

درس اول : تقسیم چندجمله ای ها و محاسبه ی حد توابع کسری

درس سال گذشته با توابع و اعمال روی آنها آشنا شده اید. اکنون می خواهیم ترکیب دو تابع را معرفی کنیم. ترکیب دو تابع یکی از مهمترین عمل روی دو یا چند تابع می باشد.

قسمت اول : تقسیم چندجمله ای ها و بخش پذیری

در سال های گذشته با تقسیم چندجمله ای ها بر یکدیگر آشنا شده اید. می دانید که برای تقسیم چند جمله

$$\begin{array}{r} \text{مقسوم علیه} \\ A(x) \quad | \quad B(x) \\ \dots \quad | \quad Q(x) \text{ خارج قسمت} \\ \hline R(x) \text{ باقی مانده} \end{array}$$

ای $A(x)$ را بر چند جمله ای غیر صفر $B(x)$ که درجه ی $A(x)$ بزرگتر یا مساوی درجه ی $B(x)$ باشد، مراحل زیر به ترتیب را طی می کنیم.

مرحله ی اول : ابتدا چند جمله ای های مقسوم $(A(x))$ و مقسوم علیه $(B(x))$ را استاندارد می کنیم.

مرحله ی دوّم : اولین جمله ی مقسوم را بر اولین جمله ی مقسوم علیه تقسیم می کنیم (جملاتی از مقسوم و مقسوم علیه که دارای بزرگترین توانها هستند.) و حاصل را به عنوان اولین جمله ی خارج قسمت قرار می دهیم.

مرحله ی سوّم : خارج قسمت بدست آمده را در چند جمله ای مقسوم علیه ضرب می کنیم. سپس عبارت بدست آمده را قرینه کرده و در زیر مقسوم یادداشت می کنیم. حاصل جمع این عبارت با مقسوم، اولین باقی مانده را نتیجه می دهد.

مرحله ی چهارم : مانند مرحله ی دوّم ، این بار باقی مانده ی به دست آمده را بر عبارت مقسوم علیه تقسیم می کنیم.

توجه : مراحل فوق را تا زمانی ادامه می دهیم که باقی مانده یا صفر شود و یا درجه ی چندجمله ای باقی مانده از درجه ی مقسوم علیه کمتر شود.

مثال : تقسیم زیر را انجام دهید.

$$(-3x^2 + 3x^3 + x^5 + 3x - 5) \div (1 + x^2)$$

حل: ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را استاندارد کرده و مطابق مراحل فوق عمل می کنیم.

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 3x - 5 & x^2 + 1 \\
 \hline
 -x^5 + -x^3 & \\
 \hline
 2x^3 - 3x^2 + 3x - 5 & \\
 -2x^3 + -2x & \\
 \hline
 -3x^2 + x - 5 & \\
 +3x^2 - +3 & \\
 \hline
 x - 2 &
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l}
 \frac{x^5}{x^2} = x^3 \\
 \frac{x^3}{x^2} = 2x \\
 \frac{-3x^2}{x^2} = -3
 \end{array} \right\}$$

تمرین ۱: تقسیم های زیر را انجام دهید و باقی مانده و خارج قسمت آنها را تعیین کنید.

- ۱) $(x^2 - 5x - 1) \div (x - 3)$
- ۲) $(3x^2 + 2x^3 - 4x - 1) \div (x - 1)$
- ۳) $(x^4 - 5x^2 - 1 + 7x) \div (-2 + x)$
- ۴) $(x^3 + x^2y - 2y^3 - xy^2) \div (x + y)$

تمرین ۲: مقدار k را طوری بیابید که باقی مانده ی تقسیم $x^3 - x^2 + k$ بر $x - 2$ برابر ۶ شود.

قضیه ی تقسیم

اگر چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ای غیر صفر $B(x)$ تقسیم کنیم، در این صورت همواره خواهیم

داشت:

$$\begin{array}{r|l}
 A(x) & B(x) \\
 \dots & Q(x) \\
 \hline
 R(x) &
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 A(x) = Q(x) \times B(x) + R(x) \\
 \deg(R(x)) < \deg(B(x))
 \end{array}$$

مثال: تقسیم زیر را انجام داده و درستی عمل را بررسی کنید.

$$(-x^3 + x^2 + 6x + 1) \div (2 + x)$$

حل:

$$\begin{array}{r|l}
 -x^3 + x^2 + 6x + 1 & x + 2 \\
 +x^3 - 2x^2 & \hline
 \hline
 3x^2 + 6x + 1 & \\
 -3x^2 + 6x & \\
 \hline
 1 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{-x^3}{x} = -x^2 \\
 \frac{3x^2}{x} = 3x
 \end{array}$$

رابطه‌ی تقسیم (امتحان درستی عمل تقسیم)

$$(-x^2 + 3x)(x + 2) + 1 = -x^3 - 2x^2 + 3x^2 + 6x + 1 = -x^3 + x^2 + 6x + 1$$

تمرین ۳: مقدار k را طوری بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم $x^2 + kx + 1$ بر $x + 1$ برابر ۵ شود.

تمرین ۴: مقدار k را چنان بیابید که چندجمله‌ای $2 - 4x + 3x^2 - x + 2x^2 + kx^3$ در تقسیم

بر $x + 1$ هم باقی مانده شوند.

بخش پذیری در چند جمله‌ای‌ها

چند جمله‌ای $A(x)$ را بر چند جمله‌ای $B(x)$ بخش پذیر گویند، هرگاه باقی مانده‌ی تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$ صفر شود.^۱ در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r|l}
 A(x) & B(x) \\
 \dots & Q(x) \\
 \hline
 R(x) &
 \end{array}
 \quad
 A(x) = Q(x) \times B(x)$$

تمرین ۵: نشان دهید که $3x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 5 + 7x$ بر $3x + 5$ بخش پذیر است.

تمرین ۶: نشان دهید که عبارت $4x^5 - 3x^2 + x - 2$ بر $x - 1$ بخش پذیر است.

تمرین ۷: مقدار k را طوری بیابید که $4x^2 + kx + 2$ بر $x + 1$ بخش پذیر شود.

^۱ . چند جمله‌ای $B(x)$ را عامل $A(x)$ نیز می‌نامند.

نکات تکمیلی تقسیم

اگر چند جمله ای $P(x)$ را بر $x - a$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$P(x) \begin{array}{l} | x - a \\ \dots \\ \hline Q(x) \end{array} \quad P(x) = Q(x) \times (x - a) + R(x)$$

حال اگر قرار دهیم $x = a$

$$\Rightarrow P(a) = Q(a) \times \underbrace{(a - a)} + R(a) \rightarrow P(a) = R(a)$$

یعنی باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x - a$ برابر $P(a)$ است.

تمرین ۸: باقی مانده‌ی تقسیم $3x^2 - 5x + 4$ بر $x - 1$ را حساب کنید.

تمرین ۹: باقی مانده‌ی تقسیم $2x^8 - 5x^2 + x + 3$ بر $x + 1$ را حساب کنید.

تمرین ۱۰: باقی مانده‌ی تقسیم $P(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ بر $2x + 3$ را حساب کنید.

نتیجه: در تقسیم چندجمله ای $P(x)$ بر $x - a$ ، باقی مانده‌ی تقسیم برابر $P(a)$ است.

حال اگر $P(a)$ برابر صفر باشد، $P(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر می باشد.

مثال: در چند جمله ای $P(x) = 3x^2 - 5x - 2$ ، مقدار $f(2)$ برابر صفر است. بنابراین $P(x)$ بر

$x - 2$ بخش پذیر است.

تمرین ۱۱: نشان دهید $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر $x + 2$ را بخش پذیر است.

تمرین ۱۲: نشان دهید که چند جمله ای $2x^3 + x^2 + 1$ بر $x + 1$ بخش پذیر است. سپس این عبارت

را به صورت حاصل ضرب عامل ها بنویسید.

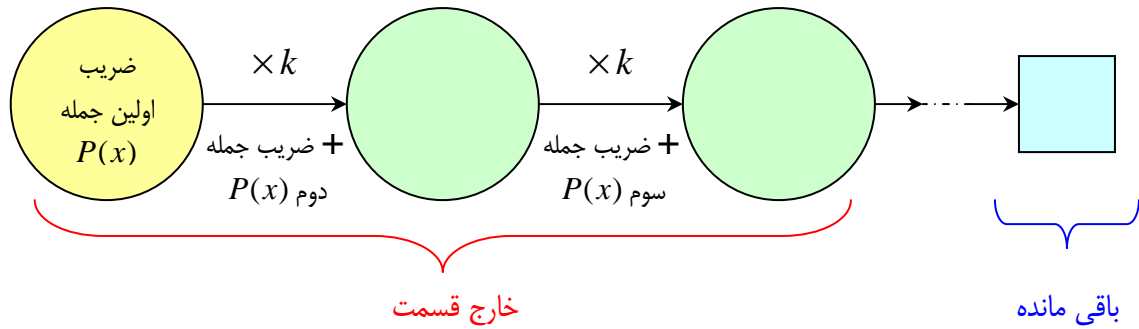
تمرین برای حل:

۱۳: باقی مانده‌ی تقسیم $3x^2 - 2x - 8$ بر $x - 2$ را حساب کنید.

۱۴: مقدار m را طوری بیابید که $P(x) = x^2 + mx - 2$ بر $x - 3$ بخش پذیر باشد.

۱۵: نشان دهید که $P(x) = x^4 - 16$ بر $x - 2$ بخش پذیر است.

۱۶: باقی مانده‌ی تقسیم $P(x) = x^3 + x - 2$ بر $2x + 1$ را حساب کنید.



توجه :

۱ : عدد k همان ریشه‌ی مقسوم علیه است. (ریشه‌ی $x - k$)

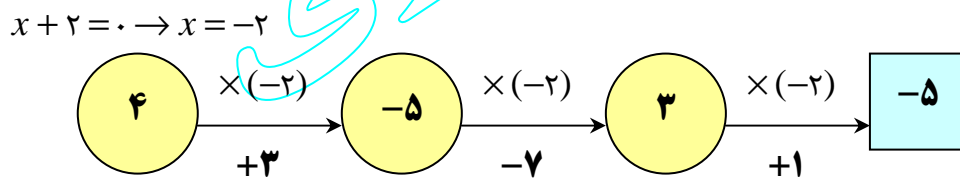
۲ : قبل از نوشتن ضریب ها، در نمودار فوق، ضریب جمله یا جملاتی که وجود ندارند، برابر صفر قرار می دهیم.

۳ : اعداد داخل دایره ها، ضرایب جملات خارج قسمت می باشند که از درجه‌ی $n - 1$ است.

۴ : عدد آخر داخل مربع، باقی مانده است.

مثال : باقی مانده و خارج قسمت تقسیم $4x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ بر $x + 2$ را تعیین کنید.

حل :



خارج سمت $Q(x) = 4x^2 - 5x + 3$

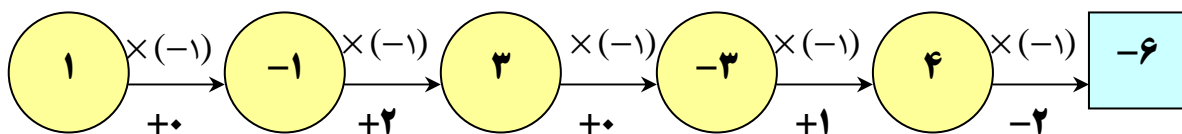
باقی مانده $R = -5$

مثال : باقی مانده و خارج قسمت تقسیم $x^5 + 2x^3 + x - 2$ بر $x + 1$ را تعیین کنید.

حل :

$$x^5 + 0x^4 + 2x^3 + 0x^2 + x - 2$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$$



خارج قسمت $Q(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x + 4$

باقی مانده $R = -6$

تمرین برای حل :

۲۰: به روش هورنر، باقی مانده و خارج قسمت تقسیم عبارت $P(x)$ را بر $x - 2$ به دست آورید.

الف) $P(x) = x^3 + 2x^4 - 1$

ب) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$

ج) $P(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - x + 2$

۲۱: به روش هورنر نشان دهید که عبارت $t^4 + 2t^3 - t^2 + 1$ بر $t + 1$ بخش پذیر است.

قسمت دوم : حد توابع کسری

یک روش معمول محاسبه‌ی حد، روش جایگزینی است. طبق این روش به جای متغیر مقدار مورد نظر را جایگزین نموده و به محاسبه‌ی حاصل می پردازیم.

برای مثال :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{(5)^2 - 3(5) + 2}{(5) + 1} = \frac{25 - 15 + 2}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

در سال گذشته دیدیم که برای محاسبه‌ی حد یک تابع کسری مانند $\frac{f}{g}$ وقتی متغیر x به a میل می کند،

گاهی حالتی پیش می آید که در آن $f(a) = g(a) = 0$ است. در این حالت چون f و g بر $x - a$ بخش پذیرند، با تقسیم صورت و مخرج بر $x - a$ می توان تابع گویای دیگر به دست آورد که حد آن در

نقطه‌ی a در صورت وجود برابر حد $\frac{f}{g}$ در این نقطه خواهد شد.^۳

مثال : مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ را محاسبه کنید.

حل :

^۳ توجه داشته باشید که این حالت ها را حالت های مبهم و این عمل را عمل رفع ابهام می نامند.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(1)^2 - 1}{(1)^2 + (1) - 2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

توجه داشته باشید که برای محاسبه‌ی حد تابع‌های کسری که صورت و مخرج آنهایی عبارت جبری بوده و به صورت حالت مبهم باشند، اگر صورت و مخرج چند جمله‌ای باشند، می‌توانید صورت و مخرج را تجزیه و سپس ساده کنید. همچنین اگر صورت یا مخرج یا هر دو شامل رادیکال باشد صورت یا مخرج را گویا کنید.

مثال : حد تابع $f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 8}$ را در نقطه‌ی $x = -2$ در صورت وجود به دست آورید.

حل : در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = -2$ برابر صفرند. باید عامل $x + 2$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. مخرج را می‌توانیم به کمک اتحاد مجموع مکعب‌های دو جمله‌به‌حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه کنیم. اما برای تجزیه‌ی صورت، آن را بر $x + 2$ تقسیم می‌کنیم. لذا :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x^2 + 4}{x^3 + 8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2 - x + 2)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x + 2}{x^2 - 2x + 4} = \frac{2(-2)^2 - (-2) + 2}{(-2)^2 - 2(-2) + 4} = \frac{8 + 2 + 2}{4 + 4 + 4} = \frac{12}{12} = 1$$

مثال : تابع $f(x) = x^2 + 5x - 1$ را در نظر بگیرید و سپس حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را بدست

آورید.

حل :

$$f(2) = (2)^2 + 5(2) - 1 = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 5x - 1) - (13)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+7)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+7) = 2+7 = 9$$

مثال : حد تابع $f(x) = \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه‌ی $x = 5$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = 5$ برابر صفرند. باید عامل $x - 5$ را در صورت و مخرج

ظاهر کنیم. برای این کار صورت کسر را با ضرب صورت و مخرج در $2 + \sqrt{x-1}$ گویا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4 - (x-1)}{x-5} \times \frac{1}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{x-5} \times \frac{1}{2 + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{2 + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{-1}{2 + \sqrt{5-1}} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

مثال: حد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2}$ را در نقطه‌ی $x = 8$ در صورت وجود به دست آورید.

حل: در این مثال نیز صورت و مخرج به ازای $x = 8$ برابر صفرند. باید عامل $x - 8$ را در صورت و مخرج

ظاهر کنیم. برای این کار مخرج کسر را با ضرب صورت و مخرج در $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4$ گویا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 8} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 8x}{(\sqrt[3]{x})^3 - (2)^3} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{1} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x(x-8)}{x-8} \times (\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} x(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) = 8(4 + 4 + 4) = 96 \end{aligned}$$

تمرین برای حل :

۲۲ : حدود زیر را در صورت وجود، محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$

ت) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 1}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2}$

۲۳ : حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - x}{4x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^3 + 4x^2 + x + 4}$

۲۴ : حدود زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x - 1}}{x^2 - x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x + 1}}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x + 16}{\sqrt[3]{x} + 2}$

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان

درس دوم : حدهای نامتناهی

درسال گذشته با مفهوم حد تابع در یک نقطه آشنا شده اید. اکنون می خواهیم این مفهوم را گسترش دهیم و مفهوم حدهای نامتناهی و همچنین حد در بین نهایت را معرفی کنیم. ولی ابتدا به تعریف همسایگی یک عدد حقیقی دقت کنید.

قسمت اول : همسایگی یک عدد حقیقی

فرض کنید که a عددی حقیقی باشد. در این صورت هر بازه ی باز شامل a را یک همسایگی برای a می نامند.



در شکل فوق چون $a \in (m, n)$ است، پس بازه ی (m, n) یک همسایگی برای نقطه ی a محسوب می شود. حال اگر نقطه ی a را از همسایگی فوق حذف کنیم. مجموعه ی $(m, n) - \{a\}$ حاصل می شود که به آن همسایگی محذوف نقطه ی a می گویند.

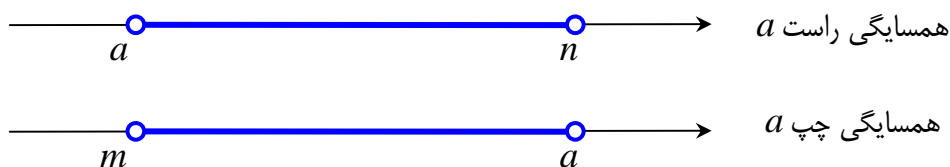


مثال : بازه ی $(1, 5)$ یک همسایگی نقطه ی ۲ و مجموعه ی $\{5\} - (2, 6)$ یک همسایگی محذوف نقطه ی ۵ است.

تذکره : برای هر نقطه مانند a می توان تعداد بیشمار بازه ی باز تعریف نمود که شامل a باشند. به عبارتی دیگر برای هر نقطه، همسایگی های بیشمار می توان تعریف کرد. مثلاً بازه های $(-1, 1)$ و $(-3, 2)$ همسایگی صفر هستند.

همسایگی چپ و همسایگی راست یک نقطه

اگر (m, n) یک همسایگی برای نقطه ی a باشد. در این صورت بازه ی (m, a) همسایگی چپ و بازه (a, n) همسایگی راست نقطه ی a تعریف می شوند.



مثال : چون عدد ۳ عضو بازه‌ی $(۱,۷)$ است. بنابراین بازه‌ی $(۱,۳)$ همسایگی چپ ۳ و بازه‌ی $(۳,۷)$ همسایگی راست ۳ است.

مثال : بازه‌ی $(۱,۴)$ یک همسایگی چپ ۴ و یک همسایگی راست ۱ می باشد.

تمرین ۱ : یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای عدد ۵ مثال بزنید.

تمرین ۲ : آیا بازه‌ی $(۲,۳)$ یک همسایگی برای ۲ می باشد؟ چرا؟

تمرین ۳ : نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه‌ی ۲- تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

تمرین برای حل :

۴ : نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در یک همسایگی نقطه‌ی $x = ۳$ تعریف شده باشند و $f(۳) \neq g(۳)$

۵ : تابع $f(x) = \frac{\sqrt{۴-x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید. سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف : دامنه‌ی این تابع را به دست آورید.

ب : بنویسید که دامنه‌ی تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

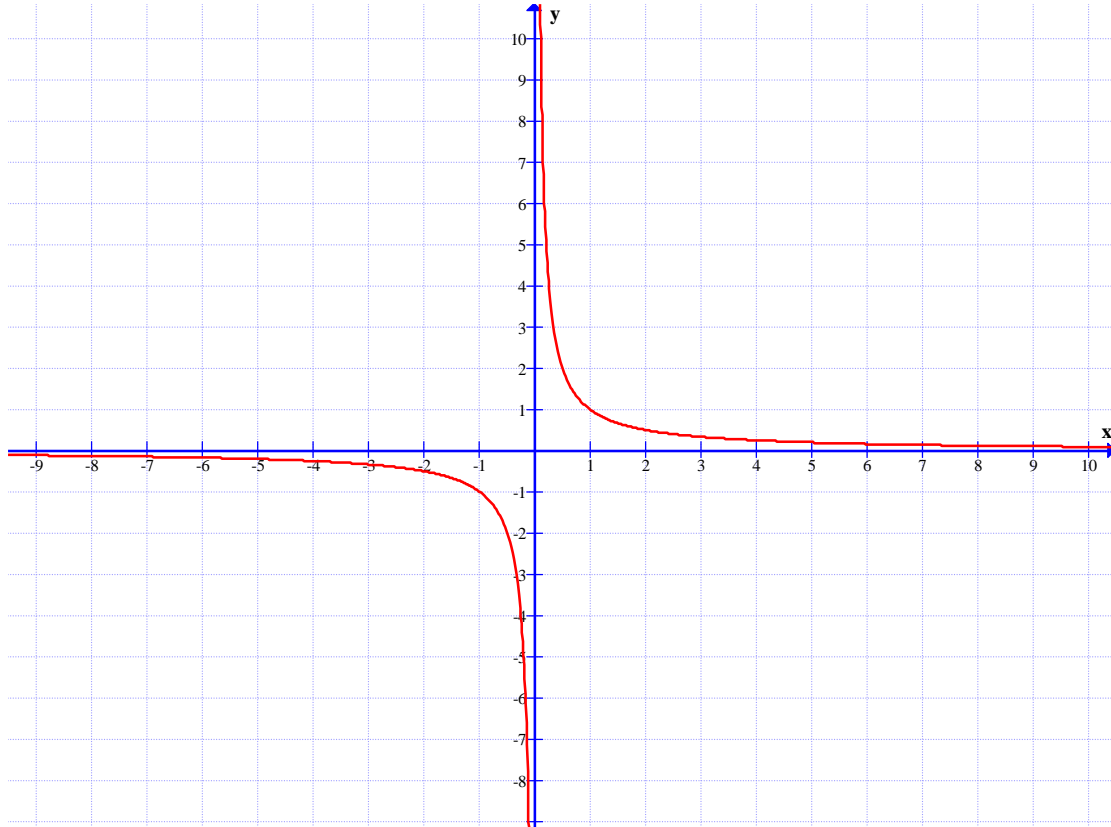
ج : آیا این تابع در $x = ۱$ تعریف شده است؟

د : تابع در کدام یک همسایگی های راست یا چپ $x = ۲$ تعریف شده است؟

۶ : اگر بازه‌ی $(x-۱, x+۳)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه‌ی مقادیر x را به دست آورید.

قسمت دوم : حدهای نامتناهی

نمودار زیر ، نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می باشد.



همانطور که در این نمودار مشاهده می کنید. هر چه x با مقادیر بزرگتر از صفر به صفر نزدیک شود، مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می یابد. به عبارتی دیگر می توان $f(x)$ را از هر عدد مثبتی که دلخواهی که در نظر بگیریم بزرگتر کرد به شرطی که x را به اندازه ی کافی با مقادیر بزرگتر از صفر به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

توجه داشته باشید که این نماد نشان می دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی شود و مثبت بی نهایت فقط یک نماد است که نمایش می دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می تواند بزرگتر باشد.

همچنین در این نمودار مشاهده می کنید. هر چه x با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک شود، مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی کاهش می یابد. به عبارتی دیگر می توان $f(x)$ را از هر عدد منفی که

دلخواهی که در نظر بگیریم کوچکتر کرد به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک کرد. در این صورت می‌نویسیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

باز تأکید می‌شود که این نماد نشان می‌دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود و منفی بی‌نهایت فقط یک نماد است که نمایش می‌دهد مقدار تابع از هر عدد منفی می‌تواند کوچکتر باشد.

با درک توصیف‌های فوق برای نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می‌توان حدهای یک طرفه نامتناهی را بدین شکل تعریف کرد.

تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی

فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ی a مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ی a مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

به طور مشابه می‌توان حد‌های یک طرفه‌ی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ را نیز

تعریف کرد. در تمرین زیر جای خالی مربوط به این دو حد را تکمیل کنید.

تمرین ۷: جای خالی را کامل کنید.

الف: فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

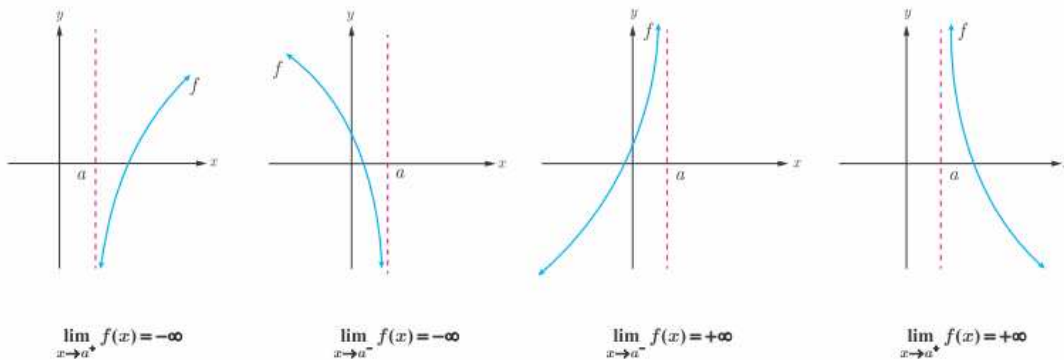
بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد کوچکتر کرد به شرطی که x را از سمت به اندازه ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

ب: فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد منفی کوچکتر کرد به شرطی که x را از سمت به اندازه ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

پس از ملاحظه و درک تعاریف مربوط به حدهای یک طرفه ی نامتناهی، در شکل های زیر این حالت ها را مشاهده می کنید.



تمرین ۸: نمودار تابع $f(x) = \log_3^{x-1}$ را رسم کنید. در مورد حد زیر بحث کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

تمرین ۹: نمودار تابع $f(x) = -\frac{1}{x}$ را رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

تمرین ۱۰: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ را رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

تمرین ۱۱: نمودار تابع $f(x) = \tan x$ را در فاصله $(0, \pi)$ رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) =$

تعریف حدهای نامتناهی

با توجه به نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ مشاهده کردید که $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

لذا می توان گفت که با نزدیک کردن x به اندازه ی کافی به صفر (از سمت راست و از سمت چپ)، مقادیر $f(x)$ را می توان به دلخواه بزرگ کرد. بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود و در نتیجه مقدار تابع یک عدد خاصی نمی شود و حد نامتناهی است و می نویسیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

اکنون **حدهای نامتناهی** را به صورت زیر تعریف می کنیم.

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از هر دو سمت راست و چپ به اندازه ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

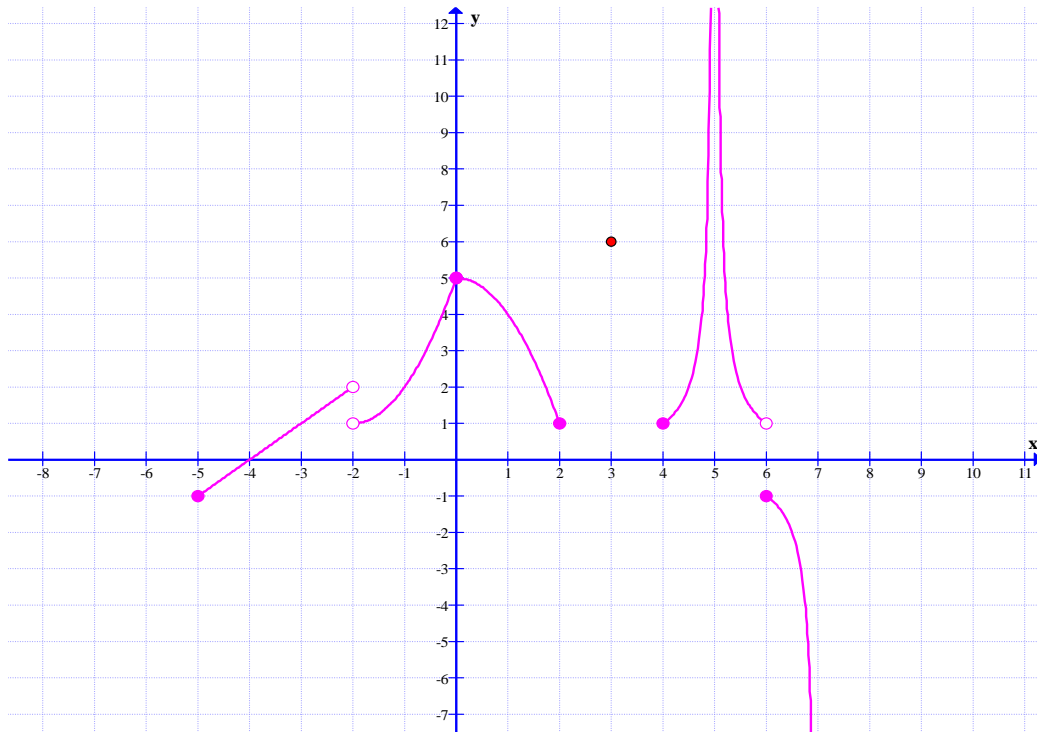
یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد منفی کوچکتر کنیم به شرطی که x را از هر دو سمت راست و چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تمرین ۱۲: نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ را رسم کنید. سپس تساوی های زیر را کامل کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$

تمرین ۱۳: با توجه شکل زیر وجود حد تابع در نقاط داده شده را بررسی کنید.



۱) $\lim_{x \rightarrow (-5)^+} f(x) =$

۵) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$

۲) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) =$

۶) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) =$

۳) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) =$

۷) $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) =$

۴) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$

۸) $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) =$

قضایای حدهای بی نهایت

در این قسمت، چند قضیه‌ی مهم در مورد حدهای بی نهایت، بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آنگاه:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{در صورتی که } n \text{ زوج باشد.}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty \quad \text{در صورتی که } n \text{ فرد باشد.}$$

مثال: با توجه به قضیه‌ی فوق می‌توان نوشت:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

قضیه‌ی ۲:

الف: اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و برعکس

ب: اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و برعکس

مثال:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{|x-1|} = +\infty \end{array} \right. \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$$

قضیه‌ی ۳: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آنگاه:

الف: اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

ب: اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

ج: اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

د: اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

تذکر: این قضیه برای حد های یک طرفه نامتناهی (یعنی در حالت های که $x \rightarrow a^+$ و $x \rightarrow a^-$) نیز برقرار است.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2}$ را به دست آورید.

حل: چون $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 2+1 = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} (4-x^2) = 4-4 = 0$ پس طبق قضیه

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = +\infty$$

توجه: وقتی می نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، یعنی این که حاصل حد صفر مطلق نمی باشد. بلکه عدد

بسیار بسیار نزدیک صفر می باشد که برخی آن را صفر حدی می نامند. به همین دلیل است که گفته می شود که در حد توابع کسری وقتی صورت عددی غیر صفر و مخرج صفر حدی باشد، حد، بی نهایت می شود و علامت آن را با توجه به علامت صورت و مخرج تعیین می کنند. برای مثال بعضی برای محاسبه‌ی حد زیر به شکل زیر عمل می کنند.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = \frac{2+1}{4-(2^-)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

به نمونه های زیر نیز توجه کنید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{2^+ - 2} = \frac{5}{. +} = +\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{2^- - 2} = \frac{5}{. -} = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-5}{x-2} = \frac{-5}{2^+ - 2} = \frac{-5}{. +} = -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-5}{x-2} = \frac{-5}{2^- - 2} = \frac{-5}{. -} = +\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-7}{x-3} = \frac{3-7}{3^+ - 3} = \frac{-4}{. +} = -\infty$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-2}{[x]-5} = \frac{5-2}{[5^+]-5} = \frac{3}{5-5} = \frac{3}{.}$$

نامعین (مخرج صفر مطلق است)

صفر حدی و صفر مطلق

برای درک مفهوم حدهای نامتناهی، لازم است تفاوت صفر حدی و صفر مطلق را بدانیم.
صفر مطلق: همان عدد صفر است که مبدأ اعداد حقیقی است.
صفر حدی: عدد بسیار کوچک مثبت و نزدیک صفر و یا عدد بسیار کوچک منفی و نزدیک صفر است.
بر این اساس

۱: اگر مخرج کسری صفر مطلق باشد. این کسر تعریف نشده (نامعین) می باشد. برای مثال کسر $\frac{5}{.}$ نامعین است.
۲: اگر مخرج کسری صفر حدی باشد. این کسر یک عدد بسیار بزرگ مثبت و یا بسیار بزرگ منفی خواهد شد.
مانند:

$$\text{الف) } \frac{5}{. +} = +\infty \quad \text{ب) } \frac{5}{. -} = -\infty \quad \text{ج) } \frac{-5}{. +} = -\infty \quad \text{د) } \frac{-5}{. -} = +\infty$$

۳: اگر صورت و مخرج کسری صفر مطلق باشد. آن کسر تعریف نشده است ولی اگر صورت و مخرج آن صفر حدی باشند، گویند حد مبهم است و قابل محاسبه می باشد.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$ را به دست آورید.

حل: وقتی x در همسایگی راست صفر باشد، صورت کسر برابر -1 و مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در همسایگی راست صفر $\sin x$ مقداری مثبت است. در نتیجه طبق قضیه، خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = -\infty$$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$ را به دست آورید.

حل: از آنجا که حد فوق به صورت مبهم $\left(\frac{0}{0}\right)$ در می‌آید و چون $x \neq -1$ پس می‌توان صورت و مخرج کسر را بر $x + 1$ تقسیم کرد. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$$

تمرین ۱۴: مقدار حدهای زیر را در صورت وجود، بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] - 1}{x - [x]}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] + 1}{x - 2}$

تمرین ۱۵: مقدار حد زیر را در صورت وجود، بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(-1)^{[x]}}{x - 4}$$

تمرین برای حل:

۱۶: حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1 - x}{x + 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}$

۱۷:

الف: عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ به چه معنا است؟ توضیح دهید؟

ب: عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ به چه معنا است؟ توضیح دهید؟

پ: نمودار تابعی مانند f را طوری رسم کنید که هر دو شرط بالا را داشته باشد. (مسئله چند جواب دارد؟)

۱۸: نمودار تابعی مانند f را طوری رسم کنید که در یک همسایگی محذوف -2 تعریف شده باشد و

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$. آیا این مسئله فقط یک پاسخ دارد؟ چرا؟

۱۹: نمودار تابعی مانند f را طوری رسم کنید که در یک همسایگی محذوف یک تعریف شده باشد و

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

آیا این مسئله فقط یک پاسخ دارد؟ چرا؟

قضیه ۴:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ (آنگاه } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty \text{ یا } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

تذکر: این قضیه برای حد های یک طرفه نامتناهی (یعنی در حالت های که $x \rightarrow a^-$ و $x \rightarrow a^+$) نیز

برقرار است.

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\pi \tan x}$ را به دست آورید.

حل: می دانیم که تابع تانژانت در همسایگی $\frac{\pi}{2}$ رفتار بی کران دارد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} (x+1) = \frac{\pi}{2} + 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{x+1}{\tan x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (x+1) = \frac{\pi}{2} + 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{x+1}{\tan x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\pi \tan x} = 0 \text{ لذا}$$

فقط برای مطالعه

توجه: در حالت کسری، اگر صورت کسر عدد غیر صفر و مخرج کسر بینهایت شود، آن کسر بسیار بسیار کوچک (صفر حدی) می باشد. مانند حالت های زیر:

$$\frac{2}{+\infty} = 0 \text{ و } \frac{2}{-\infty} = 0 \text{ و } \frac{-2}{+\infty} = 0 \text{ و } \frac{-2}{-\infty} = 0$$

قضیه‌ی ۵: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \neq 0$ آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty \quad \text{الف}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = +\infty \quad \text{ب: اگر } L > 0 \text{ آنگاه}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = -\infty \quad \text{ج: اگر } L < 0 \text{ آنگاه}$$

تذکر: این قضیه برای حد های یک طرفه نامتناهی (یعنی در حالت های که $x \rightarrow a^+$ و $x \rightarrow a^-$) نیز برقرار است.

مثال ۱: توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x + 1$ را در نظر بگیرید.

الف: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ را به دست آورید.

ب: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x))$ را محاسبه کنید.

پ: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \times g(x))$ را محاسبه کنید.

حل:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad g(x) = x + 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

مثال ۲: حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1 + \frac{1}{x^2})$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1 + \frac{1}{x^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x + 1) + \lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}}_{+\infty} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2}}_1 = +\infty$$

قضیه ۶: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \neq 0$ آنگاه

الف : $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = -\infty$

ب : اگر $L > 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = -\infty$

ج : اگر $L < 0$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = +\infty$

تمرین ۲۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] + 1}{|2x - 1|}$ را محاسبه کنید.

حل : مخرج در نزدیکی $\frac{1}{2}$ با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد صورت هم در $\frac{1}{2}$ برابر یک است.

بنابراین :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] + 1}{|2x - 1|} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} ([x] + 1) \times \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{|2x - 1|} = (1) \times (+\infty) = +\infty$$

تمرین برای حل :

۲۱: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{2x}{x - 5}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x - 3|}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x}{x - 5}$

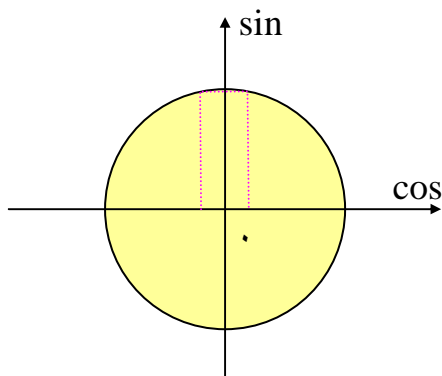
ث) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x + 1|}$

پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sin^2 x}$

تمرین ۲۲: نشان دهید که تابع $f(x) = \tan x$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{2}$ دارای حد نیست.

حل:



$$x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+ \rightarrow x > \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos x < 0 \text{ ربع دوم}$$

$$x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \rightarrow x < \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos x > 0 \text{ ربع اول}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \sin x}_1 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1}{\cos x}}_{-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin x}_1 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{\cos x}}_{+\infty} = +\infty$$

توجه کنید که با توجه به نمودار تانژانت در همسایگی $\frac{\pi}{2}$ این نتایج نیز مورد تأیید هستند.

تمرین ۲۳: نمودار تابع $f(x) = \tan x$ را در فاصله‌ی $[0, \pi]$ را رسم کنید و سپس به کمک آن حد

های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x$

ب) $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan x$

تمرین برای حل:

۲۴: با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حد های زیر را نشان دهید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty$

ج) $\lim_{x \rightarrow -2} \left| \frac{5-x}{2+x} \right| = +\infty$

د) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{2x-6} = -\infty$

۲۵: حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x-3)^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{\cos x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{|x|}$

چ) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2}$

د) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9}$

ذ) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x$

ت) $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{9}{(x+6)^2}$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{-3x}{x^2-4}$

ر) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$

۲۶: حد های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{x^2-4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+2x-1}{x^2+x-12}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1-\cos x}$

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{1-\cos x}$

۲۷: حدود زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+1}{x^2+4x+4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2+x}{x^2} \right)$

د) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-\cos 2x}{x^2}$

تهیه کننده : جابر عامری

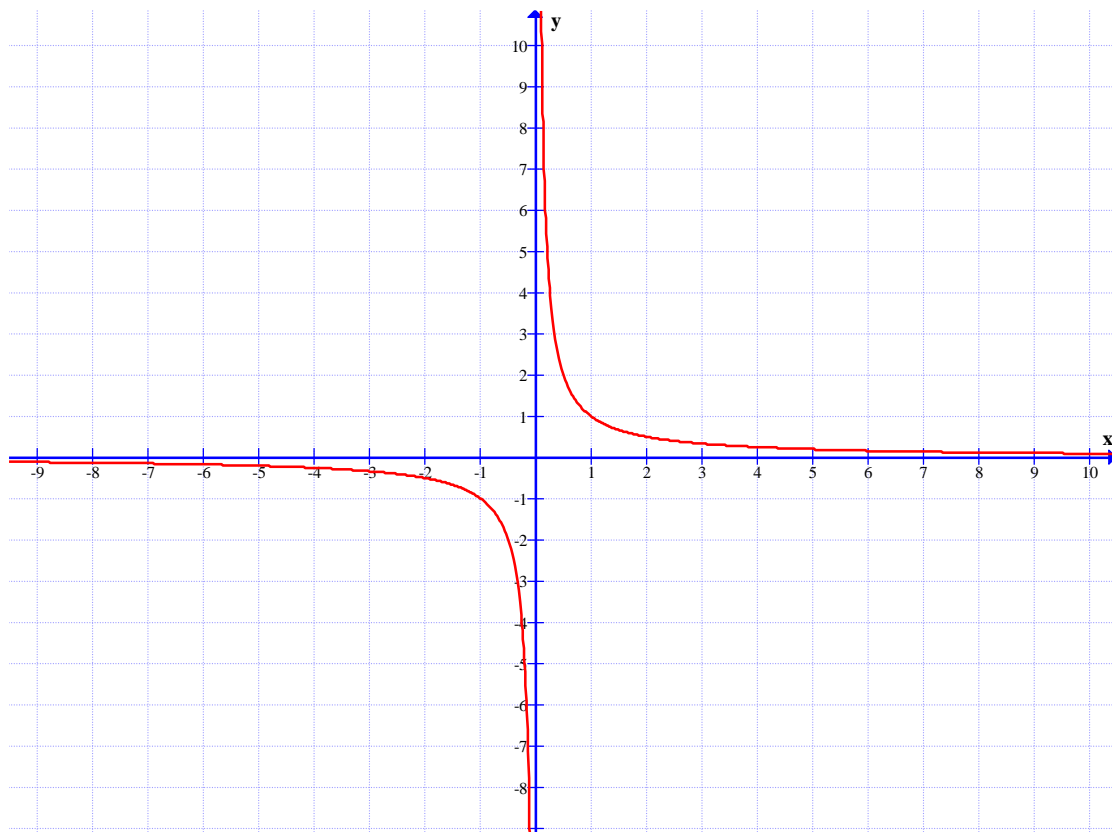
عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه استان خوزستان

درس سوم : حد در بی نهایت

در این درس می خواهیم رفتار تابع را وقتی که متغیر x به سمت بی نهایت (بی انتها) میل کند، را بررسی کنیم. در این حالت گویند با حد در بینهایت سروکار داریم.

حد در بی نهایت

نمودار زیر ، نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می باشد.



همانطور که در این نمودار مشاهده می کنید. هر چه x به سمت بی نهایت از سمت راست بزرگ و بزرگتر شود، مقادیر $f(x)$ به صفر نزدیک می شوند. به عبارتی وقتی x به اندازه ی کافی بزرگ اختیار شود می توان $f(x)$ را به اندازه ی دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

همچنین به کمک همین نمودار مشاهده می کنید. هر چه x به سمت بی نهایت از سمت چپ کوچک شود، مقادیر $f(x)$ نیز به صفر نزدیک می شوند. به عبارتی وقتی x به اندازه ی کافی کوچک اختیار شود می توان $f(x)$ را به اندازه ی دلخواه به صفر نزدیک کرد. در این صورت می نویسیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

و به طور خلاصه نوشته می شود که :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

اکنون به تعاریف زیر توجه کنید.

الف: اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی

نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی

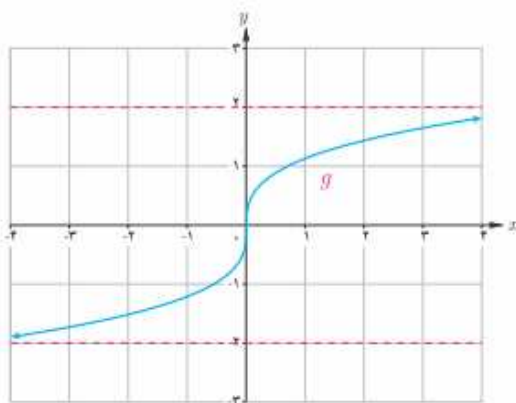
بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

ب: اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی

نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدر کافی

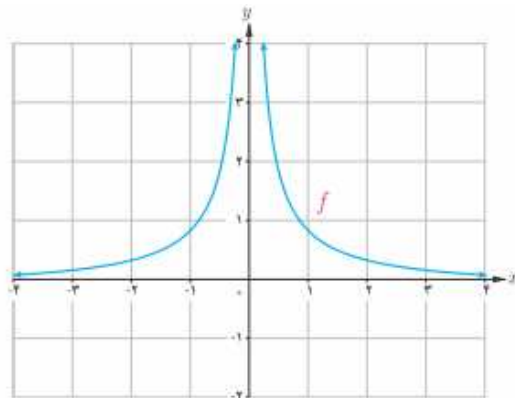
بزرگ، فاصله $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

تمرین ۱: با استفاده از نمودار های f و g حدهای زیر را به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

تمرین ۲:

الف : هر یک از رابطه های $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ به چه معنا هستند؟ توضیح دهید؟

ب : نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی فوق را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

حال پس از آشنایی با مفهوم حد در بی نهایت، پیرامون این موضوع **قضیه** های زیر را بیان می کنیم.

قضیه ۱: اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

مثال:

الف) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{2}}{x^2} = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-5}{2x^3} = 0$

قضیه ۲: اگر L_1 و L_2 اعداد حقیقی و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L_1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_2$ آنگاه:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 + L_2$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 - L_2$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L_1 \times L_2$

د) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad ; \quad L_2 \neq 0$

تذکر: قضیه ی فوق وقتی x به سمت $-\infty$ میل می کند، نیز برقرار است.

مثال:

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^3} = 3 + 0 = 3$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x} + 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 4} = \frac{2 + 0}{0 + 4} = \frac{1}{2}$

مثال : مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6}$ را به دست آورید.

حل : برای محاسبه‌ی این حد ابتدا باید صورت و مخرج را بر بزرگترین توانی از x که در مخرج وجود دارد،

یعنی x^2 تقسیم کنیم. (چون $x \rightarrow +\infty$ ، پس می توان نتیجه گرفت که $x^2 \neq 0$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{7x^2 - 4x + 1}{x^2}}{\frac{3x^2 + 5x - 6}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 7 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x^2}} = \frac{7 - 0 + 0}{3 + 0 - 0} = \frac{7}{3}$$

تمرین برای حل :

۳ : حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2}$

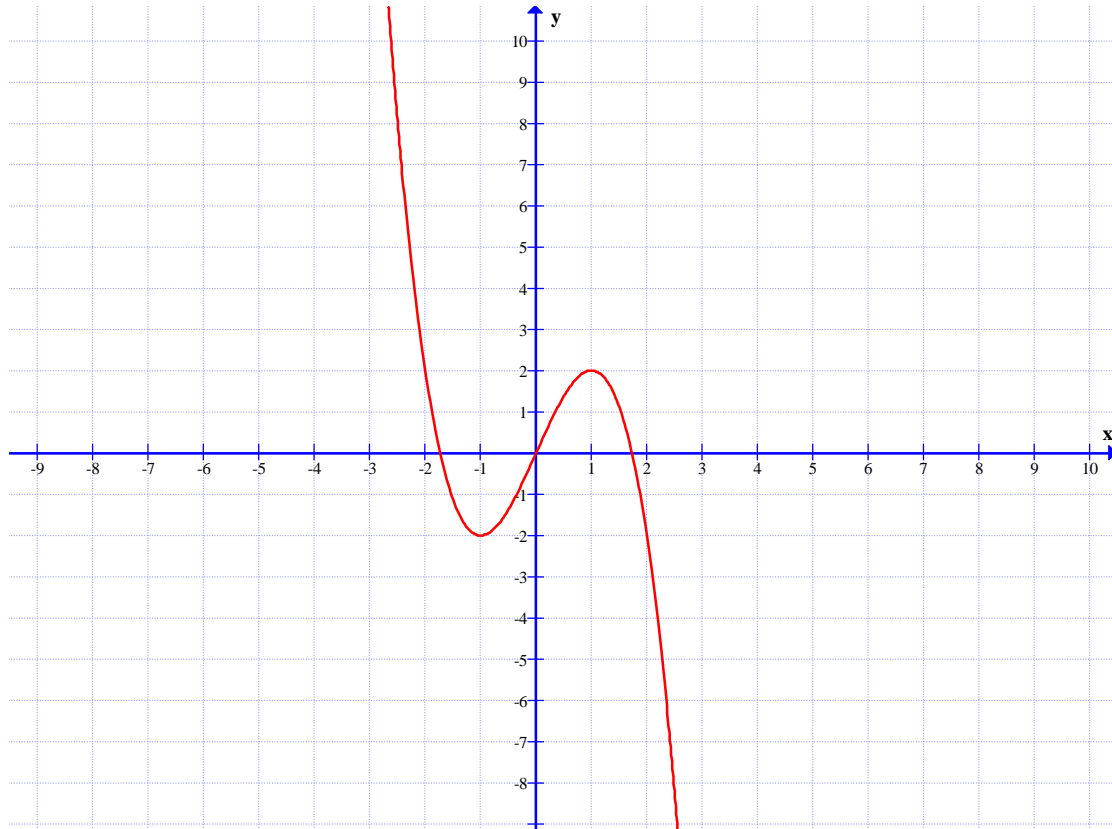
ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1}$

حدهای نامتناهی در بی نهایت

در محاسبه‌ی حد توابع ممکن است وقتی x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند و از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند یا از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند.

به شکل‌های زیر توجه کنید و تساوی‌های زیر را کامل کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

اکنون به تعاریف زیر توجه کنید.

الف : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند، می‌نویسند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ب : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند، می‌نویسند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

ج : برای هر تابع مانند f که در بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

د : برای هر تابع مانند f که در بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

به مثال های زیر توجه نمایید.

مثال : حد توابع زیر را بدست آورید^۱.

$$۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -2(+\infty)^3 = -\infty \quad ۴) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = -2(-\infty)^3 = +\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4) = 3(-\infty)^4 = +\infty \quad ۵) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-3x^2) = -3(\pm\infty)^2 = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3) = -5(-\infty)^3 = +\infty$$

حال پس از آشنایی با مفهوم حد نامتناهی در بی نهایت، پیرامون این موضوع **قضیه** های زیر را بیان می کنیم.

قضیه ۱ : فرض کنید که a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، در این صورت

$$\text{الف : اگر } n \text{ زوج باشد، آنگاه } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = +\infty$$

$$\text{ب : اگر } n \text{ فرد باشد، آنگاه } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

مثلاً :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$$

^۱ . توجه داشته باشید، این نحوه نوشتن از نظر ریاضی ایراد دارد، ولی برای تعیین علامت حاصل لازم است.

قضیه ۲: اگر L عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ آنگاه:

الف: اگر L مثبت باشد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

ب: اگر L منفی باشد.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

تذکر: این قضیه برای $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ به طور مشابه برقرار است.

قضیه ۳: اگر L عددی حقیقی (ناصفر) و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ آنگاه:

الف: اگر L مثبت باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

ب: اگر L منفی باشد.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

تذکر: این قضیه برای $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ به طور مشابه برقرار است.

و به طور کلی قضیه ی فوق را می توان به شکل جدول زیر تعمیم داد.

	n فرد	n زوج
a مثبت	$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = +\infty$
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = +\infty$
a منفی	$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n = -\infty$
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = -\infty$

اکنون با توجه به این قضیه، مثال زیر را می توان عنوان کرد.

مثال: حد توابع زیر را بدست آورید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -\infty$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^6) = -\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4) = +\infty$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-3x^2) = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^3) = +\infty$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3) = -\infty$$

به کمک قضایای قبل می توان حد توابع چند جمله ای در بی نهایت را نیز محاسبه کرد. به **مثال** زیر توجه کنید.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 + 2x^2 - 5x + 7) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \left(3 + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^4} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x^4} \right) = (+\infty) \times (3 + 0 + 0 + 0) = +\infty \end{aligned}$$

تمرین ۴: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 + 5x^2)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 4x^2 - 5x - 9)$

با این روش می توان حد هر تابع چند جمله ای را به دست آورد. به قضیه ی زیر توجه کنید.

قضیه ۴: حد هر چند جمله ای به صورت

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

در $\pm \infty$ برابر حد جمله ای از آن است که دارای بزرگترین درجه است. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

به استدلال زیر توجه کنید.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \times \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \times (a_n + \dots + \dots) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

لذا در حد توابع چند جمله‌ای، با توجه به روش فاکتورگیری نتیجه می‌شود، که حد تابع چند جمله‌ای، با حد جمله‌ای از آن که دارای بیشترین توان باشد، برابر است. از این به بعد در یک چند جمله‌ای، جمله‌ای که دارای بیشترین توان باشد، را **جمله‌ی ارشد** نام گذاری می‌کنیم.

مثال: حد های زیر را حساب کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^5 + 3x^4 - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^5) = -\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 4x^2 - 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-4x^2) = -\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 5x^2 - x^3 - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$$

تمرین ۵: حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + x - 1)$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - 2x - 5x^4)$$

به طور مشابه برای محاسبه‌ی حد توابع کسری^۲، مانند توابع چند جمله‌ای، ابتدا جملات ارشد را از صورت و مخرج انتخاب نموده و پس از ساده کردن، حد را محاسبه می‌کنیم به استدلال زیر توجه کنید.

در محاسبه‌ی حد توابع کسری نظیر $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ وقتی که $x \rightarrow \pm\infty$ به شکل زیر عمل می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x)}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x)} = \frac{a \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n}{b \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^m} = \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m}$$

که در آن ax^n جمله‌ی ارشد صورت و bx^m جمله‌ی ارشد مخرج فرض شده است.

^۲. تابعی که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند.

مثال: حد های زیر را حساب کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 7x - 2}{5 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-3} = -\frac{1}{3}(-\infty) = +\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - 5x^2 + 7x}{2x^2 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{2} = \frac{-5}{2}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 2}{5x - 3x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{-3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-3x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 7x + 1}{x - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{-3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{-3} = -\frac{4}{3}(+\infty) = -\infty$$

نتیجه می شود که در محاسبه ی حد توابع کسری سه حالت وجود دارد.

الف) توان جمله ی ارشد صورت از توان جمله ی ارشد مخرج ، بیشتر باشد. در این صورت جواب مثبت بی

نهایت یا منفی بی نهایت می شود. مانند مثال های ۱ و ۴ فوق

ب) توان جمله ی ارشد صورت از توان جمله ی ارشد مخرج ، کمتر باشد. در این صورت جواب صفر حدی می

شود. مانند مثال ۳ فوق

ج) توان جمله ی ارشد صورت و مخرج برابر باشد. در این صورت جواب عددی غیر صفر بوده و برابر نسبت

ضریب های جملات ارشد می شود. مانند مثال ۲ فوق

تمرین ۶: حد های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 2x^3 - 2}{5x - 3x^4 + 1}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x^3 + x - 1}{6x^3 - 2x + 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 - 7x + 1}{2x^2 - x + 3}$

د) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$

برای محاسبه ی حد تابع رادیکالی با فرجه ی ۲ (اصم)، با توجه به روش فاکتورگیری هم ارزی های زیر حاصل

می شود. این هم ارزی ها را **هم ارزی های نیوتن** می نامند. توجه داشته باشید که دو تابع را **هم ارزی**

گویند هرگاه حد برابر داشته باشند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} \equiv - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

در این دو هم ارزی عدد a مثبت فرض شده است و اگر منفی باشد، تابع دارای حد نیست.

مثال: حدهای زیر را حساب کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 7x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4} \left(x + \frac{-7}{2(4)}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = 2(+\infty) = +\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 - x + 1} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9} \left(x + \frac{-1}{2(9)}\right) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -3(-\infty) = +\infty$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 + 7} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9} \left(x + \frac{0}{2(9)}\right) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -3(-\infty) = +\infty$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1} \left(x + \frac{-1}{2(1)}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{-4x^2 + 5x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{-4} \left(x + \frac{5}{2(-4)}\right) = \text{حد ندارد.}$$

تمرین برای حل:

۷: در هر مورد حد داده شده را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 2}{x - 1}$$

$$\text{ب) } \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1 - 5t^2}{t^2 + 3t}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - 3x}$$

۸: تابعی مثال بنویسید که حد آن در $+\infty$ برابر ۱ باشد.

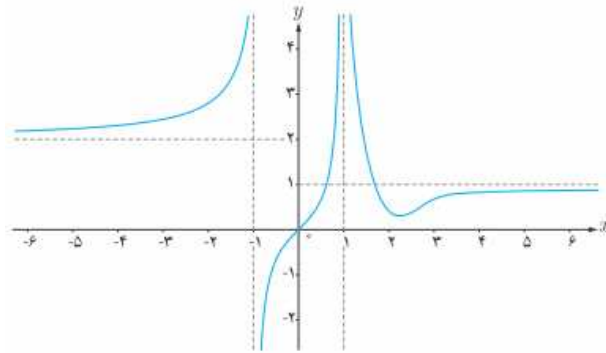
۹: تابعی مثال بنویسید که حد آن در $-\infty$ برابر ۵ باشد.

۱۰: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به دست آورید.

$$\text{الف) } f(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\text{ب) } g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

۱۱ : نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

۱۲ : حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9 + \frac{7}{x^3})$

۶) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2}x^3 + 7x^2 - 6)$

۲) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - 3}$

۷) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - 5}$

۳) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{3x + 1}$

۸) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 5x - 3}$

۴) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - 6x^3 - x}{x^2 - 5x + 1}$

۹) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{3 - x}$

۵) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$

۱۰) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{4}$

۱۳ : حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 4}{7x^3 - 11x^2 - 6x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 4}{x^3 + x - 8}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$

۱۴: حد های زیر را محاسبه کنید.

$$۱-۴) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\delta x - ۹x^۴ - x + ۱)$$

$$۵-۴) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{۲x + \sqrt{۹x^۲ - x}}{\delta - ۶x}$$

$$۲-۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۳x + ۲x^۳ - ۲}{\delta x - ۳x^۴ + ۱}$$

$$۶-۴) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{۴x^۲ + \delta x} - ۷x}{۶x - \sqrt{۹x^۲ + \delta}}$$

$$۳-۴) \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^۲ + ۱}{t^۳ - ۲t^۲ + ۱}$$

$$۷-۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۴x - \sqrt{x^۲ + ۷x} - ۱}{\delta x + \sqrt{x^۲ + x} - ۲}$$

$$۴-۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^۲ + ۳x} - ۱ - x + \delta)$$

$$۸-۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-۳x + \sqrt{x^۲ + ۱}}{۶x + \sqrt{۴x^۲ - ۱}}$$

۱۵: حد های زیر را حساب کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{۲x^۳ - ۸x}{۳x + \delta}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^۲ - ۲x + \delta} - \sqrt{x^۲ + ۲x + ۷})$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^۲ + ۳}}{x + \sqrt{x^۲ + ۱}}$$

۱۶: با توجه به تابع مقابل حد های زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x} & x > ۰ \\ \frac{\delta x^۲ - ۳x}{-x^۲ + ۱} & x \leq ۰ \end{cases}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$۱۷: \text{مقدار } k \text{ را به قسمی تعیین کنید که حد تابع } f(x) = \frac{۲x^۴ + x^۳ - ۱}{kx^۴ + x^۲ + ۱} \text{ وقتی که } x \rightarrow +\infty \text{ برابر ۴ باشد.}$$

۱۸ : مقدار n و m را چنان بیابید. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^2 - 5}{2x^n - 3x - 2} = 1$

۱۹ : مقدار k را چنان بیابید. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [2x - 1 + \sqrt{4x^2 + kx + 1}] = 5$ (جواب $k = -24$)

۲۰ : مقدار n و m را چنان بیابید. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [mx + n + \sqrt{x^2 - 4x - 3}] = 2$

(جواب $n = 4$ و $m = -1$)

۲۱ : اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-2)x^3 + 2x^2 + 3}{bx^2 + 1} + 3 = 5$ مقدار a و b را به دست آورید.

۲۲ : اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{ax^n} = 0$ آنگاه حداقل مقدار n را تعیین کنید. ($n \in \mathbb{N}$)

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان