ایستگاه مطالعه

# هو الحق

**درسنامه ، نکات و تمرینات فصل اول ریاضی نهم به قلم : زکی پور- خیریت-مرداسی-عزیزی**

گئورگ کانتور(۱۸۴۵_۱۹۱۸)
ریاضیدان آلمانی
خالق نظریه مجموعه ها

## مقدمه

برخی مفاهیم با اینکه قابل تعریف نیستند( بنداشت) ولی ما آنها را درک میکنیم و میشناسیم؛ از جمله مفاهیم که در ریاضیات قابل تعریف نبوده اند و با آن آشنا شده اید مفهوم نقطه و خط بوده است. در فصل اول ریاضیات نهم با یکی دیگر از مفاهیم غیر قابل تعریف ریاضی با نام مجموعه آشنا خواهید شد.

دانش آموزان عزیز، یک شخص به اسم آقا علی که دانش آموز باهوشی هستند سعی میکند جایی که توضیحات فهمیدنش سخت می باشد از من سوال بپرسد که بیشتر توضیحش بدهم. اگر میخواهید دقیقا مطالب را یاد بگیرید به سوالات آقا علی دقت کنید و جایی که انتظار میرود آقا علی مثال بزند شما هم یک مثال بزنید.

## درس اول: معرفی مجموعه

توضیح مجموعه: برای بیان و نمایش دسته یا گروهی از اشیا، حروف، اعداد و ...که متمایز( غیر تکراری) و کاملا مشخص هستند، از مجموعه استفاده میکنیم.

آقا علی: ببخشید آقا من فهمیدم متمایز بودن یعنی مثلا عدد تکراری توی مجموعه نباشه ، ولی اینکه میگیم کاملا مشخص باشه یعنی چی؟

پاسخ: علی جان یک عبارت زمانی مشخص کننده ی مجموعه است که کاملا گویا و شفاف باشد یعنی به طور دقیق مشخص کند چه چیزهایی در مجموعه قرار دارند و چه چیز هایی در آن مجموعه قرار ندارند. حالا علی جان به مثال های زیر دقت کنید:

**مثال ۱:** عبارت « شمارنده های عدد ۱۶» یک مجموعه را مشخص میکند چون کاملا مشخص که اعداد ۱ و ۲ و ۴و ۸ و ۱۶ در مجموعه قرار میگیرند و عددی مثل ۳ در مجموعه نخواهد بود.

**مثال ۲:** عبارت « اعداد بسیار کوچک» مجموعه نیست، چون این عبارت کاملا مشخص نمیکند چه عددهایی در مجموعه قرار دارند. ممکن است یک نفر عدد ۱ را کوچک بداند و شخص دیگری عدد ۰/۰۰۰۰۱
حالا علی جان شما مثالی بگو:

**مثال ۳ از آقا علی:**

آقا عبارت « چهار عدد مرکب کوچکتر از ۱۰» یک مجموعه را مشخص میکند چون کاملا مشخص است اعداد ۴و ۶ و ۸ و ۹ در این مجموعه قرار دارند.

**ایستگاه حل سوال**

**۱ . با دلیل مشخص کنید کدام عبارت مجموعه است و کدام عبارت مجموعه نیست؟**

**الف) چهار میوه خوشمزه**

پاسخ: مجموعه نیست. چون انتخاب چهار میوه کاملا سلیقه ایست و دقیقا مشخص نمیکند چه میوه ای در مجموعه است.

**ب) سه فصل از سال**

پاسخ: مجموعه نیست. چون هر سال چهار فصل دارد، در نتیجه دقیقا مشخص نیست چه فصل های در مجموعه هستند .

**پ) کل حالت های پرتاب یک تاس استاندارد**

پاسخ: مجموعه است. چون کاملا مشخص است که اعداد ۱ و ۲ و ۳و ۴و ۵و ۶ در مجموعه هستند.

**ت) پنج شاعر معروف ایرانی**

پاسخ: مجموعه نیست. چون کاملا مشخص نیست چه شاعرانی در این مجموعه قرار میگیرند.

**۲ . کدام عبارت مشخص کننده یک مجموعه است؟ دلیل خود را بیان کنید.**

**الف) سه اعداد اول کوچکتر از ۱۰**

پاسخ: مجموعه نیست. چون اعداد اول کمتر از ۱۰ عبارت اند از: ۲ و ۳و ۵و ۷ ، پس دقیقا مشخص نیست کدام سه تا از این اعداد در مجموعه قرار دارند.

**ب) پنج عدد اول کوچکتر از ۱۰**

پاسخ: مجموعه نیست. چون تعداد اعداد اول کمتر از ۴ تا می باشد پس نمیتوان پنج عدد متمایز اول از آنها انتخاب کرد.

**پ) اعداد اول کوچکتر از ۱۰**

پاسخ: مجموعه است. کاملا مشخص است که اعداد ۲ و ۳و ۵ و ۷ در این مجموعه هستند.

**ت) شمارنده های اول عدد ۱۲**

پاسخ: مجموعه است. چون کاملا مشخص است شمارنده های اول عدد ۱۲ اعداد ۲ و ۳ میباشند.

**ث) مضارب اول ۱۱**

پاسخ: مجموعه است. چون کاملا مشخص است. تنها مضرب اول عدد یازده خود ۱۱ است که در مجموعه قرار می گیرد.

۳ . عباراتی که یک مجموعه را مشخص می‌کنند را با «✓» و عباراتی که یک مجموعه را مشخص نمی‌کند را با «✕» مشخص کنید.

الف)سه عدد زوج متوالی.　　　　ب) اعداد حسابی کوچکتر از ۱.

پ) جواب معادله $۲x - ۱ = ۳$　　　　ت) اعداد صحیح بزرگتر از ۱-

پاسخ: الف ✕(چون اعضاء نامشخص هستند)　　ب ✓　　پ✓　　ت ✓

**ایستگاه مطالعه**

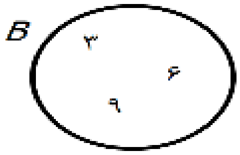
**نمایش های مختلف مجموعه:** مجموعه ها را با حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری میکنیم و به صورت های زیر نمایش می دهیم.

۱ . استفاده از یک جفت آکولاد: به این نوع نمایش ، نمایش تفصیلی مجموعه میگویند.

بطور مثال اگر A مجموعه ی شمارنده های عدد ۱۰ باشد، نمایش تفضیلی A به صورت زیر است:

$A = \{۱ و ۲ و ۵ و ۱۰\}$

۲. نمایش هندسی (نمودار وِن): اعضای مجموعه را داخل یک دایره یا اشکال هندسی قرار می دهیم. دقت شود بین اعضا در این روش «و» قرار نمی دهیم.به طور مثال اگرB مجموعه ی مضرب های طبیعی و یک رقمی عدد ۳ باشد نمایش هندسی آن بصورت زیر است:

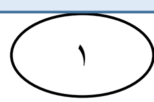



۳ . نمایش ریاضی: با استفاده از علائم ریاضی رابطه ی جبری برای مجموعه تعریف میشود. این نوع نمایش را در ایستگاه های مطالعه بعدی بررسی خواهیم کرد.

آقا علی: آقا اجازه از کجا بفهمیم از کدوم نمایش برای جواب باید استفاده کنیم؟

آفرین علی جان سوال خوبی پرسیدی.این سه روش معادل هستند و هیچ تفاوتی نداره که شما از چه روشی استفاده کنی ، مگر اینکه در صورت سوال روش خاصی عنوان گردد. به طور مثال اگر بخواهیم مجموعه ی اعدادی که نه اول هستند و نه مرکب را به صورت مجموعه نمایش دهیم از دو روش تفصیلی و هندسی (نمودار وِن) استفاده می کنیم.

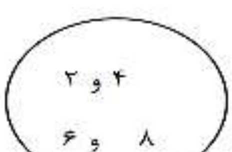
$\{۱\}$ یا



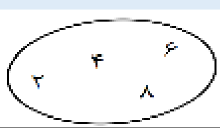

حالا علی جان شما یک مثال بزنید.

آقا علی: آقا اجازه «مجموعه اعداد طبیعی زوج کوچکتر از ۱۰» ؛

به روش تفصیلی میشه: $\{۸ و ۶ و ۴ و ۲\}$　نمودار ون هم




علی جان خیلی خوب نوشتی فقط یک اشتباه کوچیک داره ما در نمودار ون بین اعضا " و " قرار نمیدیم بلکه اعضا را با فاصله از هم مینویسیم یعنی بایستی اینطور نمایش میدادی:



**ایستگاه مطالعه**

**عضو مجموعه:** هر کدام از اعداد، اشیاء ، افراد و ... که درون یک مجموعه قرار می گیرند را عضوی از مجموعه می گویند. برای مثال اگر مجموعه ی A به صورت $A = \{a$ و ۳ و ۲$\}$ را در نظر بگیریم . برای مثال می گوییم $a$ عضوی از مجموعه ی A است و می نویسیم $a \in A$ و همچنین برای عددی مثل ۴ که عضو مجموعه ی $A$ نیست می نویسیم: $۴ \notin A$

آقا علی: آقا اجازه این نکته را داریم : نماد عضو بودن : $\in$ و نماد عضو نبودن : $\notin$

به نحوه ی استفاده از نماد عضویت دقت کنید. اگر بنویسیم $A \in ۳$ ، با توجه به این که این عبارت را " A عضو ۳ است" می خوانیم ، بی معنی و عبارتی نادرست است و عبارت درست به صورت $۳ \in A$ است.

آقا علی: آقا اجازه مثلا اگر مجموعه ی A شمارنده های عدد ۱۸ باشد ، مجموعه ی A به صورت زیر است:

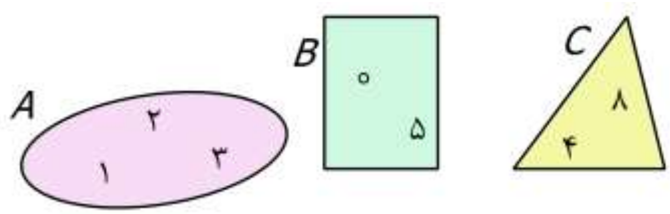
$\{۱۸$ و ۹ و ۶ و ۳ و ۲ و ۱$\} = A$ و داریم: $۶ \in A$ و $۱۲ \notin A$ و $۲ \notin A$ و $۱ \in A$

علی جان همه ی پاسخ ها درست بود به جز $۲ \notin A$ چون در A عضو ۲ وجود دارد پس باید $۲ \in A$ می نوشتی.

توجه: با بیان چند مثال می خواهیم با نحوه ی کشیدن نمودار ون برای تعدادی مجموعه آشنا شویم.

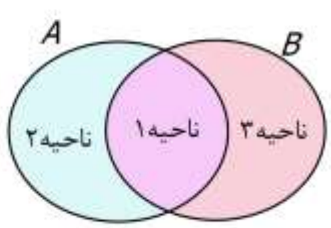
مثال۱) مجموعه های $A = \{$ ۳ و ۲ و ۱ $\}$ و $B = \{$ ۰ و ۵ $\}$ و $C = \{$ ۸ و ۴ $\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.

دقت کنیم سه مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند . در این حالت سه نمودار کاملا مجزا( جدا از هم) ترسیم می کنیم.




مثال۲) مجموعه های $A = \{$ ۳ و ۲ و ۱ $\}$ و $B = \{$ ۲ و ۵ و ۱ $\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.

اگر خوب دقت کنید اعداد ۱ و ۲ هم عضو A هستند و هم عضو B پس مجبوریم قسمتی از دو نمودار را درون هم ترسیم کنیم.




شکل۱

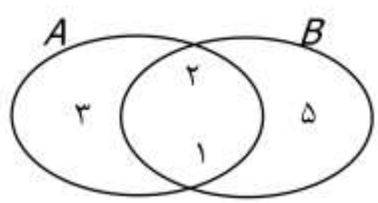
به شکل ۱ دقت کنید. برای قرار دادن اعداد در نمودار به صورت زیر عمل می کنیم:

در ناحیه شماره ۱ اعدادی را قرار می دهیم که هم در A باشند و هم در B

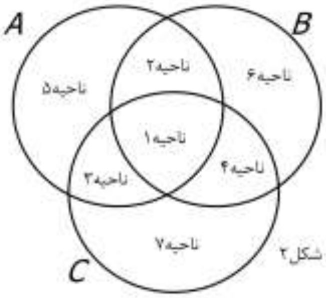
در ناحیه ی ۲ اعدادی را می نویسیم که فقط در A هستند.

در ناحیه ی ۳ اعدادی را می نویسیم که فقط در B هستند.

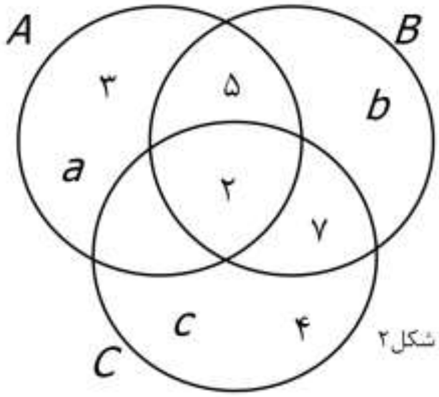
پس اعضاء را در نمودار طبق شکل مقابل می نویسیم



مثال۳) مجموعه های $A = \{a$ و ۳ و ۲ و ۵$\}$ و $B = \{$b و ۲ و ۵ و ۷$\}$ و $C = \{c$ و ۲ و ۷ و ۴$\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.




با توجه به شکل۲ برای کامل کردن نمودار ون برای سه مجموعه به ترتیب شماره ناحیه ها عمل میکنیم.




ناحیه ۱: اعضایی که در سه مجموعه مشترک هستند.

ناحیه ۲: اعضایی که هم در A و هم درB هستند، ولی در C قرار ندارند.

ناحیه ۳: اعضایی که هم در A و هم در C هستند ولی در B نیستند.

ناحیه ۴: اعضایی که هم در B و هم در C هستند ولی در A نیستند.

ناحیه ۵: اعضایی که فقط در A هستند.

ناحیه ۶: : اعضایی که فقط در B هستند.

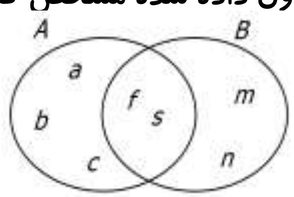
ناحیه ۷: اعضایی که فقط در C هستند.

برای پاسخ به مثال ۳: در ناحیه ۱: عدد ۲ در ناحیه ۲: عدد ۵ در ناحیه ۳: عضوی قرار نمیگیرد.

در ناحیه ۴: عدد ۷ در ناحیه ۵: عضوهای a و ۳ درناحیه ۶: عضو b در ناحیه ۷:عضوهای c و ۴ ( شکل۲)

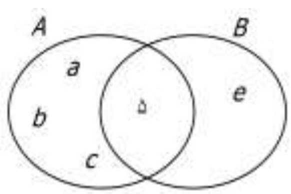
**ایستگاه حل سوال**

۱) اعضای مجموعه های A , B را با اعضایشان با توجه به نمودار ون داده شده مشخص کنید.




پاسخ: $A = \{a$ و $b$ و $c$ و $f$ و $s\}$ و $B = \{s$ و $f$ و $m$ و $n\}$

۲) با توجه به نمودار ون مقابل در جای خالی علامت ∉ یا ∈ قرار دهید.




b....A   a....B   ۵....B   ۵.....A

پاسخ:

$b \in A$   $a \notin B$   $۵ \in B$   $۵ \in A$

۳) با توجه به مجموعه ی $A = \{-۱$ و $۳^۰$ و $-(-۲)^۴$ و $\frac{-۹}{۳}\}$ در جای خالی علامت ∉ یا ∈ قرار دهید.

۰ .... A   ۱۶....A   ۳....A   -۱۶....A   ۱.....A

پاسخ: ابتدا در صورت امکان اعضاء را ساده میکنیم سپس به سوال جواب میدهیم در نتیجه داریم:

$$A = \{-۱ \text{ و } \overset{\boxed{۱}}{\cancel{۳^۰}} \text{ و } \overset{\boxed{-۱۶}}{\cancel{-(-۲)^۴}} \text{ و } \overset{\boxed{-۳}}{\cancel{\frac{-۹}{۳}}}\} = \{-۱ \text{ و } ۱ \text{ و } -۱۶ \text{ و } -۳\}$$

پس : $۰ \notin A$   $۱۶ \notin A$   $۳ \notin A$   $-۱۶ \in A$   $۱ \in A$

**ایستگاه مطالعه**

نکته: **در یک مجموعه با جابه جا کردن اعضا، مجموعه ی جدیدی ایجاد نمیشود.**

به طور مثال مجموعه های {۵ و۳ و ۲} با {۵ و۲ و ۳} و {۲ و۳ و ۵} همگی یکسان هستند و یک مجموعه را مشخص میکنند.

نکته: **اگر در یک مجموعه عضو تکراری وجود داشته باشد ،اعضای تکراری را حذف میکنیم و آن عضو را فقط یکبار مینویسیم.**

بطور مثال مجموعه ی {۳ و ۳ و ۲ و ۵ و۳ و ۲} عضو ۲ دوبار و ۳ سه بار تکرار شده اند که تکرارهایشان را حذف میکنیم و مجموعه را به حالت استاندارد{۵ و۳ و ۲} مینویسیم.

**تعداد اعضای یک مجموعه (عدد اصلی مجموعه)**

به تعداد عضوهای یک مجموعه، عدد اصلی آن مجموعه میگویند. عدد اصلی یک مجموعه مثل B را با نماد n(B) نمایش می دهیم.

مثال ۱: $A =$ {۷ و ۵ و ۳ و ۱} بنابراین $n(A) =$ ۴

آقا علی: آقا اجازه اگر مجموعه عضوهای تکراری داشت و عدد اصلی مجموعه رو پرسیده بود اقا باید بشماریمشون یا طبق نکته اول مجموعه رو استاندارد کنیم بعد تعداد اعضای مجموعه رو مشخص کنیم؟

علی جان ابتدا اعضای تکراری رو حذف میکنیم بعد عدد اصلی مجموعه رو تعیین میکنیم.

به این مثال دقت کن: $A =$ {۶ و۶ و ۲ و ۵ و۶ و ۲}  $A =$ {۶ و ۵ و ۲}  → $n(A) =$ ۳

**ایستگاه حل سوال**

سوال۱: اعضای هر مجموعه را مشخص کنید و تعداد اعضای هر کدام را تعیین کنید.

الف) مجموعه ی اعداد اول بین ۲۰ و ۳۵

ب) مجموعه ی اعداد فرد بین ۵ و ۱۶

ج) مجموعه ی مقسوم علیه های مشترک دو عدد ۳۰ و ۱۸

پاسخ:

الف) $A =$ {۳۱ و ۲۹ و ۲۳} ← $n(A) =$ ۳

ب) $B =$ {۱۵ و ۱۳ و ۱۱ و ۹ و ۷} ← $n(B) =$ ۵

ج) مقسوم علیه های عدد ۳۰: ۱ و ۲و ۳و ۵ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۳۰

مقسوم علیه های عدد ۱۸: ۱ و ۲و ۳و ۶و ۹و ۱۸

مجموعه مقسوم علیه های مشترک دو عدد عبارت است از : $C =$ {۶ و ۳ و ۲ و ۱} بنابراین $n(C) =$ ۴

ایستگاه مطالعه

## مجموعه تهی:

مجموعه ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه ی تهی می گوییم.

مجموعه تهی را با { } یا ∅ نمایش می دهیم. دقت کنید مجموعه های {۰} یا {∅} مجموعه ی تهی نیستند.

توجه: با توجه به تعریف مجموعه تهی $n(\emptyset)=۰$ یعنی عدد اصلی مجموعه تهی صفر است.

مثال: الف) مجموعه ی اعداد طبیعی کوچکتر از یک، تهی است.

ب) مجموعه ی مضارب اول عدد ۴ ، چون ۴ عددی مرکب است پس مضرب اولی ندارد این مجموعه تهی است.

ج) مجموعه ی اعداد صحیح بین ۰ و ۱- ، تهی است.

بیشتر بدانیم

**مجموعه یکانی:** مجموعه هایی که فقط یک عضو دارند را یکانی می گوییم.

مثال: مجموعه ی مضرب های اول عدد ۷ .زیرا هر عدد اول فقط یک مضرب اول که خودش دارد پس این مجموعه یکانی و تنها عضو آن خود ۷ است.

مجموعه ی اعداد صحیح بین ۱ و ۱-     تنها عدد صحیح بین این دو عدد ۰ میباشد پس این مجموعه نیز یکانی است.

مجموعه ی {∅} این مجموعه نیز یکانی است و تنها عضو آن ∅ میباشد.

گاهی تعداد عضوهای یک مجموعه زیاد است. به شرط آنکه بین این عضو ها نظم وجود داشته باشد، میتوانیم ابتدا تعدادی از آنها را نوشته و بعد سه نقطه را قرار دهیم(...) و سپس آخرین عضو مجموعه را بنویسیم.

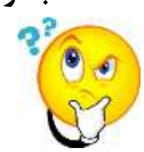
$$A = \{۱ و ۲ و ۳ و ... و ۱۰۰۰\}$$

اگر تعداد عضوهای یک مجموعه قابل شمارش باشند، یعنی جایی به پایان برسد( حتی اگر خیلی زیاد باشد) به آن مجموعه متناهی می گوییم. مجموعه A یک مجموعه ی متناهی با ۱۰۰۰ عضو می باشد.

در صورتی که مجموعه دارای بی شمار عضو باشد یعنی عضوهای آن تمام نشود آن را مجموعه نامتناهی می گوییم.

مانند مجموعه مضارب طبیعی عدد ۳: $B = \{۳ و ۶ و ۹ و ...\}$

ایستگاه حل سوال



۱ . مجموعه {∅ و ۰} چند عضو دارد؟ پاسخ: ۲ عضو

۲ . مجموعه {۰ و ۲ و ۴ و ... و ۲۰} چند عضو دارد؟ پاسخ: ۱۱ عضو

۳ .در مورد تعداد اعضای مجموعه {۰ و ۲ و ۴ و ...} چه می توان گفت؟

پاسخ: این مجموعه نامتناهی است پس بی شمار عضو دارد.

برای یادگیری بیشتر و مرور مطالب تمرینات صفحه ی ۵ کتاب درسی را حل کنید.

## درس دوم: مجموعه های برابر و نمایش مجموعه ها

ایستگاه مطالعه

**تعریف دو مجموعه برابر**: دو مجموعه را برابر گوییم درصورتی که عضوهایشان کاملا یکسان باشد.( دقت کنید جابه جایی عضو ها ایرادی ندارد.) درصورتی که مجموعه های A و B مساوی باشند با نماد A=B این موضوع را بیان میکنیم.

**مثال:** دو مجموعه ی $A = \{۱ و ۲ و ۰\}$ و $B = \{۰ و ۱ و ۲\}$ با هم برابرند.

**آقا علی:** آقا اجازه یعنی برای اینکه دو مجموعه برابر باشند هر چی اولی داشت دومی هم باید داشته باشه و برعکس درسته؟

دقیقا علی جان ما با توجه به همین نکته سوالات این قسمت رو حل میکنیم.  به این مثال توجه کنید:

مثال: اگر دو مجموعه زیر مساوی باشند، جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید؟

$$\{۲^۳ و ... و ۵\} = \{... و \sqrt{۲۵} و \sqrt{۸۱}\}$$

پاسخ: اگر اعضای مجموعه ها را ساده کنیم آنگاه جاهای خالی را به سادگی میتوان با عدد مناسب کامل کرد.

$$\{\underset{۸}{\cancel{۲^۳}} و ۹ و ۵\} = \{۸ و \underset{۵}{\cancel{\sqrt{۲۵}}} و \underset{۹}{\cancel{\sqrt{۸۱}}}\}$$

ایستگاه حل سوال

۱ . جاهای خالی را طوری کامل کنید که تساوی بین مجموعه ها برقرار باشد.

$$\text{الف)}\ \{۹ و ... و \sqrt{۴۹} و \frac{۱}{۳}\} = \{۳^۲ و \frac{۰}{۲۵} و \sqrt{\frac{۱}{۹}} و ...\}$$

پاسخ:

$$\text{الف)}\ \{۹ و ۰ و \underset{۷}{\cancel{\sqrt{۴۹}}} و \frac{۱}{۳}\} = \{\overset{۹}{\cancel{۳^۲}} و \underset{۰}{\cancel{\frac{۰}{۲۵}}} و \overset{\frac{۱}{۳}}{\cancel{\sqrt{\frac{۱}{۹}}}} و ۷\}$$

۲. اگر دو مجموعه $A = \{a + ۵ و ۲ و ۶\}$ و $B = \{۶ و ۹ و -۷ + b\}$ با هم مساوی باشند. مقدار a و b را بدست آورید؟

پاسخ: $\{a + ۵ و ۲ و ۶\} = \{۶ و ۹ و -۷ + b\}$

با تشکیل معادله مقدار a و b را بدست می آوریم. چون دو مجموعه برابرند و در مجموعه A عضو ۲ قرار دارد پس این عضو در مجموعه B نیز باید وجود داشته باشد در نتیجه:

$$-۷ + b = ۲ \quad \rightarrow \quad b = ۲ + ۷ = ۹$$

و همچنین در مجموعه $B$ عدد ۹ قرار دارد ولی در مجموعه $A$ قرار ندارد که با توجه به تساوی این دو مجموعه نتیجه میگیریم:

$$a + ۵ = ۹ \quad \rightarrow \quad a = ۹ - ۵ = ۴$$

۳ . در صورتی که $\{-۳\} = \{x + ۲ \text{ و } -۳\}$ آنگاه مقدار $x$ را تعیین کنید.

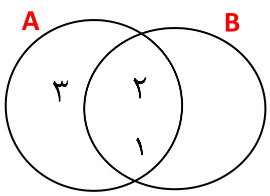
پاسخ: $\{-۳\}$ این مجموعه یک عضوی است پس مقدار $X$ را طوری تعیین میکنیم که مجموعه دوم نیز یک عضوی شود و تنها عضوش نیز ۳- باشد. در نتیجه با تشکیل معادله داریم:

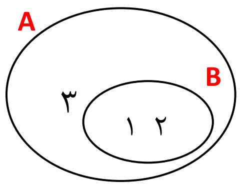
$$x + ۲ = -۳ \quad \rightarrow \quad x = -۳ - ۲ = -۵$$

**ایستگاه مطالعه**

مثال: نمودار ون مجموعه های $A = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳\}$ و $B = \{۱ \text{ و } ۲\}$ را رسم کنید.

اگر دقت کنید تمام اعضای B در درون مجموعه A وجود دارند در این حالت بهتر است حلقه ی B را درون حلقه ی A رسم کنیم. در واقع نمودار دوم رایج تر میباشد.




**زیر مجموعه:** اگر همه ی اعضای مجموعه B در مجموعه A وجود داشته باشند، میگوییم B زیرمجموعه ی A است.

زیر مجموعه بودن را با علامت $\subseteq$ و زیر مجموعه نبودن را با علامت $\nsubseteq$ نشان میدهیم.

مثال: مجموعه های $A = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵\}$ و $B = \{۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵\}$ و $C = \{۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۶\}$ را در نظر بگیرید روابط زیر بین این سه مجموعه برقرار است:

$B \subseteq A$ و $C \nsubseteq A$

$A \nsubseteq B$ و $A \nsubseteq C$ و $B \nsubseteq C$ و $C \nsubseteq B$

دقت کنید که اگر حتی یک عضو در مجموعه B باشد که در مجموعه ی A نباشد B زیرمجموعه A نخواهد بود.

نکته ۱: با توجه به تعریف زیرمجموعه واضح است، هر مجموعه زیر مجموعه خودش است. که بصورت جبری مینویسیم: $A \subseteq A$

آقا علی: آقا اجازه چرا هر مجموعه زیرمجموعه خودشه؟

علی جان چون اگر یک مجموعه دلخواه مثل $A = \{۱ \text{ و } ۲\}$ داشته باشیم همه ی عضوهای A در خودش قرار دارند.

آیا مجموعه تهی عضوی وجود دارد که در مجموعه دلخواهی مانند A وجود نداشته باشد؟

پاسخ: خیر، چون تهی عضوی ندارد.

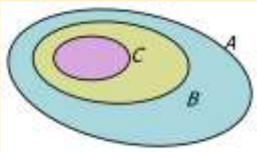
با توجه به سوال میتوان نکته زیر را بیان کرد:

نکته ۲: مجموعه تهی زیر مجموعه هر مجموعه دلخواه مانند A است. که به صورت جبری مینویسیم:

$$\emptyset \subseteq A$$

**نکته ۳:** با توجه به دو نکته بالا میتوان نتیجه گرفت که مجموعه تهی زیر مجموعه خودش نیز است. که بصورت جبری مینویسیم: $\emptyset \subseteq \emptyset$

**نکته ۴:** مانند نمودار داده شده اگر مجموعه $C$ زیر مجموعه ی، مجموعه $B$ و مجموعه $B$ نیز زیرمجموعه ی، مجموعه $A$ باشد؛ آنگاه مجموعه $C$ نیز زیرمجموعه، مجموعه ی $A$ است. و بطور کلی میتوان نوشت: $C \subseteq B \subseteq A$




مثال: $A = \{$۳ و ۲ و ۱$\}$ و $B = \{$۳ و ۱$\}$ و $C = \{۳\}$ باشد آنگاه:

$(C \subseteq B$ و $B \subseteq A) \rightarrow C \subseteq A$

**نوشتن زیرمجموعه های یک مجموعه:**

با توجه به عضوهای یک مجموعه میتوان زیرمجموعه های آن را تعیین کرد؛ با استفاده از راهبرد الگوسازی که در پایه هفتم آموختید به شیوه زیر عمل میکنیم:

۱ . نوشتن زیرمجموعه صفر عضوی ( یعنی تهی)

۲ . نوشتن زیر مجموعه های یک عضوی ( هر عضو مجموعه را اگر داخل یک آکولاد قرار دهیم یک زیرمجموعه یک عضوی ساخته میشود)

۳ . نوشتن زیر مجموعه های دو عضوی ( هر دو عضو را داخل آکولاد قرار می دهیم تا زیر مجموعه دو عضوی بوجود آید)

۴ . این مراحل را آنقدر ادامه میدهیم تا آخرین زیر مجموعه که خود مجموعه میباشد برسیم.

**مثال ۱:** زیر مجموعه های مجموعه ی $A = \{$۲ و ۱$\}$ را بنویسید.

پاسخ: به ترتیب بالا ۱. تهی $\emptyset$ ۲. زیرمجموعه های یک عضوی $\{۱\}$ و $\{۲\}$ و ۳. زیرمجموعه های دو عضوی( خود مجموعه) $\{$۲ و ۱$\}$

در نتیجه مجموعه $A$، ۴ زیرمجموعه دارد.

**مثال ۲:** زیر مجموعه های مجموعه $B = \{$۵ و ۴ و ۱$\}$ را بنویسید.

پاسخ: به ترتیب ۱. تهی $\emptyset$ ۲. زیرمجموعه های یک عضوی $\{۵\}$ و $\{۱\}$ و $\{۴\}$ و ۳. زیرمجموعه های دو عضوی $\{$۴ و ۱$\}$ و $\{$۵ و ۱$\}$ و $\{$۴ و ۵$\}$ ۴. زیرمجموعه های ۳ عضوی $\{$۵ و ۴ و ۱$\}$ (خود مجموعه.)

در نتیجه تعداد زیر مجموعه های مجموعه $B$، ۸ تا است.

**آقا علی:** آقا اجازه تعداد عضو های مجموعه $B$ یدونه بیشتر از $A$ هست و تعداد زیرمجموعه هاش ۲ برابر تعداد زیر مجموعه های $A$ پس میشه نتیجه گرفت اگر به مجموعه ای یک عضو اضافه کنیم تعداد زیر مجموعه هاش۲ برابر میشه؟

بله علی جان دقیقا به همین صورت . و اگر بخواهیم این نتیجه رو دقیق تر بیان کنیم، الگویی بین تعداد عضوهای مجموعه و تعداد زیرمجموعه هاش هست به جدول زیر دقت کن و الگو رو حدس بزن:

| تعداد عضو های مجموعه | ۰ عضو | ۱ عضو | ۲ عضو | ۳ عضو | ... | $n$ عضو |
|---|---|---|---|---|---|---|
| تعداد زیر مجموعه ها | ۱ | ۲ | ۴ | ۸ | ... | ؟ |

آقا علی: آقا اجازه اگر الگو یابی کنیم مفهمیم که هر مرحله دوبرابر مرحله قبلشه (البته بجز مرحله اول که گفتیم علتش یک عضو بیشتر داشتن نسبت به مرحله قبلشه پس میشه گفت

**تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه که $n$ عضو دارد $۲^n$ است.**

ایستگاه حل سوال

۱ . یک مجموعه ۴ عضوی چه تعداد زیر مجموعه دارد؟

پاسخ: $n = ۴ \rightarrow ۲^n = ۲^۴ = ۱۶$

۲. اگر مجموعه ای ۳۲ زیر مجموعه داشته باشد، چند عضو دارد؟

پاسخ: ۳۲ را تجزیه میکنیم تا توان عدد ۲ را تعیین کنیم که همان تعداد عضوها می باشد.

$$۳۲ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۵$$

پس میتوان نتیجه گرفت این مجموعه ۵ عضو دارد.

۳. مجموعه $B =$ {۱ و ۲ و ۳ و ۴} را در نظر بگیرید؛

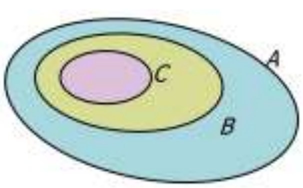
الف) زیر مجموعه های ۲ عضوی این مجموعه را بنویسید.

ب) زیر مجموعه هایی را بنویسید که شامل اعداد ۳ و ۴ باشد.

پاسخ:

الف) {۴ و ۳} و {۴ و ۲} و {۳ و ۲} و {۴ و ۱} و {۳ و ۱} و {۲ و ۱}

ب) {۴ و ۳} و {۱ و ۴ و ۳} و {۲ و ۴ و ۳} و {۴ و ۳ و ۲ و ۱}




۴. با توجه به نمودار ون مقابل گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) $A \subseteq B \subseteq C$ ب) $A \subseteq C \subseteq B$ ج) $C \subseteq A \subseteq B$ د) $C \subseteq B \subseteq A$

پاسخ: پاسخ گزینه د، چون حلقه ی $C$ داخل حلقه ی $B$ و حلقه ی $B$ نیز داخل حلقه ی $A$ قرار گرفته است پس میتوان نتیجه گرفت: $C \subseteq B \subseteq A$

۵. باتوجه به مجموعه های $A$ و $B$در جالی علامت $\subseteq$ یا $\not\subseteq$ قرار دهید.

$A=\{-۱ و ۳ و -۵ و ۷\}$ و $B=\{-۱ و -۳ و -۵\}$

$B \dots B$ $\quad -۳ \dots B$ $\quad \{\,\} \dots A$ $\quad \{۷\} \dots A$ $\quad A \dots B$ $\quad B \dots A$

پاسخ: $B \subseteq B$ $\quad -۳ \not\subseteq B$ $\quad \{\,\} \subseteq A$ $\quad \{۷\} \subseteq A$ $\quad A \not\subseteq B$ $\quad B \not\subseteq A$

$-۳ \not\subseteq B$ چون ۳- آکولاد ندارد پس مجموعه نمیتواند باشد و چون مجموعه نیست، زیرمجموعه هم نیست.

۶. با توجه به مجموعه های $A$ و $B$ درستی یا نادرستی هر قسمت را تعیین کنید.( دانش آموزان عزیز به این سوال توجه کنید تا کاربرد نمادها را بهتر درک کنید)

$A=\{۱ و a و ۵\}$ و $B=\{۱ و b و ۴\}$

$۵ \subseteq A$ $\quad b \not\subseteq B$ $\quad \{۱ و b و ۴\} \in B$ $\quad A \subseteq \{۱ و a و ۵\}$ $\quad b \notin A$ $\quad ۱ \in B$

$۵ \subseteq A$ نادرست چون ۵ آکولاد ندارد ساختار مجموعه ندارد پس زیرمجموعه نیست.

$b \not\subseteq B$ درست. $\quad \{۱ و b و ۴\} \in B$ نادرست. $\quad A \subseteq \{۱ و a و ۵\}$ درست $\quad b \notin A$ درست $\quad ۱ \in B$ درست.

۷ . با توجه به مجموعه $A=\{۱ و \{۱\}\}$؛

الف) این مجموعه چند عضو دارد؟ ب) زیر مجموعه های یک عضوی اش را مشخص کنید؟

پاسخ:

الف) در اینگونه سوالات به اعضایی که در آکولاد قرار گرفته اند دقت کنید، در این سوال ۱ و $\{۱\}$ دو عضو متفاوت هستند و آکولاد باعث این تفاوت شده است. در نتیجه این مجموعه دو عضو دارد.

ب) اگر عضو یک را در نظر بگیریم آنگاه با قرار دادن آکولاد برای آن زیر مجموعه خواهد بود یعنی: $\{۱\} \rightarrow ۱$

با در نظر گرفتن $\{۱\}$ بعنوان عضو دیگر این مجموعه آنگاه: $\{\{۱\}\} \rightarrow \{۱\}$

نتیجه مهم: اگر عضوی خودش در آکولاد قرار داشت برای اینکه ساختار زیر مجموعه بودن به خود بگیرد به یک جفت آکولاد دیگر نیاز دارد.

۸ . با توجه به مجموعه $A=\{۱ و ۲ و \{۱ و ۲\}\}$؛

الف . این مجموعه چند عضو دارد؟ ب) تعداد زیر مجموعه های، مجموعه $A$ را تعیین کنید.

پاسخ:

الف) این مجموعه سه عضو دارد. ۱، ۲ و $\{۱ و ۲\}$( به تاثیر آکولاد روی این عضو توجه کنید)

ب) طبق رابطه بیان شده در ایستگاه مطالعه : $۲^n$ و اینکه $n=۳$ پس $۲^۳=۸$ زیرمجموعه دارد.

۹. با توجه به مجموعه $A=\{۱ و ۲ و \{۲ و ۳\}\}$ کدام گزینه نادرست است؟

الف. $n(A)=۳$ $\quad$ ب. $۲ \in A$ $\quad$ ج. $\{۲ و ۳\} \subseteq A$ $\quad$ د. $\{۲ و \{۲ و ۳\}\} \subseteq A$

پاسخ: گزینه ج نادرست است در صورتی که $\{\{۲ و ۳\}\} \subseteq A$ یا $\{۲ و ۳\} \in A$ درست بود.

ایستگاه مطالعه

**یک جمع بندی: ارتباط تساوی دو مجموعه و مفهوم زیرمجموعه:**

**با توجه به تعریف تساوی دو مجموعه میتوان گفت:« اگر مجموعه $A$ زیرمجموعه $B$ و همچنین مجموعه $B$ نیز زیر مجموعه $A$ باشد، مجموعه $A$ و $B$ مساوی اند.**

$(B \subseteq A$ و $A \subseteq B) \rightarrow A = B$

**برعکس: اگر دومجموعه $A=B$ باشند آنگاه $A$ زیرمجموعه $B$ و همچنین $B$ زیرمجموعه $A$ میباشد.**

$A = B \rightarrow (A \subseteq B$ و $B \subseteq A)$

**مجموعه های عددی مهم:**

**در بحث مجموعه ها بیشمار مجموعه عددی میتوان نوشت. اما برخی از مجموعه ها پرکاربرد تر هستند، بنابراین این مجموعه ها را با اسامی و حروف خاصی نامگذاری میکنند برخی از این مجموعه ها عبارت اند از:**

**مجموعه اعداد طبیعی با حرف $N$ نامگذاری میشود:** ℕ = {۱ و ۲ و ۳ و ...}

**مجموعه اعداد حسابی که با حرف $W$ نامگذاری میشود:** 𝕎 = {۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ...}

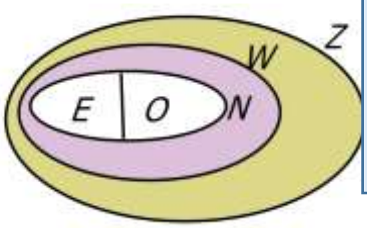
**مجموعه اعداد صحیح که با حرف $Z$ نامگذاری میشود:** ℤ = {... و −۲ و −۱ و ۰ و ۱ و ۲ و ...}

**مجموعه اعداد طبیعی دو زیر مجموعه مهم دارد که عبارت اند از:**

**مجموعه اعداد فرد طبیعی که با حرف $O$ نامگذاری میشود:** 𝕆 = {۱ و ۳ و ۵ و ...}

**مجموعه اعداد زوج طبیعی که با حرف $E$ نامگذاری میشود:** 𝔼 = {۲ و ۴ و ۶ و ...}

**آقا علی: آقا اجازه ما در پایه هشتم خوندیم که مثلا هر عدد طبیعی عددی صحیح است با توجه به این میشه گفت مجموعه اعداد طبیعی زیرمجموعه اعداد صحیح هستند؟**




**بله علی جان . و اگر بخوایم کلی تر بیان کنیم میشه گفت:**

$\mathbb{E}$ و $\mathbb{O} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$

**که اگر به اعضای این مجموعه ها و نمودار ون دقت کنی این رابطه قابل درک خواهد بود.**

**محدوده های عددی:**

**دانش آموزان عزیز شما با نمادهای $<$ و $\le$ آشنا شده اید. با ترکیب کردن این نماد ها و یک متغیر محدوده ای عددی برای آن متغیر ساخته میشود. برای درک بهتر این موضوع به مثال های زیر دقت کنید:**

**مثال ۱: $x \le -3$ اعداد مورد نظر کوچکتر یا مساوی ۳- هستند.**

**مثال ۲: $-3 < x < 4$ اعداد مورد نظر از ۳- بزرگتر و از ۴ کوچکتر هستند.**

**مثال ۳: $-3 < x \le 4$ اعداد مورد نظر از ۳- بزرگتر و کوچکتر یا مساوی ۴ هستند.**

**مثال ۴: $-3 \le x < 4$ اعداد مورد نظر از بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتراز ۴ هستند.**

**مثال ۵: $-3 \le x \le 4$ اعداد مورد نظر از بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر یا مساوی ۴ هستند.**

ایستگاه حل سوال

۱. هر کدام از محدوده های عددی با توجه به شرط مشخص شده چه اعدادی را مشخص میکند.

الف) $x \in \mathbb{N}$ و $-۳ \leq x < ۴$ ب) $x \in \mathbb{W}$ و $-۳ \leq x < ۴$

ج) $x \in \mathbb{Z}$ و $-۳ \leq x < ۴$ د) $x \in \mathbb{W}$ و $۳ \leq x$

پاسخ: الف) اعدادی که مد نظر است که بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر از ۴ هستند فقط بایستی در نظر داشت که این اعداد طبیعی هستند در نتیجه : اعداد ۱ و ۲ و ۳ را مشخص میکند.

ب) مشابه قسمت الف اعدادی مد نظر است که بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر از ۴ باشد به شرط آنکه این اعداد، عدد حسابی باشند. در نتیجه: اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ را مشخص میکند.

ج) اعداد مد نظر بزرگتر یا مساوی ۳- و کوچکتر از ۴ هستند به شرط آنکه این اعداد، عدد صحیح باشند. در نتیجه: اعداد: ۳- و ۲- و ۱- و ۰ و۱ و ۲ و ۳ را مشخص میکند.

د) اعداد مورد نظر بزرگتر مساوی سه و عدد حسابی هستند در نتیجه: اعداد ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ... را مشخص میکند.

ایستگاه مطالعه

## نمایش مجموعه ها به زبان ریاضی:

ابتدای فصل عبارت های کلامی را آموختیم که یک مجموعه را مشخص میکردند حال میخواهیم عبارت های ریاضی (جبری) را بیاموزیم که یک مجموعه را با استفاده از علائم و نماد ها توضیح میدهند. هر عبارت ریاضی که یک مجموعه را بصورت جبری نمایش میدهد معمولا به صورت زیر نوشته میشود:

{قسمت اول | قسمت دوم}

قسمت اول: یک الگو یا رابطه ی کلی است که با استفاده از آن اعضا مجموعه را تعیین میکنیم.

خط عمودی « | » که دو قسمت را از هم جدا میکند « بطوری که یا به شرطی که» خوانده میشود.

قسمت دوم: یک محدوده عددی برای ما مشخص میکند که اعداد این محدوده را در رابطه ای که در قسمت اول آمده قرار میدهیم تا اعضا مشخص شوند.

مثال ۱: اعضای مجموعه های زیر را تعیین کنید؟

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ و $۲ \leq x < ۵\}$

پاسخ:

محدوده عددی
X=۲و۳و۴

رابطه ای مشخص کننده اعضا

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ و $۲ \leq x < ۵\}$

نحوه خواندن مجموعه: اعدادی( $X$ هایی) عضو مجموعه $A$ است بطوریکه این اعداد، طبیعی و بزرگتر یا مساوی ۲ و کوچکتر از ۵ باشند. در نتیجه : $A = \{۲ , ۳ , ۴\}$

آقا علی: آقا اجازه یعنی محدوده عددی همون اعضای مجموعه ست؟

علی جان در این مثال اینطور بود. از اشتباهات رایج دانش آموزان در این بخش اینه که برای هر سوالی محدوده رو بعنوان اعضای مجموعه در نظر میگیرن. بطور کلی نمیشه اینو گفت به مثال های بعدی توجه کنید:

$B = \{-x \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } ۲ < x \leq ۵\}$

پاسخ: نحوه ی خواندن مجموعه: قرینه اعدادی ( X-هایی) عضو مجموعه B است بشرطی که خود اعداد طبیعی و بزرگتر مساوی ۲ و کوچکتر از ۵ هستند.

$$x = ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \quad \rightarrow \quad -x = -۳ \text{ و } -۴ \text{ و } -۵$$

در نتیجه مجموعه $B$: $B = \{-۳ \text{ و } -۴ \text{ و } -۵\}$

توجه: در صورتی که رابطه ی مجموعه در قسمت اول پیچیده بود برای اینکه بدون اشتباه بتوانید اعضا هر مجموعه تعیین کنید میتوانید از جدول زیر استفاده کنید:

| | | | |
|---|---|---|---|
| اعداد محدوده ای که در قسمت دوم مشخص شده اند | ؟ | ؟ | ... |
| جایگذاری رابطه ای که در قسمت اول بیان شده است | ؟ | ؟ | .. |

مثال ۳: اعضای مجموعه زیر را تعیین کنید.

$A = \{۲x + ۱ \mid x \in \mathbb{N} \text{ و } ۲ \leq x < ۵\}$

پاسخ: عبارت $x \in \mathbb{N} \text{ و } ۲ \leq x < ۵$ محدود عددی را مشخص میکند که باید در عبارت $۲x + ۱$ جایگذاری کنیم تا اعضا مشخص شود. محدوده عددی که برای ما مشخص میشود : ۲ و ۳و ۴ میباشد که با استفاده از جدول زیر اعضای مجموعه را تعیین میکنیم.

| $x$ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|
| $۲x + ۱$ | ۲×۲+۱=۵ | ۲×۳+۱=۷ | ۲×۴+۱=۹ |

مجموعه $A$: $A = \{۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\}$

ایستگاه حل سوال

۱ . اعضای هر مجموعه را تعیین کنید.

الف ) $M = \{۳x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -۳ < x \leq ۰\}$

ب) $B = \{۵x - ۲ \mid x \in \mathbb{W} \text{ و } x < ۴\}$

ج) $C = \{x^۲ \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -۲ < x \leq ۲\}$

د) $\mathbb{W} = \{x - ۱ \mid x \in \mathbb{N}\}$

پاسخ:

الف $M = \{-۶ \text{ و } -۳ \text{ و } ۰\}$

| $x$ | −۲ | −۱ | ۰ |
|---|---|---|---|
| $۳x$ | ۳× (−۲)=−۶ | ۳×(−۱)=−۳ | ۳×۰=۰ |

ب)

$B = \{-۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۸ \text{ و } ۱۳\}$

| $x$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ |
|---|---|---|---|---|
| $۵x - ۲$ | ۵×۰−۲=−۲ | ۵×۱−۲=۳ | ۵×۲−۲=۸ | ۵×۳−۲=۱۳ |

ج)

| $x$ | $-۱$ | $۰$ | $۱$ | $۲$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^{۲}$ | $(-۱)^{۲} = ۱$ | $۰$ | $۱$ | $۴$ |

دقت کنید عضو ۱ تکرار شد.

$C = \{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۴\}$

د)

| $x$ | ۱ | ۲ | ... |
|---|---|---|---|
| $x - ۱$ | ۱-۱=۰ | ۲-۱=۱ | ... |

مجموعه اعداد حسابی : $\mathbb{W} = \{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۲ \text{ و} ......\}$

ایستگاه مطالعه

**نوشتن مجموعه به زبان ریاضی:**

در این حالت اعضای مجموعه مشخص است و از ما میخواهند که زبان ریاضی مجموعه را بیان کنیم. برای این کار ابتدا رابطه ی بین اعضا را با استفاده از الگویابی مشخص میکنیم، سپس با توجه به رابطه محدوده عددها را مشخص میکنیم.

**مثال ۱:** مجموعه $A = \{-۵ \text{ و } -۴ \text{ و } -۳ \text{ و } ... \text{ و } ۲\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

**پاسخ:** با توجه به اعضا: $A = \{x |\ x \in \mathbb{Z} \text{ و } -۵ \leq x \leq ۲\}$

**مثال ۲:** مجموعه $E = \{۲ \text{ و } ۴ \text{ و } ۶ \text{ و } ...\}$ (مجموعه اعداد زوج طبیعی) را به زبان ریاضی بنویسید.

**پاسخ:**

ابتدا رابطه ی بین اعضا را تعیین میکنیم: ۲ و ۴ و ۶ و ... $\rightarrow$ ۲k

حال محدوده مناسب را برای متغییر k در نظر میگیریم که: $k \in \mathbb{N} \text{ و } ۱ \leq k$

در نتیجه: $E = \{۲k |\ k \in \mathbb{N} \text{ و } ۱ \leq k\}$

**مثال ۳:** مجموعه های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) مجموعه اعداد فرد طبیعی ب) $B = \{-۳۵ \text{ و } -۳۰ \text{ و} ... \text{ و } ۴۵\}$

**پاسخ:**

الف) اعداد طبیعی فرد عبارت اند از ۱ و ۳ و ۵ و ...

پس رابطه بین اعداد $۲k - ۱$ میباشد. برای محدوده ای که k از آن انتخاب میشود نیز میتوان اعداد طبیعی را در نظر گرفت. در نتیجه: $O = \{۲k - ۱ \mid k \in \mathbb{N} \text{ و } ۱ \leq k\}$

ب) رابطه ی بین : $۵x$ برای تعیین محدوده ای که x از آن انتخاب میشود با تقسیم اعضا به ۵ میتوان دریافت که:

$-۷ < x \leq ۹ \text{ و } x \in \mathbb{Z}$ در نتیجه داریم: $B = \{۵x | x \in \mathbb{Z} \text{ و } -۷ < x \leq ۹\}$

## مجموعه اعداد گویا و نمایش جبری آن

**تعریف اعداد گویا:** هر عدد که بتوان بصورت کسری نوشت بطوریکه صورت و مخرج آن عدد صحیح باشد و مخرج عددی غیر صفر باشد را عدد گویا می نامیم.

**مجموعه اعداد گویا:** مجموعه ایست شامل همه ی اعداد گویا که با حرف $\mathbb{Q}$ نامگذاری میشود.

**نمایش جبری مجموعه اعداد گویا:** $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \,|\, a \text{ و } b \in \mathbb{Z} \text{ و } b\neq ۰\right\}$

**نکته : در پایه هشتم خواندید که هر عدد صحیح ، عدد گویاست (چون میتوانیم برای آن مخرج یک قرار دهیم) پس میتوان گفت مجموعه اعداد صحیح زیرمجموعه، مجموعه اعداد گویا هستند.**

**به نمودار ون و رابطه زیر دقت کنید:**

$$\mathbb{E} \text{ و } \mathbb{O} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

**در فصل دوم بیشتر با مجموعه اعداد گویا بیشتر آشنا خواهید شد.**

**برای درک بهتر مفاهیم کاردرکلاس صفحه: ۶ و ۸تمرین صفحه: ۱۰ را حل کنید.**

## درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه ها

### اشتراک مجموعه ها:

**گفت و گو:** آقا علی میخوایم کار امروز را با بررسی یک سوال شروع کنیم

دو مجموعه $D=\{۳ و ۲ و ۱\}$ و $C=\{۴ و ۳ و ۲\}$ را در نظر بگیرید. آیا عبارت: « عضو های مشترک مجموعه های Dو C » مشخص کننده ی یک مجموعه است؟

**آقا علی:** آقا اجازه ، بله آقا چون اعضاء مشترکشون کاملا مشخصه ( اعداد ۲ و ۳ ).پس میشه مجموعه ی $\{۳ , ۲\}$

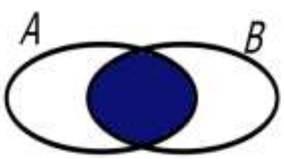
**ایستگاه مطالعه**

آفرین علی جان حالا به توضیحات من توجه کنید:

**تعریف اشتراک دو مجموعه A و B :** مجموعه ای است که شامل همه عضوهایی که هم عضو A هستند و هم عضو مجموعه B و آن را با نماد $A\cap B$ ( میخوانیم A اشتراک B) نمایش میدهیم.

نمایش به زبان ریاضی: $A\cap B=\{x|\ x\in A \text{ و } x\in B\}$

نمایش با استفاده از نمودار ون:

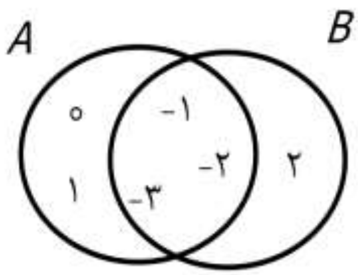


$A\cap B$

**مثال ۱:** دو مجموعه $D=\{۳ و ۲ و ۱\}$ و $C=\{۴ و ۳ و ۲\}$ را در نظر بگیرید. اشتراک این دو مجموعه را با نمایش اعضا مشخص کنید.

**پاسخ:** $C\cap D=\{۴ و ۳ و ۲\}\cap\{۳ و ۲ و ۱\}=\{۳ و ۲\}$

**مثال ۲:** باتوجه به نمودار ون مقابل اعضای مجموعه زیر را تعیین کنید.




**پاسخ:** با توجه به نمودار ون سه عدد ۱- و ۲-و ۳- در قسمت مشترک مجموعه ها قرار دارند پس:

$A\cap B=\{-۱ و -۲ و -۳\}$

**مثال ۳:** با توجه به مجموعه های A و B و C تساوی های زیر را تکمیل کنید.

$$A = \{\text{۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵}\} \quad \text{و} \quad B = \{\text{۶ و ۸ و ۷ و ۴ و ۵}\} \quad \text{و} \quad C = \{\text{۰ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸}\}$$

$$A \cap B = \qquad A \cap C = \qquad B \cap C = \qquad A \cap B \cap C =$$

پاسخ:

$$A \cap B = \{\text{۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵}\} \cap \{\text{۶ و ۸ و ۷ و ۴ و ۵}\} = \{\text{۴ و ۵}\}$$

$$A \cap C = \{\text{۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵}\} \cap \{\text{۰ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸}\} = \{\text{۲ و ۴}\}$$

$$B \cap C = \{\text{۶ و ۸ و ۷ و ۴ و ۵}\} \cap \{\text{۰ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸}\} = \{\text{۴ و ۶ و ۸}\}$$

دقت شود که مفهوم $A \cap B \cap C$ ، مجموعه عضو های مشترک سه مجموعه A و B و C است.

$$A \cap B \cap C = \{\text{۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵}\} \cap \{\text{۶ و ۸ و ۷ و ۴ و ۵}\} \cap \{\text{۰ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸}\} = \{\text{۴}\}$$

**نکته ۱:** واضح است اشتراک مجموعه A با خودش برابر همان مجموعه A است. $A \cap A = A$

**نکته ۲:** اشتراک هر مجموعه با مجموعه تهی، تهی میباشد چون تهی با هیچ مجموعه ای عضو مشترک ندارد.

$A \cap \emptyset = \emptyset$

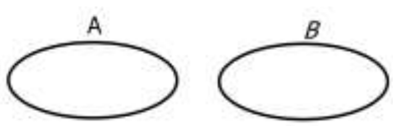
**نکته ۳:** برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم، اشتراک این دو مجموعه زیر مجموعه هر کدام از آنهاست.

$$(A \cap B) \subseteq A \quad \text{و} \quad (A \cap B) \subseteq B$$

چون هر عضو اشتراک دو مجموعه $A$ و $B$ ، در هر کدام از مجموعه های $A$ و $B$ قرار دارد.

**تعریف دو مجموعه مجزا( جدا از هم):** اگر دو مجموعه $A$ و $B$ هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی

$A \cap B = \emptyset$ آنگاه مجموعه های $A$ و $B$ را جدا از هم می گوییم و نمودار ون آنها بصورت زیر است:




**مثال:** مجموعه های $E$( اعداد زوج طبیعی) و $O$ (اعداد فرد طبیعی) مجزا هستند.

ایستگاه حل سوال

۱. مجموعه های $A = \left\{ a+۱ \mid a \in \mathbb{N} \text{ و } ۲ < a \leq ۵ \right\}$ و $B = \left\{ \frac{b}{۲} \mid b = ۴ \text{ و } ۶ \text{ و } ۸ \right\}$ را در نظر بگیرید:

الف) اعضای $A$ و $B$ را تعیین کنید.

ب) مجموعه $A \cap B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

پاسخ: الف) در صورت نیاز برای تعیین اعضا از جدول استفاده کنید.

$$A = \left\{ ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۶ \right\} \qquad \text{و} \qquad B = \left\{ ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \right\}$$

ب) $A \cap B = \left\{ ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۶ \right\} \cap \left\{ ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \right\} = \{۴\}$

۲. اگر مجموعه $A$ ، اعداد حسابی زوج یک رقمی و مجموعه $B$، اعداد اول یک رقمی و مجموعه $C$، اعداد طبیعی فرد یک رقمی باشد؛

الف) مجموعه $A$ و مجموعه ...... جدا از هم هستند.( $B$ ، $C$)

ب) تساوی های زیر را کامل کنید:

$n(A) =$ $\qquad$ $B \cap C =$ $\qquad$ $n(B \cap C) =$

$n(A \cap B) =$ $\qquad$ $n(A \cap B \cap C) =$

پاسخ: ابتدا اعضای مجموعه ها را مشخص میکنیم:

$$A = \left\{ ۰ \text{ و } ۲ \text{ و } ۴ \text{ و } ۶ \text{ و } ۸ \right\} \quad \text{و} \quad B = \left\{ ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \right\} \quad \text{و} \quad C = \left\{ ۱ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹ \right\}$$

الف) C ، چون مجموعه های A و C عضو مشترکی ندارند.

ب) $n(B \cap C)$ یعنی تعداد عضوهای مشترک B و C، پس دقت کنید که بصورت مجموعه پاسخ ندهید.

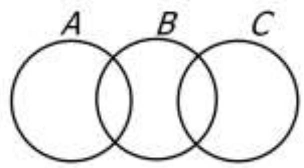
$n(A) = ۵$ $\qquad$ $B \cap C = \left\{ ۳ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \right\}$ $\qquad$ $n(B \cap C) = n\left( \left\{ ۳ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \right\} \right) = ۳$

تعداد عضوهای مشترک دو مجموعه جدا از هم صفر است در نتیجه:

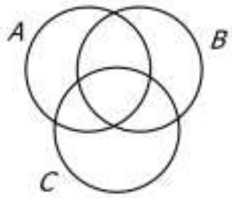
$$n(A \cap B) = n(\emptyset) = ۰ \qquad\qquad n(A \cap B \cap C) = n(\emptyset) = ۰$$

پاسخ در این سوال بصورت کامل پاسخ نوشته شده است، درامتحان بصورت $n(B \cap C) = ۳$ نوشته شود ، کفایت می کند.

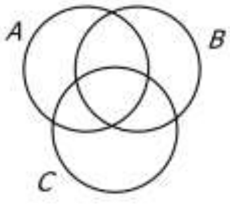
۳. مجموعه خواسته شده را در هر نمودار هاشور بزنید:




$A \cap B$

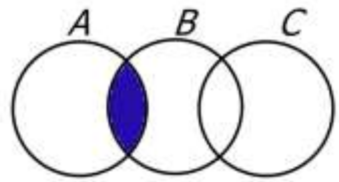



$A \cap C$

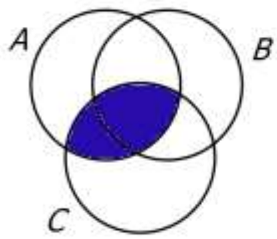



$A \cap B \cap C$

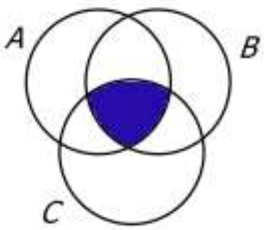
پاسخ:




$A \cap B$




$A \cap C$




$A \cap B \cap C$

۴ . مجموعه های $\{$۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰$\}$ $= A$ و $\{$۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴$\}$ $= B$

و $\{$۱۰ و ۹ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲$\}$ $= C$ را روی نمودار ون نمایش دهید:

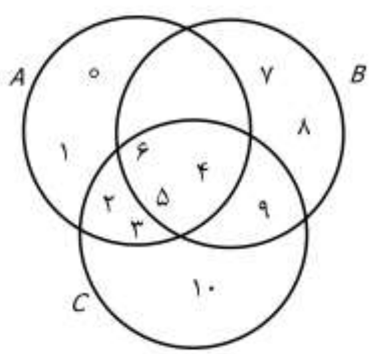
پاسخ: بهتر است ابتدا $A \cap B \cap C$ و $A \cap B$ و $A \cap C$ و $B \cap C$ را مشخص کنیم و سپس با نوشتن عضوهای باقی مانده نمودار را کامل کنیم:

اعداد۴ و ۵ و ۶ به هر سه مجموعه تعلق دارند پس در قسمت $A \cap B \cap C$ این سه عدد را می نویسیم.

بقیه ی عضوهای مشترک $A$ و $C$ اعداد ۲ و ۳ هستند.

بقیه ی عضوهای مشترک $B$ و $C$ عدد ۹ است .

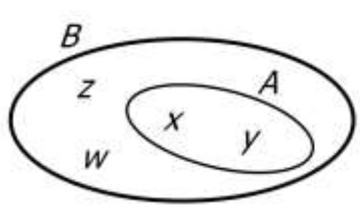
بنابراین داریم:




ایستگاه مطالعه

مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.

$A \cap B =$




پاسخ:

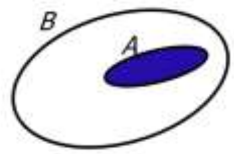
$$A \cap B = \{x \text{ و } y\} = A$$

**نتیجه:** اگر $A$ زیرمجموعه $B$ باشد ( $A \subseteq B$ ) آنگاه اشتراک $A$ و $B$ برابر مجموعه $A$ است؛ چون اعضای $A$ در هر دو مجموعه قرار دارند.

**ایستگاه حل سوال**


۱ . در نمودار ون مقابل $A \cap B$ را هاشور بزنید.

**پاسخ:** چون $A$ زیرمجموعه $B$ است پس:




۲. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$\mathbb{N} \cap \mathbb{W} =$ $\quad$ $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} =$ $\quad$ $\mathbb{Z} \cap \mathbb{W} \cap \mathbb{N} =$ $\quad$ $\mathbb{N} \cap \{۰ \text{ و } -۱ \text{ و } -۲ \text{ و } ...\} =$

**پاسخ:** با توجه به اینکه: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ پس طبق نتیجه بالا:

$\mathbb{N} \cap \mathbb{W} = \mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{Z} \cap \mathbb{W} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{N} \cap \{۰ \text{ و } -۱ \text{ و } -۲ \text{ و } ...\} = \emptyset$

**ایستگاه مطالعه**

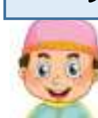
## اجتماع مجموعه ها:

**گفت و گو:** علی جان مجموعه های $A = \{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۲\}$ و $B = \{۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴\}$ را در نظر بگیرید و به سوالات پاسخ بدین:

الف) آیا عدد ۲ حداقل در یکی از مجموعه ها قرار دارد؟

_ آقا اجازه بله آقا چون در دو مجموعه قرار دارد.

ب) آیا عدد ۰ حداقل در یکی از مجموعه ها قرار دارد؟



_ آقا اجازه بله چون در مجموعه $A$ قرار دارد.

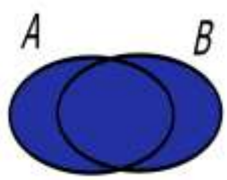
پ) یک مجموعه تشکیل دهید که اعضا آن حداقل در یکی از مجموعه های $A$ و $B$ قرار داشته باشد.

_ آقا اجازه مجموعه $\{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴\}$ اعضایی که داره حداقل در یکی از دو مجموعه عضو هستند.

آفرین علی جان حالا به توضیحات زیر دقت کنید:

اجتماع دو مجموعه $A$ و $B$ : اجتماع در لغت به معنای **در یک جا جمع شدن** است، در مجموعه ها نیز اگر اعضای مجموعه های $A$ و $B$ را درون یک مجموعه بنویسیم ( اعضای تکراری یک بار نوشته شوند) به آن مجموعه اجتماع $A$ و $B$ میگوییم. به بیان دیگر مجموعه ای شامل همه عضو هایی که **حداقل** در یکی از مجموعه های $A$ یا $B$ باشند، را اجتماع دو مجموعه $A$ و $B$ می نامیم و آن را با نماد $A \cup B$ نشان میدهیم.

نمایش به زبان ریاضی : $A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا $x \in B\}$ نمایش با استفاده از نمودار ون:



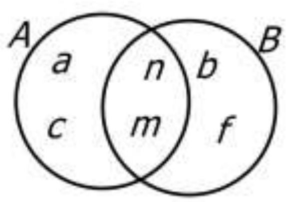

$A \cup B$

**مثال ۱:** دو مجموعه $D = \{۱ و ۲ و ۳\}$ و $C = \{۲ و ۳ و ۴\}$ را در نظر بگیرید. اجتماع این دو مجموعه را با نمایش اعضا مشخص کنید.

**پاسخ:** دقت شود برای تعیین اجتماع اعضای مشترک دو مجموعه (تکراری) را یکبار مینویسیم.

$$C \cup D = \{۲ و ۳ و ۴\} \cap \{۱ و ۲ و ۳\} = \{۱ و ۲ و ۳ و ۴\}$$

**مثال ۲:** با توجه به نمودار ون مقابل اعضای مجموعه زیر را تعیین کنید.




$$A \cup B = ?$$

**پاسخ:** $A \cup B = \{a و b و c و f و m و n\}$

**نکته ۱:** واضح است اجتماع مجموعه A با خودش برابر همان مجموعه A است. $A \cup A = A$

**نکته ۲:** اجتماع مجموعه دلخواه A با مجموعه تهی، مجموعه A میباشد چون تهی هیچ عضوی ندارد که به اجتماع اضافه کند، و اعضای اجتماع همان اعضای مجموعه A هستند. $A \cup \emptyset = A$

**نکته ۳:** برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم : $B \subseteq (A \cup B)$ و $A \subseteq (A \cup B)$

چون هر عضو مجموعه $A$ و $B$ ، در اجتماعشان قرار دارد.

**مثال:** $A = \{۰ و ۱\}$ و $B = \{۱ و ۲\}$ را در نظر بگیرید.

$$A \cup B = \{۰ و ۱ و ۲\}$$

در نتیجه: $\underbrace{\{۱ و ۲\}}_{B} \subseteq \underbrace{\{۰ و ۱ و ۲\}}_{A \cup B}$ و $\underbrace{\{۰ و ۱\}}_{A} \subseteq \underbrace{\{۰ و ۱ و ۲\}}_{A \cup B}$

ایستگاه حل سوال

۱. مجموعه های $A = \left\{a^{۲} + ۱ \mid a \in \mathbb{N} \text{ و } ۲ \le a \le ۴\right\}$ و $B = \left\{۲b \mid b = ۴ \text{ و } ۵\right\}$ را در نظر بگیرید:

الف) اعضای $A$ و $B$ را تعیین کنید.

ب) مجموعه $A \cup B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

پاسخ: الف) در صورت نیاز برای تعیین اعضا از جدول استفاده کنید.

$$A = \left\{۵ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۱۷\right\} \qquad \text{و} \qquad B = \left\{۸ \text{ و } ۱۰\right\}$$

ب) $A \cap B = \left\{۵ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۱۷\right\} \cup \left\{۸ \text{ و } ۱۰\right\} = \left\{۵ \text{ و } ۱۰ \text{ و } ۱۷ \text{ و } ۸\right\}$

۲. اگر مجموعه $A$، اعداد اول زوج و مجموعه $B$، اعداد طبیعی فرد یک رقمی و مجموعه $C$، $\left\{۴ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱\right\}$باشد؛

تساوی های زیر را کامل کنید:

$B \cup C =$ $\qquad\qquad$ $n(B \cup C) =$

$n(A \cup B) =$ $\qquad\qquad$ $n(A \cup B \cup C) =$

پاسخ: ابتدا اعضای مجموعه ها را مشخص میکنیم:

$$A = \{۲\} \quad \text{و} \quad C = \left\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴\right\} \quad \text{و} \quad B = \left\{۱ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\right\}$$

$n(B \cup C)$ یعنی تعداد عضوهای اجتماع B و C، پس دقت کنید که بصورت مجموعه پاسخ ندهید.

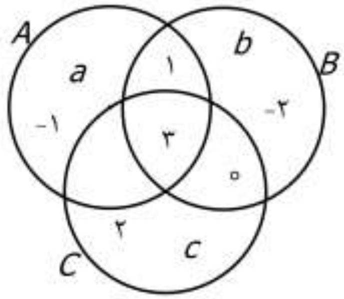
$B \cup C = \left\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\right\}$ $\qquad$ $n(B \cup C) = n\left(\left\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\right\}\right) = ۷$

$n(A \cup B) = n(\left\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\right\}) = ۶$

$n(A \cup B \cup C) = n\left(\left\{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\right\}\right) = ۷$

در این سوال به صورت کامل پاسخ نوشته شده است. در امتحان پاسخ به صورت $n(A \cup B) = ۶$ نوشته شود ، کفایت می کند.

۳ . با توجه به نمودار ون اعضای مجموعه های زیر را تعیین کنید.

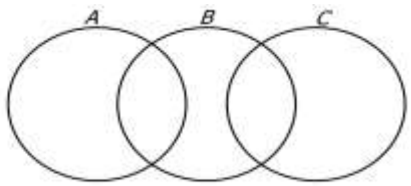



$B \cup C =$ $\qquad$ $A \cup B =$

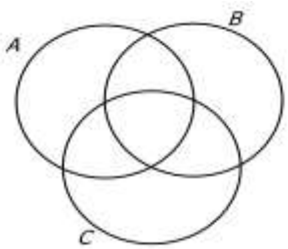
پاسخ:

$B \cup C = \{b$ و $c$ و ۲- و ۰ و ۱ و ۲ و ۳$\}$ $\qquad$ $A \cup B = \{a$ و $b$ و ۱- و ۲- و ۰ و ۱ و ۳$\}$

۴. مجموعه خواسته شده را در هر نمودار هاشور بزنید:

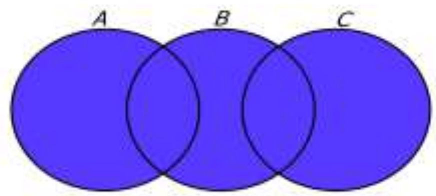



$A \cup B \cup C$

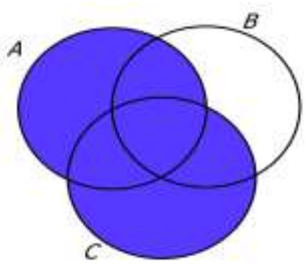



$A \cup C$

پاسخ:




$A \cup B \cup C$




$A \cup C$

**ایستگاه مطالعه**

مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.

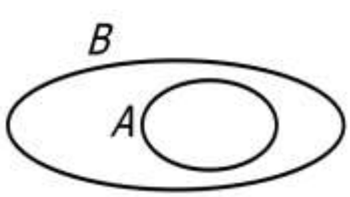
$A \cup B =$

پاسخ:

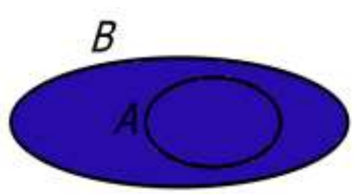
$A \cup B = \{w$ و $x$ و $y$ و $z\} = B$

**نتیجه: اگر $A$ زیرمجموعه $B$ باشد ( $A \subseteq B$ ) آنگاه اجتماع $A$ و $B$ برابر مجموعه $B$ است.**

۱ . در نمودار ون مقابل $A \cup B$ را هاشور بزنید.




پاسخ: چون $A$ زیرمجموعه $B$ است پس:



۲. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$\mathbb{N}\cup\mathbb{W}=$ $\qquad$ $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=$ $\qquad$ $\mathbb{Z}\cup\mathbb{W}\cup\mathbb{N}=$ $\qquad$ $\mathbb{N}\cup\{$۰ و ۱− و ۲− و ...$\}=$

پاسخ: با توجه به اینکه: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ پس طبق نتیجه بالا:

$\mathbb{N}\cup\mathbb{W}=\mathbb{W}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}\cup\mathbb{W}\cup\mathbb{N}=\mathbb{Z}$

$\mathbb{N}\cup\{$۰ و ۱− و ۲− و ...$\}=\{$... و ۲− و ۱− و ۰ و ۱ و ۲ و ...$\}=\mathbb{Z}$

**ایستگاه مطالعه**

## تفاضل مجموعه ها:

گفت و گو: علی جان مجموعه های $A=\{$۰ و ۱ و ۲$\}$ و $B=\{$۲ و ۳$\}$ را در نظر بگیرید و به سوالت پاسخ بدین:

الف) مجموعه ای تشکیل دهید از اعدادی که در مجموعه $A$ هستند ولی در مجموعه $B$ نیستند؟

_ آقا اجازه ۲ هم در $A$ و هم در $B$ است، پس ۲ رو از اعضای $A$ حذف میکنیم و جواب میشه: $\{$۰ و ۱$\}$

ب) مجموعه ای تشکیل دهید از اعدادی که در $B$ هستند ولی در $A$ نیستند؟

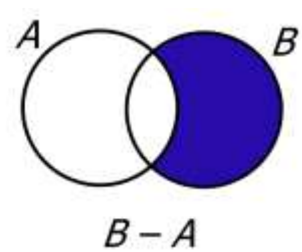
_ آقا اجازه همون طور که گفتیم عدد ۲ در هر دو مجموعه قرار داره پس اونو از اعضای $B$ حذف میکنیم،
پس مجموعه مد نظر میشه: $\{$۳$\}$

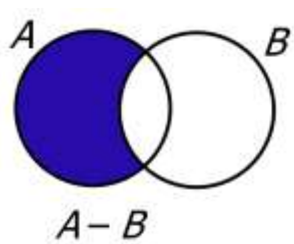
آفرین علی جان حالا به توضیحات زیر دقت کنید:

**تعریف تفاضل دو مجموعه:** $A-B$ ($A$ منهای $B$) مجموعه ای است شامل همه ی عضوهایی است که عضو مجموعه ی $A$ هستند ولی عضو مجموعه $B$ نیستند. بصورت مشابه؛ $B-A$ ($B$ منهای $A$) شامل همه ی عضوایی است که عضو مجموعه $B$ هستند ولی عضو مجموعه $A$ نیستند.

به زبان ریاضی: $B-A=\{x \mid x\in B$ و $x\notin A\}$ و $A-B=\{x \mid x\in A$ و $x\notin B\}$

به نمودار ون زیر توجه کنید:



مثال ۱: دو مجموعه $D=\{۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱\}$ و $C=\{۴ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲\}$ را در نظر بگیرید. اعضای هر کدام از مجموعه های زیر را تعیین کنید.

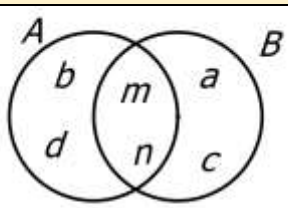
پاسخ: دقت شود برای تعیین اجتماع اعضای مشترک دو مجموعه (تکراری) را یکبار مینویسیم.

$$C-D=\{\cancel{۲} \text{ و } \cancel{۳} \text{ و } ۴\}-\{۱ \text{ و } \cancel{۲} \text{ و } \cancel{۳}\}=\{۴\}$$

$$D-C=\{۱ \text{ و } \cancel{۲} \text{ و } \cancel{۳}\}-\{\cancel{۲} \text{ و } \cancel{۳} \text{ و } ۴\}=\{۱\}$$

**نتیجه مهم:** یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان در این بخش این است که تصور میکنند $A-B=B-A$ ؛ درحالت کلی اگر $A\neq B$ آنگاه $A-B\neq B-A$.

**مثال ۲:** با توجه به نمودار ون مقابل اعضای مجموعه های زیر را تعیین کنید.




$B-A=?$ $\qquad$ $A-B=?$

پاسخ: $A-B=\{a \text{ و } c\}$ و $A-B=\{b \text{ و } d\}$

**نکته ۱:** برای مجموعه دلخواه A و تهی ($\emptyset$) روابط مقابل را میتوان بیان کرد: $A-\emptyset=A$ و $A-A=\emptyset$

**نکته ۲:** برای هر دو مجموعه دلخواه A و B داریم :

$(B-A)\subseteq B$ و $(A-B)\subseteq A$

**مثال:** $A=\{۰ \text{ و } ۱\}$ و $B=\{۱ \text{ و } ۲\}$ را در نظر بگیرید. $A-B=\{۰\}$ همانطور که ملاحظه کردید $A-B\subseteq A$ برای درستی رابطه ی $B-A\subseteq B$ مثالی بیان کنید.

**نکته ۳:** در صورتی که $A$ و $B$ دو مجموعه جدا از هم باشند می توان گفت: $(B-A)=B$ و $(A-B)=A$

**مثال:** $A=\{۰ \text{ و } ۱\}$ و $B=\{-۱ \text{ و } ۲\}$ را در نظر بگیرید.

$$A-B=\{۰ \text{ و } ۱\}-\{-۱ \text{ و } ۲\}=\{۰ \text{ و } ۱\}=A$$

$$B-A=\{-۱ \text{ و } ۲\}-\{۰ \text{ و } ۱\}=\{-۱ \text{ و } ۲\}=B$$

ایستگاه حل سوال

۱. مجموعه های $A = \{a^{۲} + ۱ \mid a \in \mathbb{N} \text{ و } -۳ < a \le ۳\}$ و $B = \{b + ۱ \mid b = ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵\}$ را در نظر بگیرید:

الف) اعضای $A$ و $B$ را تعیین کنید.

ب) مجموعه $A - B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

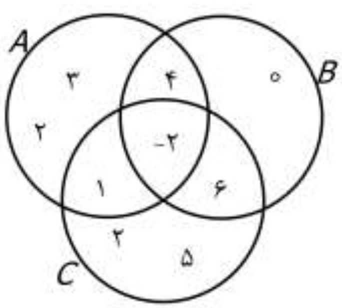
پ) $n(B - A) = ?$

پاسخ: الف) در صورت نیاز برای تعیین اعضا از جدول استفاده کنید. در مجموعه $A$ اعداد ۲- و ۱- و ۰ در محدوده قرار نمیگیرند چون عدد طبیعی نیستند.

$$A = \{۲ \text{ و } ۵ \text{ و } ۱۰\} \qquad \text{و} \qquad B = \{۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۶\}$$

ب) $A - B = \{۲ \text{ و } \cancel{۵} \text{ و } ۱۰\} - \{۴ \text{ و } \cancel{۵} \text{ و } ۶\} = \{۲ \text{ و } ۱۰\}$

ج) $n(B - A) = ۲$

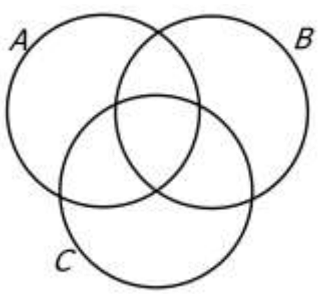




۲. با توجه به نمودار ون اعضای مجموعه های مقابل را تعیین کنید.

$B - C =$ $\qquad$ $A - B =$

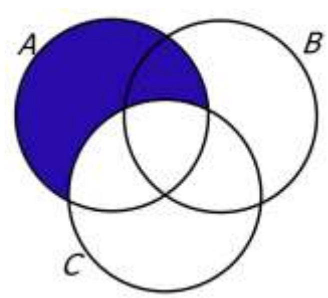
پاسخ: $B - C = \{۰ \text{ و } ۴\}$ و $A - B = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳\}$



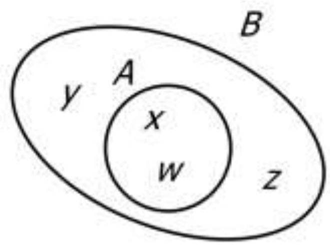


۳. در نمودار ون مقابل مجموعه ی $A - C$ را در نمودار هاشور بزنید:

پاسخ :



ایستگاه مطالعه




مثال: با توجه به نمودار ون تساوی زیر را کامل کنید.

$$A - B =$$

پاسخ:

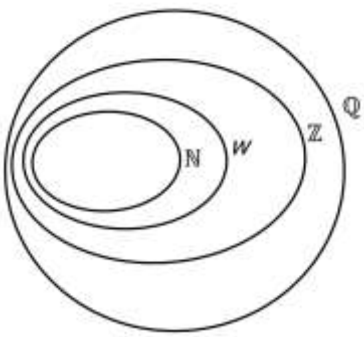
$$A - B = \{\cancel{w} \text{ و } \cancel{x}\} - \{\cancel{w} \text{ و } \cancel{x} \text{ و } y \text{ و } z\} = \emptyset$$

نتیجه: اگر $A$ زیرمجموعه $B$ باشد ( $A \subseteq B$ ) آنگاه $A$ منهای $B$ برابر مجموعه تهی است.

ایستگاه حل سوال

۱. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$\mathbb{N} - \mathbb{W} =$ $\qquad$ $\mathbb{Z} - \mathbb{Q} =$




پاسخ: طبق نمودار ون مقابل داریم : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

پس طبق نتیجه بالا:

$\mathbb{N} - \mathbb{W} = \emptyset$ $\qquad$ $\mathbb{Z} - \mathbb{Q} = \emptyset$

۲ . آیا تساوی های زیر درست هستند؟ چرا؟

الف) $\mathbb{W} - \mathbb{N} = ۰$

ب) $\mathbb{N} - \{-۱ \text{ و } -۲ \text{ و } ...\} = \emptyset$

پاسخ:

الف) نادرست_ نماد آکولاد برای عدد صفر قرار داده نشده. در نتیجه صورت درست آن: $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{۰\}$

ب) نادرست مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد $\{-۱ \text{ و } -۲ \text{ و } ...\}$ دو مجموعه جدا از هم هستند. در نتیجه صورت درست آن: $\mathbb{N} - \{-۱ \text{ و } -۲ \text{ و } ...\} = \mathbb{N}$

@riazicafe

## سوالات ترکیبی بخش سوم:

۱. با توجه به مجموعه های $A$ و $B$ و $C$ اعضای هر قسمت را تعیین کنید.

$A = \{۱ و ۲ و ... و ۶\}$ و $B = \{۰ و ۲ و ۴ و ۶\}$ و $C = \{۰ و ۱\}$

الف) $(A \cup C) - B = ?$

ب) $(A - B) \cup (B - A) = ?$

ج) $(A \cap C) \cup B = ?$

**پاسخ:** برای حل اینگونه سوالات ابتدا تکلیف پرانتز ها را روشن کنید.

الف) $A \cup C = \{۱ و ۲ و ... و ۶\} \cup \{۰ و ۱\} = \{۰ و ۱ و ۲ و ... و ۶\}$ در نتیجه:

$(A \cup C) - B = \{۰ و ۱ و ۲ و ... و ۶\} - \{۰ و ۲ و ۴ و ۶\} = \{۱ و ۳ و ۵\}$

ب) $(A - B) = \{۱ و ۲ و ... و ۶\} - \{۰ و ۲ و ۴ و ۶\} = \{۱ و ۳ و ۵\}$ و

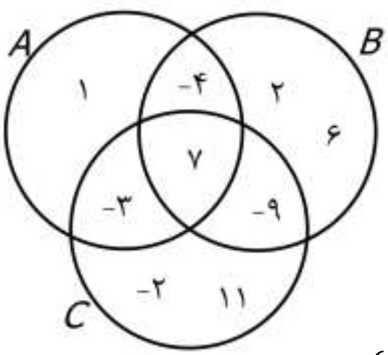
$(B - A) = \{۰ و ۲ و ۴ و ۶\} - \{۱ و ۲ و ... و ۶\} = \{۰\}$ در نتیجه:

$(A - B) \cup (B - A) = \{۱ و ۳ و ۵\} \cup \{۰\} = \{۰ و ۱ و ۳ و ۵\}$

ج) $(A \cap C) = \{۱ و ۲ و ... و ۶\} \cap \{۰ و ۱\} = \{۱\}$ در نتیجه:

$(A \cap C) \cup B = \{۱\} \cup \{۰ و ۲ و ۴ و ۶\} = \{۱ و ۰ و ۲ و ۴ و ۶\}$

۲. با توجه به نمودار ون اعضای هر مجموعه را تعیین کنید.




$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = ?$ $\qquad A \cup (B - C) = ?$

**پاسخ:** ابتدا تکلیف پرانتز ها را روشن می کنیم:

$B \cap C = \{۷ و -۹\}$ $\quad A \cap C = \{-۳ و ۷\}$ $\quad A \cap B = \{-۴ و ۷\}$ $\quad B - C = \{-۴ و ۲ و ۶\}$

بنابراین:

$A \cup (B - C) = \{۱ و -۴ و ۷ و -۳ و ۲ و ۶\}$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = \{-۳ و -۴ و ۷ و -۹\}$

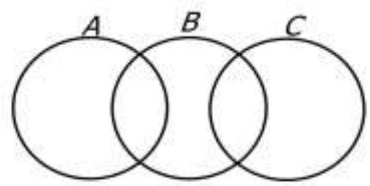
۳. با استفاده از دانسته های قبلی تساوی های زیر را کامل کنید.

$(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{N} \cup \mathbb{W}) = ?$ $\qquad$ $(\mathbb{N} - \mathbb{W}) \cup \mathbb{Z} = ?$

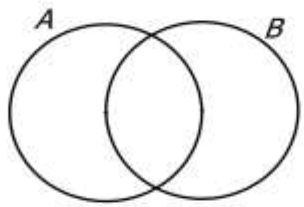
پاسخ:

$(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{N} \cup \mathbb{W}) = \mathbb{Q} \cap \mathbb{W} = \mathbb{W}$ $\qquad$ $(\mathbb{N} - \mathbb{W}) \cup \mathbb{Z} = \emptyset \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

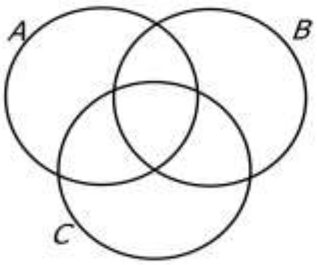
۴. مجموعه های داده شده را روی نمودار ون هاشور بزنید.




$(A \cap C) \cup B$

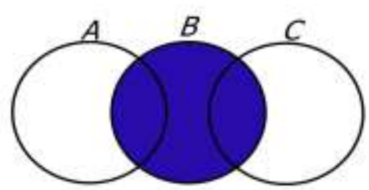



$(A - B) \cup (B - A)$

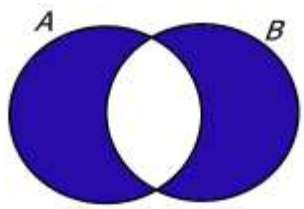



$A \cup (B - C)$

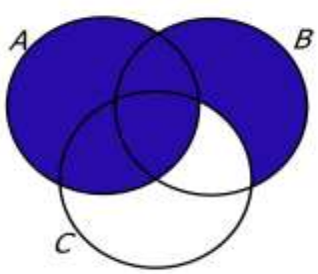
پاسخ:




$(A \cap C) \cup B$



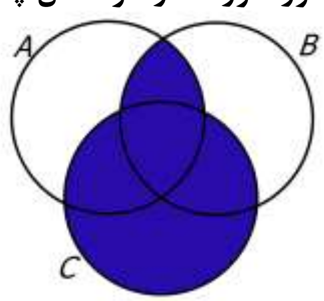

$(A - B) \cup (B - A)$



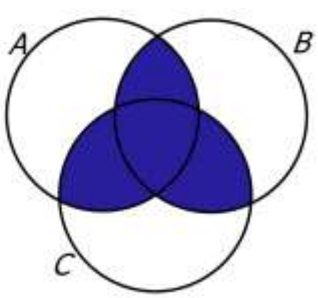

$A \cup (B - C)$

**دقت کنید چون دو مجموعه A و C مجزا هستند پس $A \cap C = \emptyset$ و $B \cup (A \cap C) = B \cup \emptyset = B$**

۵ . قسمت هاشور خورده در هر شکل چه مجموعه ای را مشخص میکند.



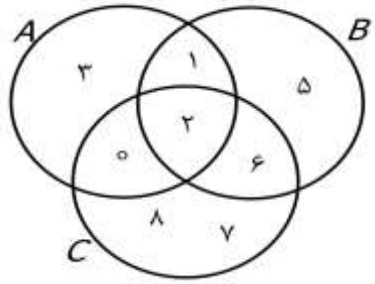

(ب)




(الف)

پاسخ: (ب) : $C \cup (A \cap B)$

(الف) : $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$




**۶. با توجه به نمودار مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید.**

**الف) مجموعه ی $(A-B)\cap(C-B)$ را با اعضاء مشخص کنید.**

**ب) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.**

۱) $۷ \in (A-C)$ ...        ۲) {۲ و ۶} $\subseteq (B\cap C)$ ...        ۳) $۳ \in (B\cup C)$ ...

**پاسخ:**

**الف)** $(A-B)\cap(C-B) =$ {۳ و ۰} $\cap$ {۰ و ۸ و ۷} $=$ {۰}

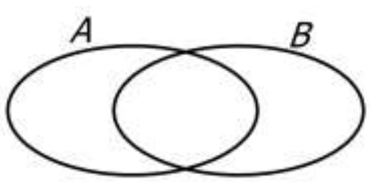
**ب)**

۱) $A-C =$ {۳ و ۱}  بنابراین رابطه **نادرست** است چون ۷ به این مجموعه تعلق ندارد.

۲) $B\cap C =$ {۲ و ۶}  و هر مجموعه ای زیرمجموعه ی خودش است پس رابطه **درست** است.

۳) $B\cup C =$ {۱ و ۲ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۰}  و عدد ۳ به این مجموعه تعلق ندارد پس عبارت **نادرست** است.

**۷. نمودار ون مقابل را با اطلاعات داده شده کامل کنید.**

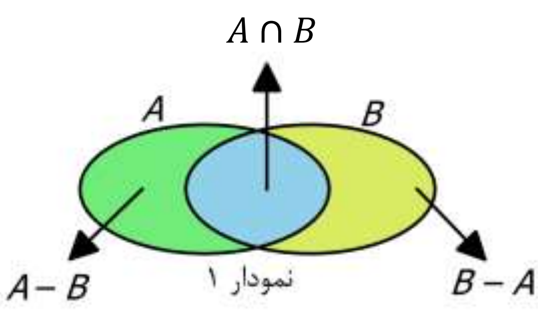


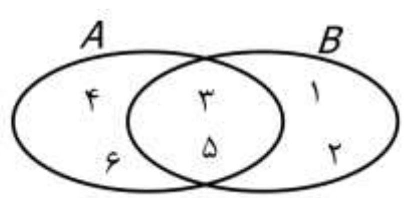

$B-A =$ {۱ و ۲} و $A-B =$ {۴ و ۶} و $A\cap B =$ {۳ و ۵}

**پاسخ:**

**دقت کنید در نمودار شماره ۱ مجموعه های سوال مشخص شده اند.**

**بنابراین پاسخ طبق نمودار شماره ۲ است.**




نمودار ۲

**برای درک بهتر مطالب کار در کلاس صفحه ۱۳ و تمرین صفحه ۱۴ را حل کنید.**

ایستگاه مطالعه

## درس چهارم: مجموعه ها و احتمال

**احتمال:** برای نشان دادن احتمال روی دادن یک اتفاق( پیشامد) ، از یک نسبت( کسر) استفاده میکنیم. این نسبت به صورت مقابل است: $\frac{\text{تعداد حالت های مورد نظر}}{\text{تعداد تمام حالت های ممکن}}$ = احتمال روی دادن اتفاق **(رابطه ۱)**

برای بدست آوردن احتمال رخ دادن یک اتفاق مانند A ، میتوان همه ی حالت های ممکن را در یک مجموعه به نام S ( که به آن فضای نمونه ای گفته می شود ) بنویسیم و همه ی حالت های مورد نظر در یک مجموعه ( مثلا با نام A) بنویسیم، آن گاه احتمال روی دادن اتفاق A را که با P(A) نشان میدهیم به صورت زیر نمایش میدهیم که معادل رابطه ی ۱ می باشد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

احتمال روی دادن اتفاق A ← $P(A)$

$n(A)$ → عدد اصلی مجموعه A ( تعداد حالت های روی دادن A )

$n(S)$ → عدد اصلی مجموعه S ( تعداد کل حالت های ممکن )

**مثال ۱:** مجموعه حالت های ممکن ( S ) را برای هر یک از قسمت های زیر تشکیل دهید. و n(S) را تعیین کنید.

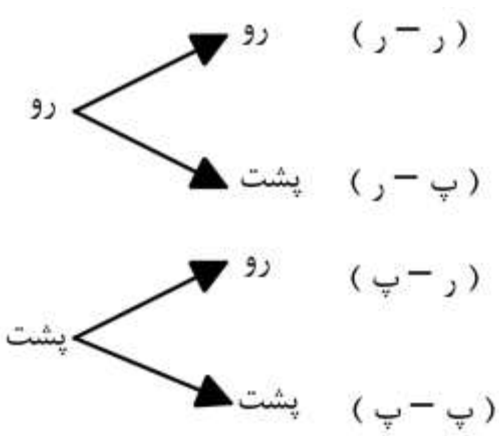
الف) پرتاب دو سکه          ب) پرتاب یک تاس

پ) پرتاب دو تاس          ت) پرتاب یک سکه و یک تاس

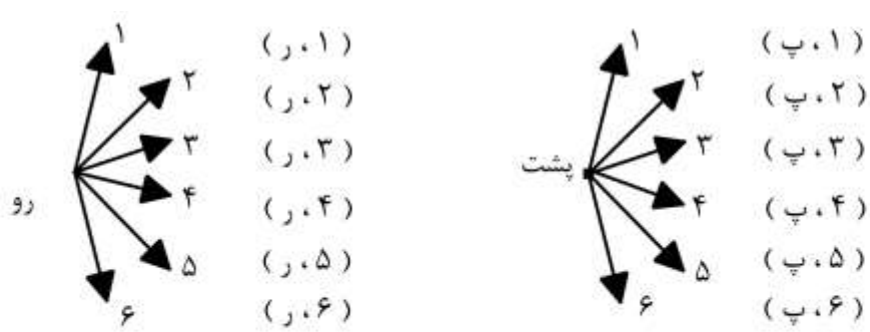
**پاسخ:** در پایه هشتم آموختید برای تعیین تعداد کل حالات میتوان از نمودار درختی یا جدول استفاده کرد؛ مثلاً:

| تاس۱ / تاس۲ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱ | (۱,۱) | (۱,۲) | (۱,۳) | (۱,۴) | (۱,۵) | (۱,۶) |
| ۲ | (۲,۱) | (۲,۲) | (۲,۳) | (۲,۴) | (۲,۵) | (۲,۶) |
| ۳ | (۳,۱) | (۳,۲) | (۳,۳) | (۳,۴) | (۳,۵) | (۳,۶) |
| ۴ | (۴,۱) | (۴,۲) | (۴,۳) | (۴,۴) | (۴,۵) | (۴,۶) |
| ۵ | (۵,۱) | (۵,۲) | (۵,۳) | (۵,۴) | (۵,۵) | (۵,۶) |
| ۶ | (۶,۱) | (۶,۲) | (۶,۳) | (۶,۴) | (۶,۵) | (۶,۶) |

جدول حالت های ممکن پرتاب دو تاس



نمودار درختی پرتاب دو سکه



نمودار درختی پرتاب یک سکه و یک تاس

الف) $S = \{$(پ ، پ) و (ر ،پ) و (پ ، ر) و (ر ، ر)$\}$ در نتیجه: $n(S) = ۴$

ب) $S = \{$۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱$\}$ در نتیجه: $n(S) = ۶$

پ) $n(S) = ۳۶$

ت) $S = \{$(۶ ، پ) و ... و (۲ ، پ) و (۱ ،پ) و (۶ ، ر) و ... و (۲ ، ر) و (۱ ،ر)$\}$ در نتیجه: $n(S) = ۱۲$

**نتیجه ۱:** تعداد کل حالت‌ها: الف) اگر n سکه را پرتاب کنیم: $n(S) = ۲^n$ ؛ ب) اگر $m$ تاس را پرتاب کنیم؛ $n(S) = ۶^m$ ، ج) اگر $n$سکه و $m$ تاس را با هم پرتاب کنیم: $n(S) = ۲^n \times ۶^m$ میباشد.

**مثال ۲:** اگر سه سکه و یک تاس را پرتاب کنیم، تعداد حالت های ممکن را تعیین کنید.

پاسخ : $n(S) = ۲^۳ \times ۶^۱ = ۸ \times ۶ = ۴۸$

**مثال ۳:** اگر تاسی را بیندازیم چقدر احتمال دارد؟

الف) عدد رو شده مضرب ۲ باشد. ب) عدد روشده بزرگتر از ۶ باشد.

پ) عدد رو شده از ۷ کوچکتر باشد. ت) عدد روشده شمارنده ۴ باشد.

پاسخ: ابتدا مجموعه کل حالت های ممکن را تشکیل میدهیم؛

$S = \{$۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱$\}$ در نتیجه: $n(S) = ۶$

الف) مضارب ۲ که روی تاس هستند عبارت اند از : ۲ و ۴ و ۶ در نتیجه این پیشامد را با مجموعه A مشخص میکنیم:

$A = \{$۶ و ۴ و ۲$\}$ پس: $n(A) = ۳$ در نتیجه : $P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ب) هیچ عددی روی تاس از ۶ بزرگتر نیست در نتیجه: $B = \emptyset \to n(B) = ۰$ پس $P(B) = \frac{۰}{۶} = ۰$

پ) همه ی اعداد روی تاس از ۷ کوچکترهستند در نتیجه:

$C = \{$۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱$\} \to n(C) = ۶ \to P(C) = \frac{۶}{۶} = ۱$

ت) $D = \{$۴ و ۲ و ۱$\} \to n(D) = ۳ \to P(D) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

**نکته:** به هر زیر مجموعه از فضای نمونه یک پیشامد می گوییم. به طور مثال در پرتاب یک سکه فضای نمونه ای برابر است با $S = \{$پشت , رو$\}$ این مجموعه دو عضو و بنابراین $۲^۲ = ۴$ زیرمجموعه دارد پس تعداد پیشامدهایی که برای پرتاب یک سکه می توان تعریف کرد چهار پیشامد است.

**آقا علی:** آقا اجازه ، یعنی چهار مجموعه ی $S$ و $\{$پشت$\}$ و $\{$رو$\}$ و $\emptyset$ همه پیشامدهای پرتاب یک سکه هستند؟

بله علی جان کاملا درسته و در حالتی که تعداد اعضای پیشامد ها برابر باشد به آن ها پیشامد هم شانس می گوییم و در این مثال دو پیشامد هم شانس وجود دارد چون دو زیرمجموعه ی یک عضوی دارد.

نتیجه: اگر $A=\emptyset$ در نتیجه $n(A)=۰$ پس $P(A)=۰$ و اصطلاحاً به مجموعه $A$ در این حالت پیشامد غیرممکن گوئیم. و اگر $A=S$ باشد در نتیجه $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ پس$P(A)=۱$ . اصطلاحاً به مجموعه $A$ در این حالت پیشامد حتمی گوئیم.

نتیجه: $۰\le P(A)\le ۱$

ایستگاه سوالات

۱ . در جعبه‌ای ۴ مهره قرمز، ۳ مهره آبی و ۷ مهره سبز وجود دارد، اگر یک مهره را به تصادف از این جعبه خارج کنیم چه قدر احتمال دارد که:

الف) این مهره آبی باشد؟ ب) این مهره قرمز یا سبز باشد؟ پ)این مهره سبز نباشد؟

پاسخ: در این سوال تعداد کل حالات ، تعداد مهره های در جعبه است یعنی:

$$n(S)=۴+۳+۷=۱۴$$

الف) $A=\{$آبی$_۳$ و آبی$_۲$ و آبی$_۱\}$ پس: $n(A)=۳\ \rightarrow P(A)=\frac{۳}{۱۴}$

ب) $B=\{$قرمز$_۴$ و قرمز$_۳$ و قرمز$_۲$ و قرمز$_۱$ و سبز$_۷$ و سبز$_۶$ و سبز$_۵$ و سبز$_۴$ و سبز$_۳$ و سبز$_۲$ و سبز$_۱\}$

$$n(B)=۷+۴=۱۱\rightarrow P(B)=\frac{۱۱}{۱۴}$$

پ) این مهره سبز نباشد معادل اینست که مهره آبی یا قرمز باشد در نتیجه:

$C=\{$قرمز$_۴$ و قرمز$_۳$ و قرمز$_۲$ و قرمز$_۱$ و آبی$_۳$ و آبی$_۲$ و آبی$_۱\}$ پس: $n(B)=۳+۴=۷\rightarrow P(B)=\frac{۷}{۱۴}=\frac{۱}{۲}$

۲ . در ظرفی ۱۵ کارت با شماره های ۱ و ۲ و ... و ۱۵ قرار دارد. یک کارت را بطور تصادفی از ظرف خارج میکنیم.

الف) مجموعه کل حالت های ممکن را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد که عدد روی کارت خارج شده عدد اول فرد باشد.

پ) چقدر احتمال دارد که عدد کارت خارج شده بین ۵ و ۱۰ باشد.

پاسخ:

الف) $S=\{۱$ و $۲$ و $۳$ و ... و $۱۵\}\rightarrow n(S)=۱۵$

ب) $A=\{۳$ و $۵$ و $۷$ و $۱۱$ و $۱۳\}\rightarrow n(A)=۵\ \rightarrow P(A)=\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱}{۳}$

پ) $B=\{۶$ و $۷$ و $۸$ و $۹\}\rightarrow n(B)=۴\ \rightarrow P(A)=\frac{۴}{۱۵}$

**۳ . اگر تاسی را ۲ بار بیندازیم:**

**الف) تعداد حالت‌های ممکن را تعیین کنید.**

**ب) چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد رو شده دقیقا ۵ باشد.**

**پ) چقدر احتمال دارد دو عدد رو شده مثل هم باشند.**

**ت) چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد رو شده حداقل ۱۰ شود.**

**پاسخ:**

**الف) خواندیم که تعداد حالت های پرتاب تاس از رابطه $۶^n$ بدست می آید در نتیجه:**

$$\left(\text{تعداد پرتاب}\right) n = ۲ \rightarrow n(S) = ۶^۲ = ۳۶$$

**ب) مجموعه از حالت های تشکیل میدهیم که مجموع دو عدد روی تاس ها برابر ۵ باشد؛**

$$A = \{(۱،۴) \text{ و } (۴،۱) \text{ و } (۲،۳) \text{ و } (۳،۲)\} \text{ در نتیجه: } n(A) = ۴ \rightarrow P(A) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

**پ)** $B = \{(۱،۱) \text{ و } (۲،۲) \text{ و } (۳،۳) \text{ و } (۴،۴) \text{ و } (۵،۵) \text{ و } (۶،۶)\}$ در نتیجه:

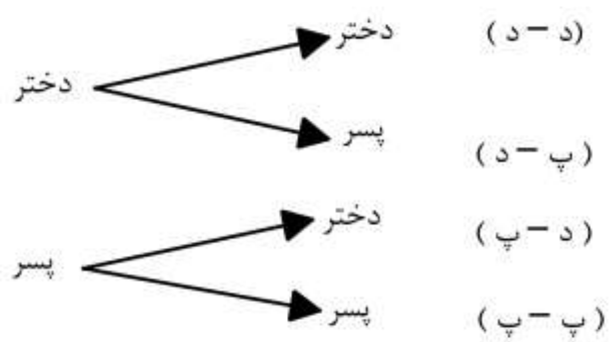
$$n(B) = ۶ \rightarrow P(B) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

**ت) با توجه به اعداد روی تاس؛ حداقل ۱۰ یعنی مجموع دو عدد ۱۰ یا ۱۱ یا ۱۲ باشد. پس:**

$$B = \{(۴،۶) \text{ و } (۶،۴) \text{ و } (۵،۵) \text{ و } (۵،۶) \text{ و } (۶،۵) \text{ و } (۶،۶)\} \text{ در نتیجه: } n(A) = ۶ \rightarrow P(A) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

**۴ . اگر خانواده‌ای دارای ۲ فرزند باشد، ابتدا مجموعه S را تعیین کنید سپس چقدر احتمال دارد این خانواده دقیقاً دارای دو پسر باشد؟**

**پاسخ: اینگونه مسائل مشابه مسائل پرتاب سکه است، با این تفاوت که در پرتاب سکه حالت های ممکن بر اساس رو و پشت تعیین میشود، در حالی که اینجا حالت های ممکن بر اساس پسر( با مخفف پ) و دختر( با مخفف د) تعیین میشود. در نتیجه برای n فرزند؛ $۲^n$ حالت ممکن وجود دارد.**




نمودار درختی حالات دو فرزند

**در نتیجه:** $S = \{(\text{پ،پ}) \text{ و } (\text{د،پ}) \text{ و } (\text{پ،د}) \text{ و } (\text{د،د})\}$ پس: $n(S) = ۴$

**خانواده دقیقا دو پسر داشته باشد:** $A = \{(\text{پ،پ})\}$ در نتیجه: $n(A) = ۱ \rightarrow P(A) = \frac{۱}{۴}$

۵. یک سکه و یک تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم:

الف) تعداد حالت‌های ممکن را تعیین کنید................

ب) احتمال اینکه سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید چقدر است؟

پ) احتمال اینکه سکه پشت یا تاس عددی زوج بیاید چقدر است؟

پاسخ: در مثال ۱ حالت های ممکن برای پرتاب یک سکه و یک تاس بیان شده است.

الف) $n(S) = ۲ \times ۶ = ۱۲$

ب) $A = \{$(۶،پ) و (۴،پ) و (۲،پ)$\}$ پس: $n(A) = ۳ \rightarrow P(A) = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$

پ) $B = \{$(۶،ر) و (۴،ر) و (۲،ر) و (۶،پ) و (۵،پ) و (۴،پ) و (۳،پ) و (۲،پ) و (۱،پ)$\}$ پس:

$n(B) = ۹ \rightarrow P(B) = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$

دقت کنیم که در مثال قسمت پ با توجه به این که در صورت سوال بین دو عبارت کلمه ی " یا " قرار گرفته است باید اجتماع حالتهایی که سکه پشت آمده و حالتهایی که تاس زوج آمده است را به عنوان مجموعه ی مطلوب درنظر گرفت.

سکه پشت بیاید: $\{$(۶،پ) و (۵،پ) و (۴،پ) و (۳،پ) و (۲،پ) و (۱،پ)$\}$

تاس زوج بیاید: $\{$(۶،ر) و (۴،ر) و (۲،ر) و (۶،پ) و (۴،پ) و (۲،پ)$\}$

اجتماع دو مجموعه ی بالا مجموعه ی B را به وجود می آورد.

۶ . خانواده‌ای دارای سه فرزند است چقدر احتمال دارد این خانواده:

الف) حداقل ۲ پسر داشته باشد. ب) دقیقاً ۲ دختر داشته باشد. پ) حداکثر ۲ دختر داشته باشد.

پاسخ:

$S = \{$(پ،پ،پ) و (پ،پ،د) و (پ،د،پ) و (د،پ،پ) و (د،د،پ) و (د،پ،د) و (پ،د،د) و (د،د،د)$\}$

الف) حداقل ۲ پسر معادل است با؛ پسر ۲ یا ۳ پسر. پس حالت هایی را در نظر میگیریم که در آنها دو پسر (پ) و سه پسر وجود دارد.

$A = \{$(پ،پ،پ) و (پ،پ،د) و (پ،د،پ) و (د،پ،پ)$\}$ $\rightarrow n(A) = ۴ \rightarrow P(A) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$

ب) دقیقا ۲ دختر یعنی حالت های مد نظر هستند که در آنها فقط دو دختر(د) وجود دارد نه بیشتر و نه کمتر.

$B = \{$(د،د،پ) و (د،پ،د) و (پ،د،د)$\}$ $\rightarrow n(B) = ۳ \rightarrow P(B) = \frac{۳}{۸}$

پ) حداکثر ۲ دختر معادل است با؛ ۲ دختر یا ۱ دختر یا ۰ دختر. پس حالت هایی را در نظر می گیریم که در آنها ۲ دختر( د) یا ۱ دختر یا اصلا دختری وجود ندارد را در نظر میگیریم پس:

$C = \{$(پ،پ،پ) و (پ،پ،د) و (پ،د،پ) و (د،پ،پ) و (د،د،پ) و (د،پ،د) و (پ،د،د)$\}$

$n(C) = ۷ \rightarrow P(C) = \frac{۷}{۸}$

دانش آموزان عزیز برای تسلط و درک مطالب این درس تمرین صفحه ۱۷ را حل کنید.