توابع زیر رادیکالی نمی باشند. (چرا؟)

$f(x)=۲\sqrt{۵}x^{۳}+۲x+۱$ و $f(r)=۵r^{۲}+۳$

دامنه‌ی هر تابع رادیکالی ، برابر زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که به ازای هـر عـضو آن زیـر رادیکـال منفی نشود.

$$D_f=\{x|P(x)\geq ۰\}$$

مثال : دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ را تعیین کنید.

حل :

$x-۱\geq ۰ \to x\geq ۱ \Rightarrow D_f=[۱,+\infty)$

تمرین۹ : دامنه‌ی هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=۱+\sqrt{۶-۳x}$

ب) $f(x)=\sqrt{۲x+۳}$

ج) $f(x)=\sqrt{۹-x^{۲}}$

د) $f(x)=\dfrac{\sqrt{۲x-۶}}{x-۵}$

تمرین ۱۰ : معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $[-۳,+\infty)$ باشد.

تمرین ۱۱ : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{۲-x}$ ب) $g(x)=۱+\sqrt{x-۳}$

تمرین برای حل :

۱۲ : دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\dfrac{x-۱}{۲-x}$ ت) $f(x)=۲\sqrt{x}-۳$ چ) $f(x)=\dfrac{۵x-۳}{\sqrt{۲x-۴}}$

ب) $f(x)=\sqrt{۳x+۱}$ ث) $f(x)=\dfrac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$ ح) $f(x)=\sqrt{۳x-x^۲}$

پ) $f(x)=\dfrac{-۳x}{x^۲+۱}$ ج) $f(x)=\sqrt{۸-x}$

۱۳ : نمودار توابع زیر را رسم نموده و سپس دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & x>۰\\ x-۲ & x\leq ۰\end{cases}$ پ) $f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$

ب) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\leq x\leq ۰\end{cases}$ ت) $f(x)\begin{cases}-\dfrac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x+۲} & x\geq ۰\end{cases}$

۱۴ : تابعی گویا بنویسید که دامنه‌ی آن $R-\{۱\}$ باشد.

۱۵: معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $(۱,+\infty)$ باشد.

۱۶ : معادله‌ی تابعی را بنویسید که دامنه‌ی آن $(-\infty,۲]$ باشد.

۱۷ : نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ با دامنه‌ی $D_f=[-۵,۵]-\{۰\}$ را رسم کنید.

۱۸ : نمودار توابع $y=-۳+\sqrt{x-۴}$ را رسم کنید.

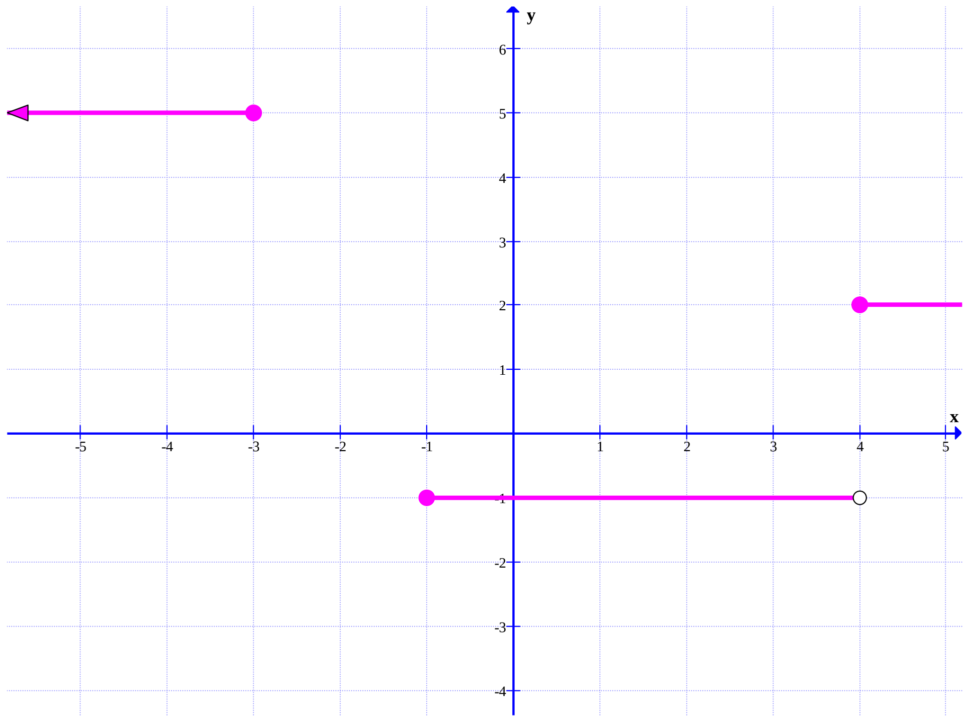
***

قسمت چهارم : تابع پله ای و تابع جزء صحیح

هر تابع که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه ، طوری تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد، را تابع پله ای می نامند. مانند تابع زیر

$$f(x)=\begin{cases} ۵ & x\leq -۳ \\ -۱ & -۱\leq x<۴ \\ ۲ & x\geq ۴ \end{cases}$$

این تابع دارای نموداری به شکل زیر است.



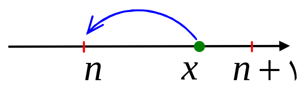
تمرین۱۹ : در یک پارکینگ، هزینه‌ی پارک خودرو بر اساس مدت زمان توقف خـودرو ، بـه ایـن صـورت محاسبه می شود.

$$f(t)=\begin{cases} ۳ & ۰\leq t<۲ \\ ۴ & ۲\leq t<۳ \\ ۵ & ۳\leq t<۴ \\ ۶ & t\geq ۴ \end{cases}$$

این تابع نمونه ای از یک تابع پله ای است. نمودار این تابع را رسم کنید.

جزء صحیح و ویژگی های آن

اگر x یک عدد حقیقی باشد، آنگاه بزرگترین عدد صحیح کمتر یا مساوی x را جزء صحیح x می نامند و آن را با نماد $[x]$ نمایش می دهند.($n\in Z$)



$$n\leq x<n+۱\leftrightarrow[x]=n$$

تمرین: تساوی های زیر را کامل کنید.

۱. $[۲/۳]=$ ۲. $[-۵]=$ ۳. $[-۵/۷]=$ ۴. $[\frac{۵}{۷}]=$ ۵. $[-\sqrt{۲}]=$

توجه ۱ : برای هر عدد حقیقی x داریم.

$$[x+k]=[x]+k \qquad (k\in Z)$$

توجه ۲ : برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$IF\ \ x\in Z\rightarrow[x]+[-x]=۰$$
$$IF\ \ x\notin Z\rightarrow[x]+[-x]=-۱$$

تمرین ۲۰: معادله‌ی $[x]+[x-۲]=۴$ را حل کنید.

حل:

$$[x]+[x-۲]=۴\rightarrow[x]+[x]-۲=۴\rightarrow ۲[x]=۶\rightarrow[x]=۳\rightarrow ۳\leq x<۴$$

تمرین ۲۱: معادله های زیر را حل کنید.

۱) $[x+۱]+[x+۲]=۵$ ۲) $[x+۱]+[x-۲]=۴$

حل ۲:

$$[x+۱]+[x-۲]=۴\rightarrow[x]+۱+[x]-۲=۴\rightarrow ۲[x]=۵\rightarrow[x]=\frac{۵}{۲}$$

غیر ممکن است، لذا معادله ریشه ندارد.

تابع $f(x)=[x]$ را تابع جزء صحیح می نامند. در واقع توابع جزء صحیح گونه‌ی خاصی از توابع پله ای می باشند. برای رسم نمودار تابع جزء صحیح ، در یک فاصله‌ی معین بازه هایی به شکل $[a,b)$ را طوری انتخاب می کنیم که جزء صحیح اعداد هر یک ، عدد صحیح مشخصی باشد.

دامنه‌ی تابعی مانند تابع فوق مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برد آن مجموعه‌ی اعداد صحیح است.

مثال : نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله‌ی $[-۲,۳)$ رسم کنید.

حل : فاصله‌ی $[-۲,۳)$ را طوری به بازه های کوچکتر تقسیم می کنیم. که جزء صحیح تمام اعضای هر بازه یکسان باشد.

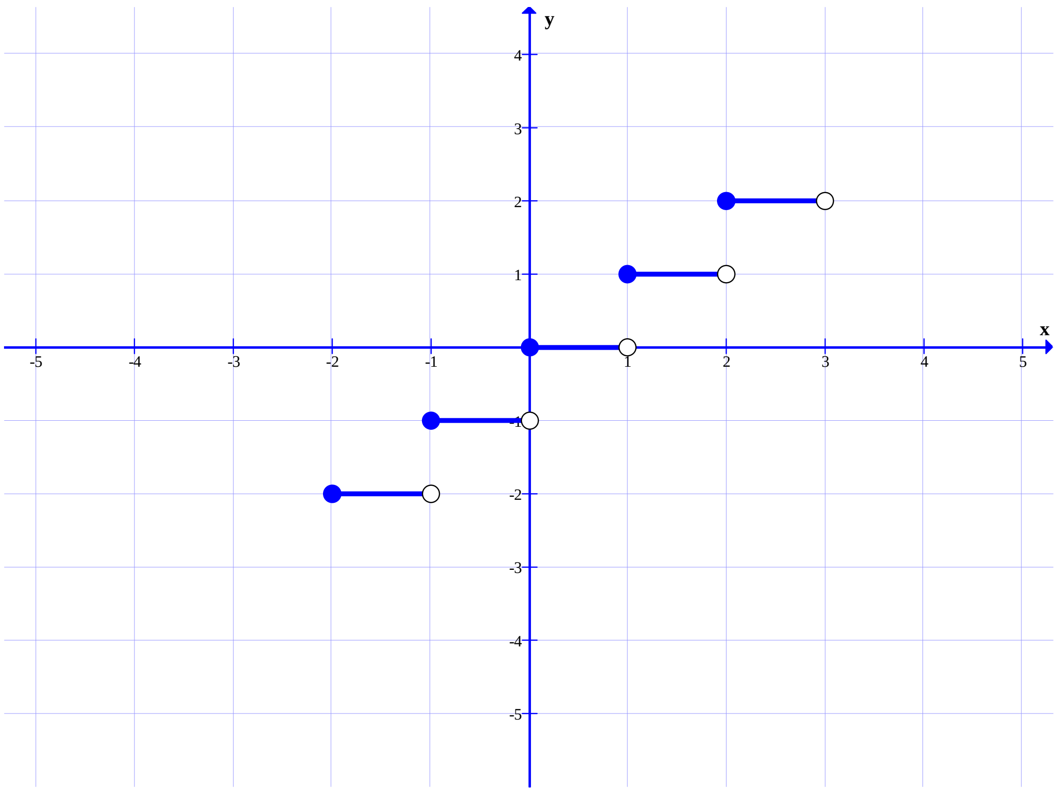
$$-۲\le x<-۱\xrightarrow{f(x)=[x]} y=-۲$$

$$-۱\le x<۰\xrightarrow{f(x)=[x]} y=-۱$$

$$۰\le x<۱\xrightarrow{f(x)=[x]} y=۰$$

$$۱\le x<۲\xrightarrow{f(x)=[x]} y=۱$$

$$۲\le x<۳\xrightarrow{f(x)=[x]} y=۲$$



تمرین ۲۲ : نمودار تابع $y=[x-۱]$ را در فاصله‌ی $[-۲,۳]$ رسم کنید.

حل :

$$-۲\leq x<-۱\xrightarrow{f(x)=[x]-۱}y=-۳$$

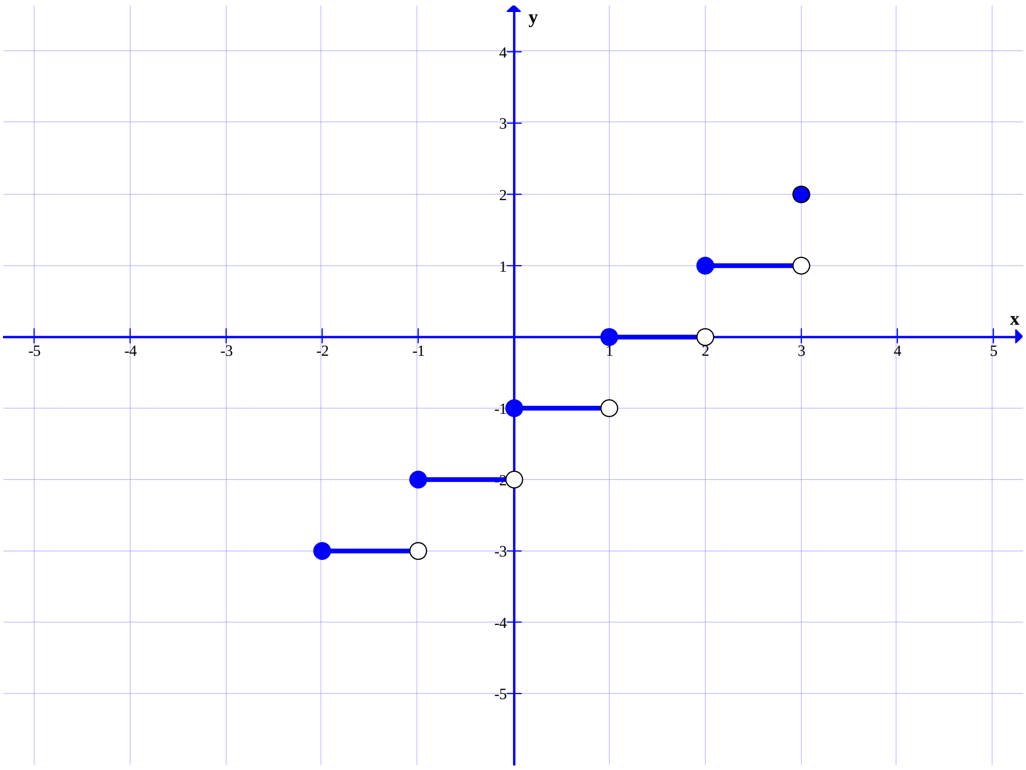
$$-۱\leq x<۰\xrightarrow{f(x)=[x]-۱}y=-۲$$

$$۰\leq x<۱\xrightarrow{f(x)=[x]-۱}y=-۱$$

$$۱\leq x<۲\xrightarrow{f(x)=[x]-۱}y=۰$$

$$۲\leq x<۳\xrightarrow{f(x)=[x]-۱}y=۱$$

$$x=۳\xrightarrow{f(x)=[x]-۱}y=۲$$



تمرین۲۳ : نمودار تابع $f(x)=[۲x]$ را در فاصله‌ی $[-۲,۱)$ رسم کنید.

حل : طول بازه ها را $\frac{۱}{۲}$ قرار می دهیم[۲].

$$-۲\le x<-\frac{۳}{۲}\rightarrow -۴\le ۲x<-۳\xrightarrow{f(x)=[۲x]}y=-۴$$

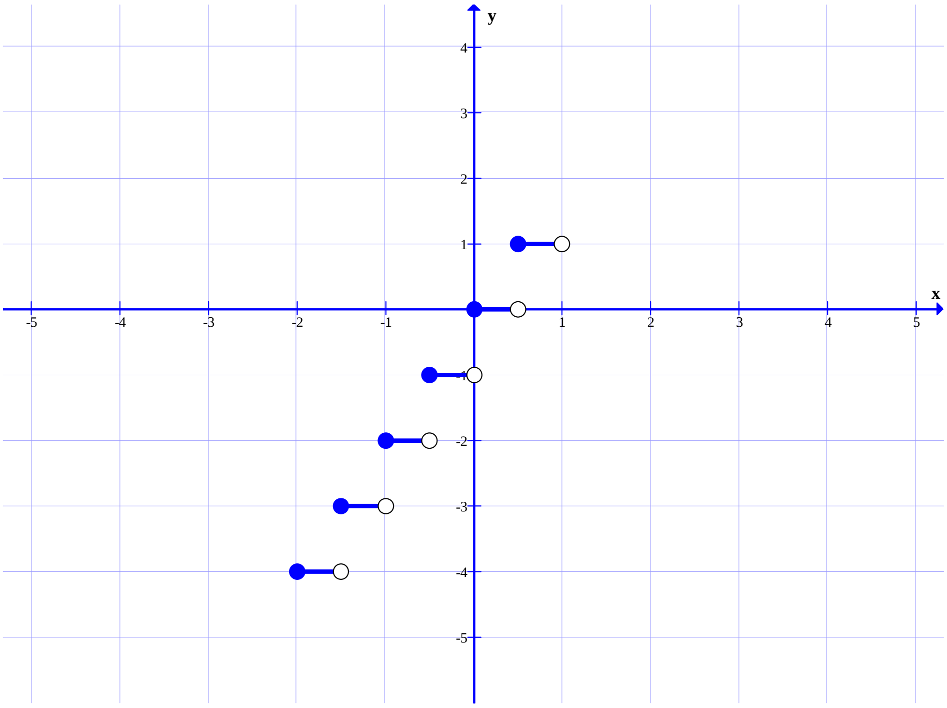
$$-\frac{۳}{۲}\le x<-۱\rightarrow -۳\le ۲x<-۲\xrightarrow{f(x)=[۲x]}y=-۳$$

$$-۱\le x<-\frac{۱}{۲}\rightarrow -۲\le ۲x<-۱\xrightarrow{f(x)=[۲x]}y=-۲$$

$$-\frac{۱}{۲}\le x<۰\rightarrow -۱\le ۲x<۰\xrightarrow{f(x)=[۲x]}y=-۱$$

$$۰\le x<\frac{۱}{۲}\rightarrow ۰\le ۲x<۱\xrightarrow{f(x)=[۲x]}y=۰$$

$$\frac{۱}{۲}\le ۲x<۱\rightarrow ۱\le ۲x<۲\xrightarrow{f(x)=[۲x]}y=۱$$



---

[۲]. برای رسم نمودار هر تابع به شکل $f(x)=[nx]$ طول بازه ها را $\frac{۱}{n}$ ، همچنین برای رسم نمودار هر تابع به شکل $f(x)=[\frac{۱}{n}x]$ طول بازه ها را n انتخاب کنید. مثلاً برای رسم نمودار تابع $f(x)=[۳x]$ طول بازه ها را $\frac{۱}{۳}$ و برای رسم نمودار تابع $f(x)=[\frac{۱}{۲}x]$ طول بازه ها را ۲ انتخاب کنید. $(n\in N)$

تمرین برای حل :

۲۴ : نمودار تابع $y=|[x]|$ را در فاصله‌ی $-۲ \le x < ۲$ را رسم کنید.

۲۵ : نمودار تابع $y=[\frac{۱}{۳}x]$ را در فاصله‌ی $-۳ \le x \le ۳$ رسم کنید.

۲۶ : نمودار توابع زیر را در فاصله‌ی $[-۲,۳)$ رسم کنید.

الف) $f(x)=[x]+۱$ ب) $y=[\frac{۱}{۲}x]$ ج) $y=۲[x]-۱$

۲۷ : نمودار تابع $y=[۲x]+۱$ را در فاصله‌ی $[-۱,۱)$ رسم کنید.

۲۸ : نمودار تابع $y=[x]+[-x]$ را رسم کنید.

***

تهیه کننده : جابر عامری

دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri

درس سوّم : تابع یک به یک و وارون یک تابع

در این درس ابتدا با مفهوم تابع یک به یک و سپس وارون تابع آشنا می شویم.

قسمت اوّل : تابع یک به یک

هر تابع که در زوج های مرتب متفاوت خود، مولفه های دوّم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک می نامند.

برای مثال:

تابع $f=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۹)\}$ یک به یک است.

تابع $g=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(-۱,۵)\}$ یک به یک نیست.

تابع $h=\{(۱,۵),(۲,۷),(۶,۰),(۱,۵)\}$ یک به یک است.

برای تعیین یک به یک بودن تابع وقتی که معادله‌ی آن معلوم باشد، می توان از الگوی زیر استفاده کرد.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow x_۱=x_۲$$

مثال : یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=۳x-۵$ ب) $g(x)=۴-x^۲$

حل : کافی است الگوی فوق را بکار ببریم.

الف) $f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow ۳x_۱-۵=۳x_۲-۵\rightarrow ۳x_۱=۳x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$

لذا این تابع یک به یک است.

ب) $g(x_۱)=g(x_۲)\rightarrow ۴-(x_۱)^۲=۴-(x_۲)^۲\rightarrow (x_۱)^۲=(x_۲)^۲\not\rightarrow x_۱=x_۲$

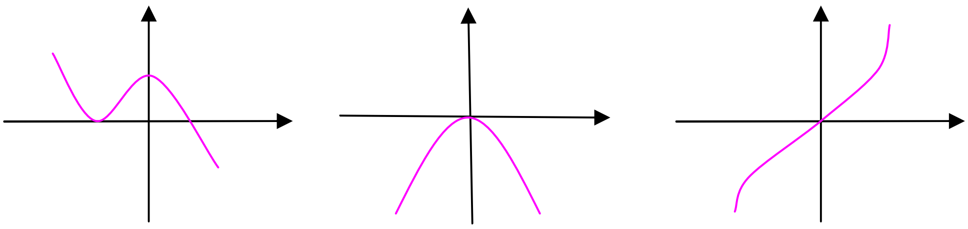
لذا این تابع یک به یک نیست.

توجه کنید در برخی از تساوی ها از قبیل موارد زیر نمی توان نتیجه گرفت که $a=b$

$$a^۲=b^۲\not\rightarrow a=b \quad \text{و} \quad |a|=|b|\not\rightarrow a=b \quad \text{و} \quad [a]=[b]\not\rightarrow a=b$$

برای تشخیص یک به یک بودن تابع وقتی که نمودار آن معلوم باشد، می توان از تعریف تابع یک به یک استفاده نمود. در واقع یک تابع یک به یک است هرگاه هر خط موازی محور طول ها (x ها) ، نمودار آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند. (آزمون خط افقی)

مثال : یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید.



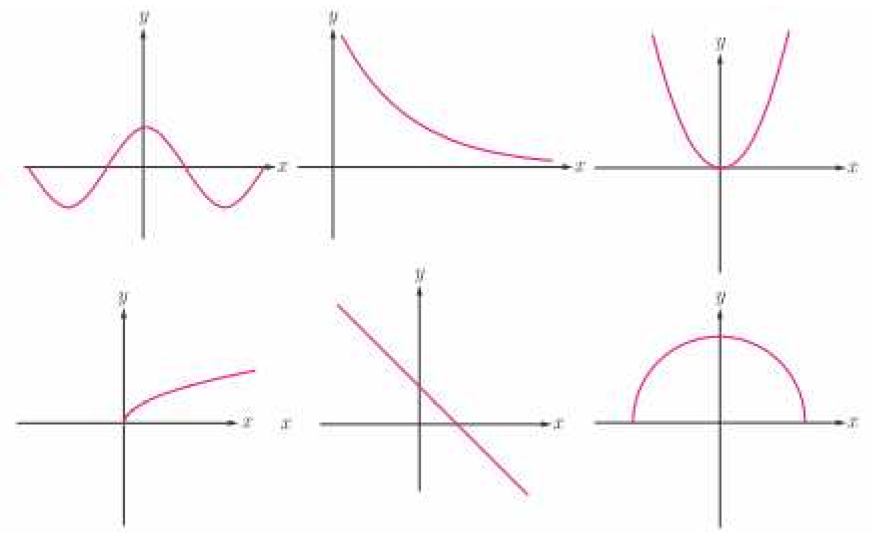
(الف)   (ب)   (ج)

حل: بنابر آزمون خط افقی معلوم می شود که توابع (الف) و (ب) یک به یک نیستند، ولی تابع (ج) یک به یک است.

تمرین برای حل:

۱ : اگر تابع $f=\{(-۲,۲),(m,۳),(-۱,۳),(۲m,a)\}$ یک به یک باشد، مقدار a را پیدا کنید.

۲ : کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند.



۳ : ثابت کنید که هر تابع خطی غیر ثابت یک به یک است.

۴ : نشان دهید که تابع $f(x)=\dfrac{۲x}{x+۱}$ یک به یک است.

۵ : با ذکر دلیل تعیین کنید که کدام یک از تابع های زیر یک به یک است.

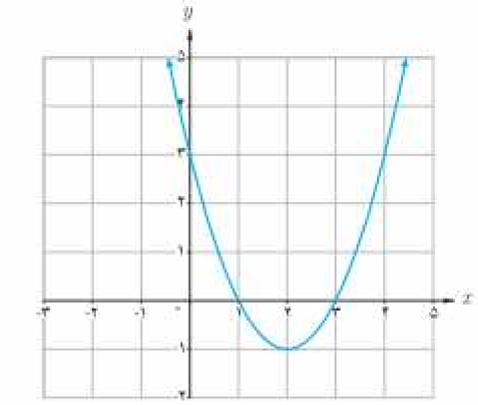
الف) $f(x)=۲[x]+۱$ ب) $g(x)=۲x^{۳}-۵$

۶ : آیا هر تابع درجه‌ی ۲ (سهمی) ، یک به یک است؟ چرا؟

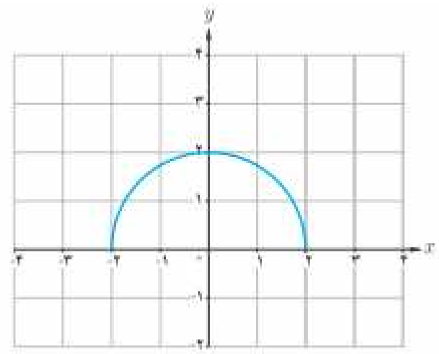
۷ : نمودار سهمی $f(x)=x^{2}-4x+3$ را رسم کنید. به نظر شما با محدود کـردن دامنـه‌ی ایـن تـابع روی کدام یک از بازه های زیر می توان یک تابع یک به یک ساخت؟

الف) $[0,2]$

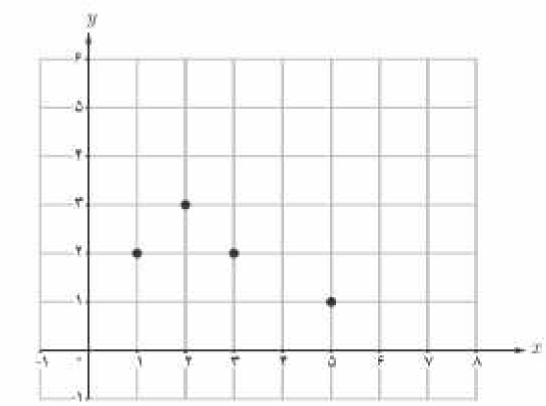
ب) $[1,4)$



۸ : با حذف بخشی از نمودار نیم دایره‌ی داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را مشخص کنید.



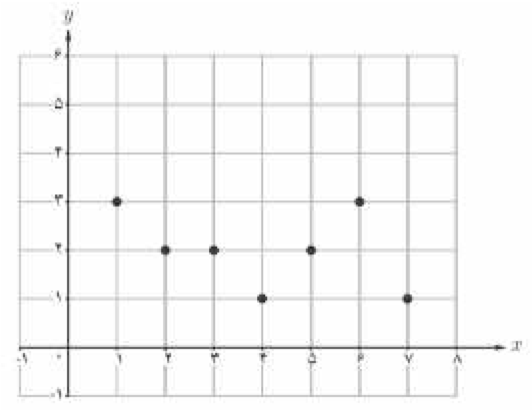
۱۰ : نمودار زیر را در نظر بگیرید.



الف : چرا این نمودار ، یک تابع یک به یک نیست؟

ب : با حذف تنها یک نقطه، نمودار را به یک تابع یک به یک تبدیل کنید. به نظر شما مسئله چند جواب دارد؟

۱۱ : نمودار یک تابع به صورت زیر است.



الف : آیا این تابع یک به یک است؟ چرا؟

ب : اگر بخواهیم تعدادی از نقاط این نمودار را حذف کنیم و یک تابع یک به یک به دست آوریم، به نظر شما حداکثر چند نقطه می توان باقی بماند.

۱۲ : تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد.

***

قسمت دوّم : تابع وارون (معکوس تابع)

اگر مؤلفه های اوّل و دوّم تمام زوج های مرتب تابعی را جابجا کنیم، دو حالت پیش می آید.

حالت اوّل) مجموعه‌ی جدید، تابع شود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر است و تابع جدیـد را را تابع معکوس می نامند. مانند :

$f=\{(۱,۷),(۳,۴),(۰,۹)\}$

$g=\{(۷,۱),(۴,۳),(۹,۰)\}$ تابع معکوس f

حالت دوّم) مجموعه‌ی جدید، تابع نشود. در این صورت می گویند این تابع معکوس پذیر نیست. مانند :

$f=\{(۱,۷),(۳,۴),(۹,۴)\}$

$g=\{(۷,۱),(۴,۳),(۴,۹)\}$

توجه داشته باشید که اگر تابع f معکوس پذیر باشد، معکوس آن را با $f^{-۱}$ نمایش می دهند.

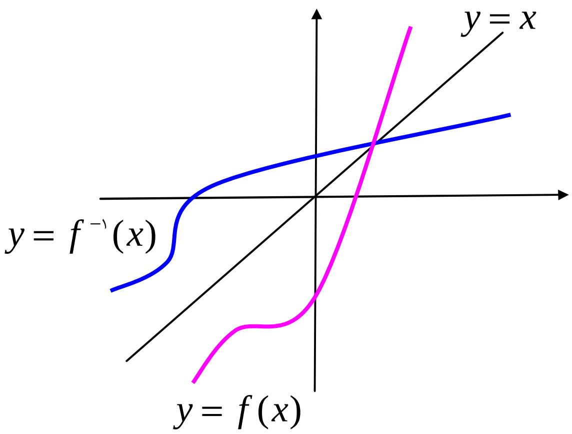
با توجه به مفهوم تابع معکوس به سهولت نتیجه می شود که:

الف) تابعی معکوس پذیر است، هرگاه یک به یک باشد.

ب) دامنه‌ی تابع f^{-1} برابر برد تابع f است. ($D_{f^{-1}} = R_f$)

ج) برد تابع f^{-1} برابر دامنه‌ی تابع f است. ($R_{f^{-1}} = D_f$)

د) نمودار هر تابع معکوس پذیر با نمودار معکوس آن نسبت به خط نیمساز ربع اوّل وسوّم ($y = x$) متقارن هستند.

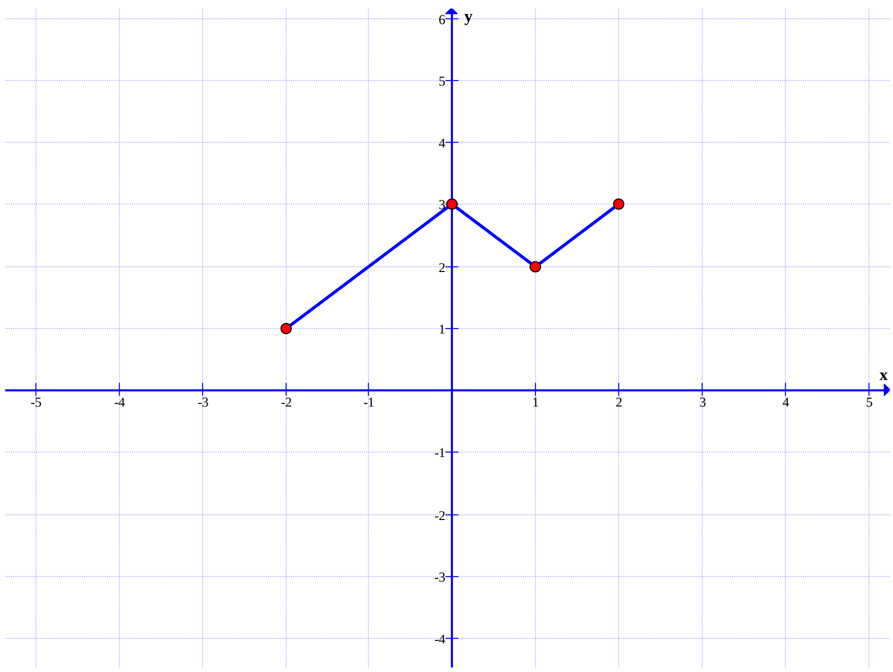


تمرین۱۳ : وارون تابع $f = \{(۲,۳),(-۲,۱),(-۱,۲)\}$ را به دست آورید.

تمرین۱۴ : نمودار تابع زیر را در نظر بگیرید.

الف : نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

ب : آیا این تابع وارون پذیر است؟ چرا؟



تمرین برای حل:

تمرین ۱۵: کدام یک از توابع زیر معکوس پذیر است. معکوس آن را در صورت وجود بنویسید.

الف) $f=\{(۲,۱),(۰,۳),(۵,۷),(-۲,۶)\}$

ب) $g=\{(۲,۵),(۰,۱),(۵,۷),(-۲,۱)\}$

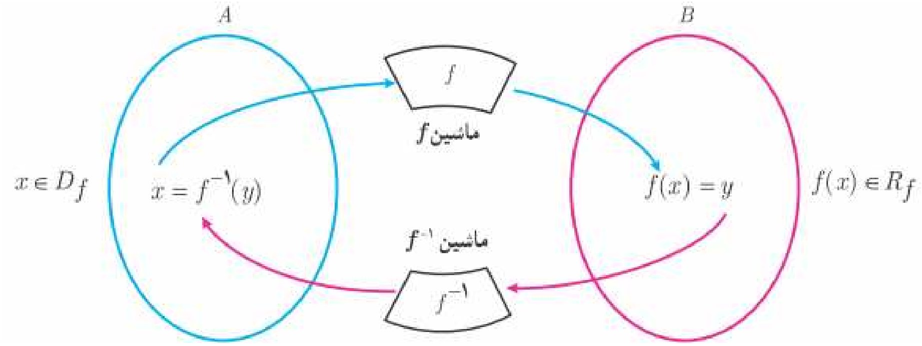
قسمت سوّم : روش های تعیین ضابطه‌ی معکوس تابع

برای تعیین معکوس یک تابع معکوس پذیر که معادله‌ی آن معلوم باشد. دو روش متداول است.

روش اوّل) تعویض متغیر ها: در این روش به ترتیب زیر عمل می کنیم.

مرحله‌ی ۱) متغیر x را به y و برعکس تبدیل می کنیم.

مرحله‌ی ۲) متغیر y را بر حسب x محاسبه می کنیم.



مثال: ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow\sqrt{۲x_۱-۳}=\sqrt{۲x_۲-۳}\rightarrow ۲x_۱-۳=۲x_۲-۳$$
$$\rightarrow ۲x_۱=۲x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$y=\sqrt{۲x-۳}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\sqrt{۲y-۳}\rightarrow x^۲=۲y-۳\rightarrow y=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

$$\therefore\ f^{-۱}(x)=\frac{x^۲+۳}{۲}$$

روش دوّم) بازگردانی اعمال: در این روش، ابتدا اعمال روی توابع را به ترتیب اوّلویـت مـی نویـسیم و سپس اعمال بازگشت هر یک را مشخص می کنیم. تابع حاصل، تابع وارون است.

مثال۱ : ثابت کنید که تابع $f(x)=۲x+۱$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow ۲x_۱+۱=۲x_۱+۱\rightarrow ۲x_۱=۲x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$$

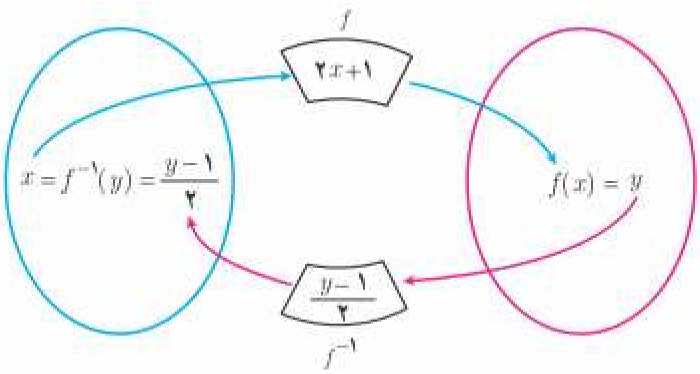
پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$x\xrightarrow{\times ۲}۲x\xrightarrow{+۱}۲x+۱\rightarrow y$$

$$y\leftarrow\frac{x-۱}{۲}\xleftarrow{\div ۲}x-۱\xleftarrow{-۱}x$$

$$f(x)=۲x+۱\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}$$

مراحل کار را می توانید در نمودار زیر مشاهده نمایید.



مثال۲ : ثابت کنید که تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ معکوس پذیر است، سپس معکوس آن را بیابید.

حل:

$$f(x_۱)=f(x_۲)\rightarrow\sqrt{۲x_۱-۳}=\sqrt{۲x_۲-۳}\rightarrow ۲x_۱-۳=۲x_۲-۳$$
$$\rightarrow ۲x_۱=۲x_۲\rightarrow x_۱=x_۲$$

پس تابع یک به یک است و لذا معکوس پذیر است.

$$x\xrightarrow{\times ۲}۲x\xrightarrow{-۳}۲x-۳\xrightarrow{root}\sqrt{۲x-۳}\rightarrow y$$

$$y\leftarrow\frac{x^۲+۳}{۲}\xleftarrow{\div ۲}x^۲+۳\xleftarrow{+۳}x^۲\xleftarrow{sqr}x$$

$$f(x)=\sqrt{۲x-۳} \rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x^{۲}+۳}{۲}$$

تمرین ۱۶: وارون هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=x+۵$

ب) $f(x)=۴x$

پ) $f(x)=۲x+۳$

ت) $f(x)=\frac{۲}{۳}x-۴$

تمرین برای حل :

۱۷ : ضابطه‌ی وارون هر یک از توابع با ضابطه های زیر را بیابید.

الف) $f(x)=۵x-۲$

ب) $f(x)=\frac{۳}{۵}x+۴$

ج) $f(x)=\frac{-۷x+۳}{۵}$

۱۸: معکوس هر یک از توابع زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x)=۳x^{۲}+۱$

ب) $f(x)=۳x-۱$

ج) $f(x)=۲\sqrt[۳]{x-۱}$

د) $f(x)=۳|x|+۵$

۱۹: به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه‌ی تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، را به دست آورید.

الف) $f(x)=(x+۵)^{۲} \quad ; \quad x\geq -۵$

ب) $f(x)=-|x-۱|+۱ \quad ; \quad x\geq ۲$

ج) $f(x)=(x-۳)^{۲}$

د) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

۲۰ : اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن بعد از t ثانیه از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

الف : دامنه و برد h را به دست آورید. (h بر حسب متر)

$$h(t)=۱۰۰-۵t^{۲}$$

ب : چرا h تابعی یک به یک است؟

پ : تابع وارون h را به دست آورید.

۲۱ : نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم،

$$x<f(x)$$

۲۲ : وارون تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

۲۳ : نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y=ax+b$ ($a\neq ۰$) باز هم یک تابع خطی است.

۲۴ : تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه‌ی فارنهایت را به درجه سانتی گراد تبدیل می کند، تابعی بنویسید که درجه‌ی سانتی گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه‌ی فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

***

ترفند تقلیل متغیر برای تعیین یک به یک بودن تابع و محاسبه‌ی معکوس

گاهی تعیین یک به یک بودن تابع و به دنبال آن تعیین معکوس آن[1] برای تابعی که ضابطه‌ی آن داده شده باشد، مشکل است. برای تسهیل کار می توان از **ترفند تقلیل متغیر** استفاده کرد. به مثال های زیر توجه کنید.

مثال۱ : نشان دهید که تابع زیر یک به یک است. سپس معکوس آن را بیابید.

$$f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x$$

حل :

$$f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x\rightarrow f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱-۱\rightarrow f(x)=(x+۱)^{۳}-۱$$

---

[1]. در صورت معکوس پذیر بودن

$$f(x_1)=f(x_2)\rightarrow (x_1+1)^3-1=(x_2+1)^3-1\rightarrow (x_1+1)^3=(x_2+1)^3$$

$$\rightarrow x_1+1=x_2+1\rightarrow x_1=x_2$$

لذا تابع f یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد.

$$x\xrightarrow{+1}x+1\xrightarrow{\text{توان}3}(x+1)^3\xrightarrow{-1}(x+1)^3-1$$

$$\sqrt[3]{x+1}-1\xleftarrow{-1}\sqrt[3]{x+1}\xleftarrow{\sqrt[3]{\ }}x+1\xleftarrow{+1}x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}-1$$

مثال۲ : نشان دهید که تابع زیر یک به یک است. سپس معکوس آن را بیابید.

$$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$$

حل : ابتدا دامنه‌ی تابع را تعیین می کنیم.

$$x-1\geq 0\rightarrow x\geq 1$$

$$f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\rightarrow f(x)=\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}$$

$$\rightarrow f(x)=\sqrt{\sqrt[2]{(x-1)^2}+2\sqrt{x-1}+1}\rightarrow f(x)=\sqrt{((\sqrt{x-1}+1)^2}$$

$$\rightarrow f(x)=\sqrt{x-1}+1$$

لذا تابع f یک به یک است و لذا معکوس پذیر می باشد.

$$x\xrightarrow{-1}x-1\xrightarrow{\sqrt{\ }}\sqrt{x-1}\xrightarrow{+1}\sqrt{x-1}+1$$

$$(x-1)^2+1\xleftarrow{+1}(x-1)^2\xleftarrow{\text{توان}2}x-1\xleftarrow{-1}x$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^2+1$$

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسط استان خوزستان

درس چهارم : اعمال روی توابع

در این درس اعمال رایج روی توابع را تعریف می کنیم و مسائلی را پیرامون آن حل می کنیم.

قسمت اوّل : اعمال روی توابع

اگر f و g دو تابع باشند، در این صورت اعمال زیر را می توان روی دامنه‌ی مشترک آنها تعریف کرد.

۱ : جمع دو تابع

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$D_{f+g}=D_f \cap D_g$$

۲ : تفریق دو تابع

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$D_{f-g}=D_f \cap D_g$$

۳ : ضرب دو تابع

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

$$D_{f\times g}=D_f \cap D_g$$

۴ : تقسیم دو تابع

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f \cap D_g-\{x\in D_g \mid g(x)=۰\}$$

مثال : اگر $f(x)=x^۲+۵x+۶$ و $g(x)=x^۲+۳x$ ، تساوی های زیر را کامل کنید.

۱) $(f+g)(x)$

۲) $(f-g)(x)$

۳) $(g-f)(x)$

۴) $(f\times g)(x)$

۵) $(f^۲)(x)$

۶) $(\frac{f}{g})(x)$

۷) D_{f+g}

۸) $D_{\frac{f}{g}}$

حل :

۱) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x^{۲}+۵x+۶)+(x^{۲}+۳x)$

$=x^{۲}+۵x+۶+x^{۲}+۳x=۲x^{۲}+۸x+۶$

۲) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x^{۲}+۵x+۶)-(x^{۲}+۳x)$

$=x^{۲}+۵x+۶-x^{۲}-۳x=۲x+۶$

۳) $(g-f)(x)=g(x)-f(x)=(x^{۲}+۳x)-(x^{۲}+۵x+۶)$

$=x^{۲}+۳x-x^{۲}-۵x-۶=-۲x-۶$

۴) $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=(x^{۲}+۵x+۶)\times(x^{۲}+۳x)$

$=x^{۴}+۳x^{۳}+۵x^{۳}+۱۵x^{۲}+۶x^{۲}+۱۸x=x^{۴}+۸x^{۳}+۲۱x^{۲}+۱۸x$

۵) $(g\times f)(x)=g(x)\times f(x)=(x^{۲}+۵x+۶)\times(x^{۲}+۵x+۶)$

$=x^{۴}+۵x^{۳}+۶x^{۲}+۵x^{۳}+۲۵x^{۲}+۳۰x+۶x^{۲}+۳۰x+۳۶$

$=x^{۴}+۱۰x^{۳}+۳۷x^{۲}+۶۰x+۳۶$

۶) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^{۲}+۵x+۶}{x^{۲}+۳x}=\frac{(x+۲)(x+۳)}{x(x+۳)}=\frac{x+۲}{x}$

۷) $D_{f+g}=D_f\bigcap D_g=R\bigcap R=R$

توابع f و g هر دو چند جمله ای می باشند. پس دامنه‌ی هر دو مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

۸) $D_{\frac{f}{g}}=D_f\bigcap D_g-\{x\in D_g \mid g(x)=۰\}=R\bigcap R-\{۰,-۳\}=R-\{۰,-۳\}$

توجه داشته باشید که ریشه های مخرج $x=۰$ و $x=-۳$ تابع g می باشند.

$x^{۲}+۳x=۰\rightarrow x(x+۳)=۰\rightarrow x=۰\ ,\ x=-۳$

مثال : اگر $f=\{(۱,۷),(۳,-۴),(۲,۲)\}$ و $g=\{(۱,۶),(۳,۵),(۴,۱),(۲,۰)\}$، هر یک از موارد زیـر را تعیین کنید.

۱) D_f

۲) D_g

۳) D_{f+g}

۴) $f+g$

۵) $f-g$

۶) $f \times g$

۷) $D_{\frac{f}{g}}$

۸) $\frac{f}{g}$

حل :

۱) $D_f=\{۱,۳,۲\}$

۲) $D_g=\{۱,۳,۴,۲\}$

۳) $D_{f+g}=D_f+D_g=\{۱,۳,۲\}\cap\{۱,۳,۴,۲\}=\{۱,۲,۳\}$

اکنون برای تعیین توابع خواسته شده ، از روش تشکیل جدول استفاده می کنیم.

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	-۴	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	۱۳	۱	۲

۴) $f+g=\{(۱,۱۳),(۳,۱),(۲,۲)\}$

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	-۴	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	۱	-۹	۲

۵) $f-g=\{(۱,۱),(۳,-۹),(۲,۲)\}$

x	۱	۳	۲
$f(x)$	۷	-۴	۲
$g(x)$	۶	۵	۰
$(f \times g)(x)=f(x)\times g(x)$	۴۲	-۲۰	۰

۶) $f \times g=\{(۱,۴۲),(۳,-۲۰),(۲,۰)\}$

۷) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = ۰\}\{۱,۳,۲\} - \{۲\} = \{۱,۳\}$

x	۱	۳
$f(x)$	۷	-۴
$g(x)$	۶	۵
$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{۷}{۶}$	$\frac{-۴}{۵}$

۸) $\frac{f}{g} = \{(۱,\frac{۷}{۶}),(۳,\frac{-۴}{۵})\}$

تمرین برای حل :

۱ : اگر $f = \{(۱,۱),(۲,۴),(۳,۶),(۰,۶)\}$ و $g = \{(۱,-۱),(۲,۵),(-۱,۲),(۳,۰)\}$

در هر مورد دامنه‌ی تابع داده شده را تعیین و سپس آن را به صورت زوج مرتب بنویسید.

۱) $f+g$ ۳) $f.g$ ۵) $f^۲$

۲) $f-g$ ۴) $\frac{f}{g}$ ۶) $\sqrt{g}$

۲ : اگر $f(x) = x^۲ - x$ و $g(x) = x^۲ + ۲x - ۳$ باشد، عبارت های زیر را محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(x)$ ب) $(\frac{f}{g})(x)$ ج) $(۲f - ۳g)(۲)$

۳ : اگر $f(x) = x + ۲$ و $g(x) = \sqrt{x-۱}$، ابتدا دامنه و سپس ضابطه‌ی تابع $f+g$ را تعیین کنید.

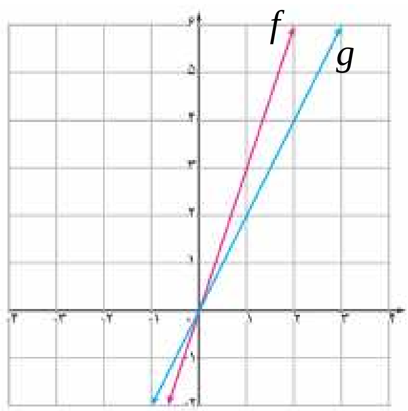
۴ : اگر $u(x) = \sqrt{x} + ۱$ و $v(x) = x - ۱$، دامنه و ضابطه‌ی تابع $f(x) = (\frac{u}{v})(x)$ را تعیین کنید.

۵ : ثابت کنید که حاصل جمع و تفریق دو تابع خطی، خطی است.

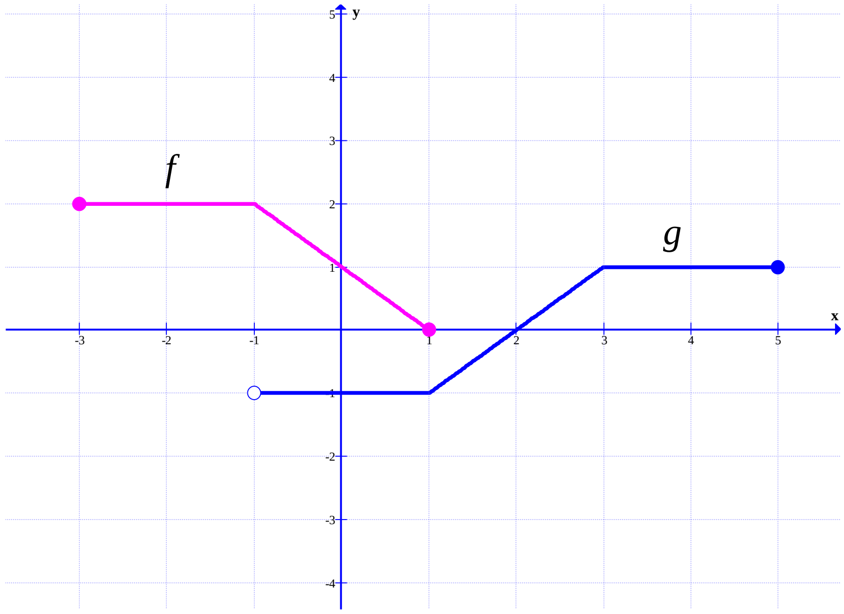
۶ : در شکل مقابل ، نمودار های دو تابع f و g رسم شده اند.

الف: ضابطه‌ی این دو تابع را بنویسید.

ب : ضابطه‌ی دو تابع $f+g$ و $f-g$ را به دست آورید.



۷ : در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. ابتدا مقدار $(f+g)(۰)$ و سپس نمودار $f+g$ را رسم کنید.



۸ : اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۵),(۵,۷),(۷,۹),(۴,۴)\}$ باشد، تابع $۲f+f^{-۱}$ را با عضوهایش بنویسید.

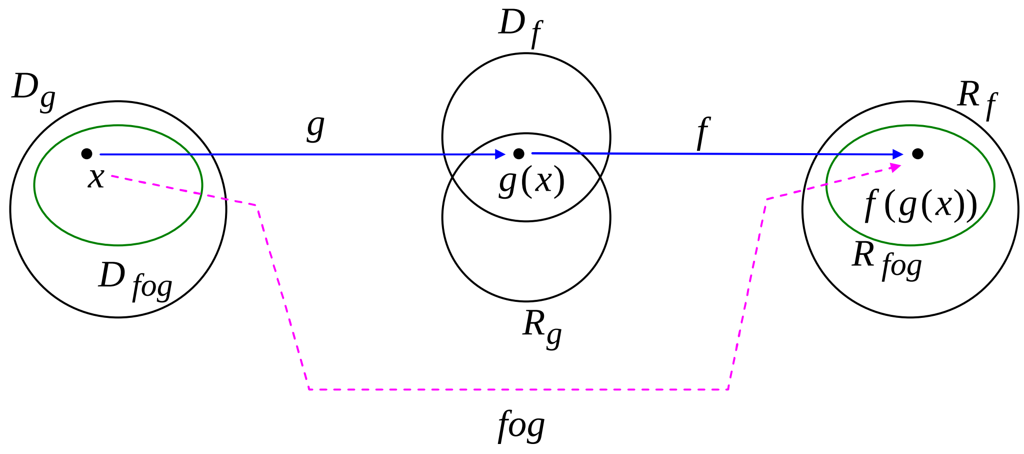
***

قسمت دوّم : ترکیب توابع

هرگاه g و f دو تابع باشند، ترکیب تابع g در f که به صورت fog نمایش داده می شود را به صورت زیر تعریف می کنند.

$$(fog)(x)=f(g(x))$$

به نمودار زیر توجه کنید.



دامنه‌ی تابع مرکب fog با توجه به نمودار فوق به شکل زیر مشخص می شود.

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

مثال : اگر $f(x)=x^۲+۳x-۱$ و $g(x)=۲x+۵$. در این صورت تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $(fog)(x)=$ ب) $(gof)(x)=$

حل : کافی است ، تعریف تابع مرکب را به دقت بکار ببریم.

الف) $(fog)(x)=f(g(x))=f(۲x+۵)=(۲x+۵)^۲+۳(۲x+۵)-۱$

$=۴x^۲+۲۰x+۲۵+۶x+۱۵-۱=۴x^۲+۲۶x+۳۹$

ب) $(gof)(x)=g(f(x))=g(x^۲+۳x-۱)=۲(x^۲+۳x-۱)+۵$

$=۲x^۲+۶x-۲+۵=۲x^۲+۶x+۳$

نتیجه : با توجه به مثال فوق، مشخص می شود که ترکیب دو تابع در حالت کلی ، خاصیت جابجایی ندارد.

یعنی : $(fog)(x)\neq(gof)(x)$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x+۵$. ابتدا دامنه و سپس ضابطه‌ی تابع fog را بدست آورید.

حل : ابتدا دامنه های توابع g و f را تعیین می کنیم.

تابع f یک تابع اصم است.

$x-۱\geq ۰\rightarrow x\geq ۱\rightarrow D_f=[۱,+\infty)$

همچنین تابع g چند جمله ای است پس $D_g=R$

لذا با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع fog می توان نوشت:

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid (۲x+۵)\geq ۱\}$

$=\{x\in R \mid ۲x\geq -۴\}=\{x\in R \mid x\geq -۲\}$

اکنون تابع fog را نیز به صورت زیر تعیین می کنیم.

$(fog)(x)=f(g(x))=f(۲x+۵)=\sqrt{(۲x+۵)-۱}=\sqrt{۲x+۴}$

مثال: اگر $g(x)=۲x^۲-x+۱$ و $f(x)=x+۳$. مقدار m را طوری تعیین کنید که

$$(fog)(m)=(gof)(m)$$

حل:

$$(fog)(m)=f(g(m))=f(۲m^۲-m+۱)=۲m^۲-m+۴$$
$$(gof)(m)=g(f(m))=g(m+۳)=۲(m+۳)^۲-(m+۳)+۱=۲m^۲+۱۱m+۱۶$$
$$\Rightarrow ۲m^۲-m+۴=۲m^۲+۱۱m+۱۶ \rightarrow m=-۱$$

مثال : اگر $f=\{(۱,۲),(۳,۷),(۴,۶),(۰,۹)\}$ و $g=\{(-۱,۵),(۸,۱),(۲,۴),(۰,۰)\}$، ابتدا دامنه‌ی تابع fog را تعیین نموده و سپس این تابع را به صورت زوج مرتب بنویسید.

حل : با توجه به تعریف دامنه‌ی تابع fog جدول زیر را تشکیل می دهیم.

$D_f=\{۱,۳,۴,۰\}$ و $D_g=\{-۱,۸,۲,۰\}$

$x\in D_g$	$g(x)$
۱-	$۵\notin D_f$
۸	$۱\in D_f$
۲	$۴\in D_f$
۰	$۰\in D_f$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{۸,۲,۰\}$$

اکنون برای تعیین fog به شکل زیر عمل می کنیم.

$$(fog)(۸)=f(g(۸))=f(۱)=۲ \qquad (fog)(۲)=f(g(۲))=f(۴)=۶$$
$$(fog)(۰)=f(g(۰))=f(۰)=۹$$
$$\Rightarrow fog=\{(۸,۲),(۲,۶),(۰,۹)\}$$

تمرین برای حل :

۹ : توابع $g(x)=۲x-۳$ و $f(x)=\sqrt{x+۱}$ داده شده اند. مطلوب است تعیین:

الف) $(gof)(x)$ ب) D_{fog}

۱۰ : اگر $g(x)=x^۲-۴x$ و $f(x)=۲x-۱$ باشد. توابع $(gof)(x)$ و $(fog)(x)$ را تعیین کنید.

۱۱ : اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=۲x+۳$ باشد. مطلوبست محاسبه‌ی

الف) $(fog)(۴)$ ب) $(fof)(x)$

۱۲ : اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=x^۲$ ابتدا دامنه‌ی تابع fog را تعیین نموده و سپس معادلـه‌ی آنـرا بدست آورید.

۱۳ : اگر $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=۳x+k$ باشد. مقدار k را طوری بیابید که

$$(fog)(x)=(gof)(x)$$

۱۴ : توابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=-۲x+۱$ داده شده اند.

الف : دامنه‌ی توابع f و g را به دست آورید. ب : ضابطه و دامنه‌ی تابع fog را تعیین کنید.

ج : مقدار عددی $(۲f+g)(۱)$ را محاسبه کنید.

۱۵: اگر $f(x)=\sqrt{x-۳}$ و $g=\{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶),(۷,۰)\}$

الف) تابع fog را به صورت زوج های مرتب بنویسید. ب) دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۱۶ : اگر $f=\{(۱,-۱),(۲,۵),(۴,۰)\}$ و $g=\{(۱,۱),(۲,۴),(۰,۶)\}$

الف) دامنه‌ی تابع fog را بدست آورید. ب) تابع fog را مشخص کنید.

۱۷: در هر مورد دو تابع h و g را طوری بنویسید که $f(x)=(goh)(x)$ باشد.

الف) $f(x)=۳\sqrt{\frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}}$ ب) $f(x)=\frac{۱}{x}.\sin(\frac{x+۱}{x})$ ج) $f(x)=x^۶+x^۳$

۱۸ : درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف : اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ آنگاه $(fog)(۴)=۳۵$

ب : اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۳x$ آنگاه $(\frac{f}{g})(۲)=۱$

پ : اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$ آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$

ت : برای هر دو تابع g و f داریم $fog=gof$

ث : اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=\sqrt{x+۷}$، آنگاه $(gof)(۵)=۱۵$

ج : برای هر دو تابع g و f داریم $f \times g = g \times f$

ح : اگر برای هر دو تابع g و f داشته باشیم $(fog)(x) = x$ و $(gof)(x) = x$ آنگاه دو تابع g و f واورن همدیگرند.

۱۹ : اگر $f(x) = ۲x + ۵$ آنگاه توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f^{-۱}(x)$

ب) $(fof)(x)$

ج) $(fof^{-۱})(x)$

د) $(f^{-۱}of)(x)$

۲۰ : اگر $f = \{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶),(۷,۰)\}$ مطلوب است تعیین تابع $fof^{-۱}$

۲۱ : با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۲)$

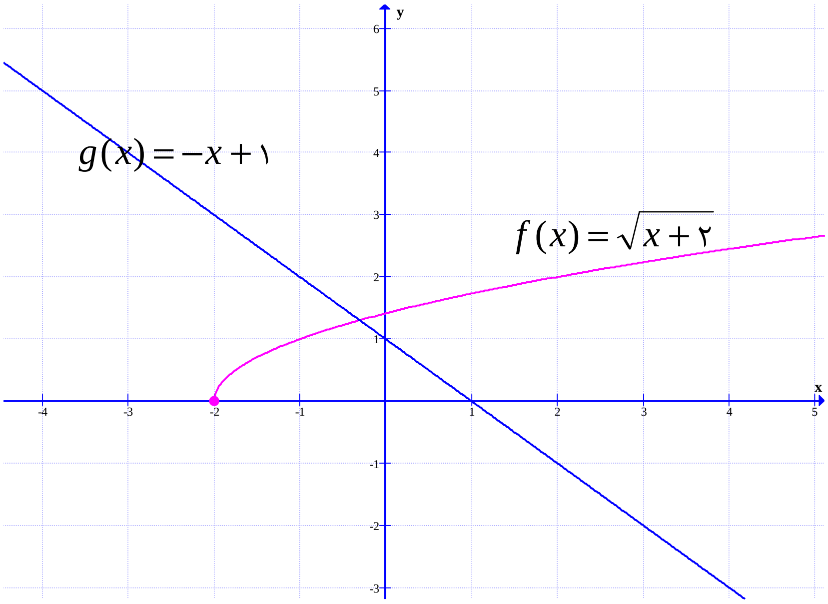
ب) $(f+g)(-۳)$

پ) $(f \times g)(\frac{۱}{۲})$

ت) $(fog)(-۴)$

ث) $(\frac{f}{g})(۰)$

ج) $(gof)(-۱)$



***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir

کانال تلگرام : @mathameri