بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

حسابان (۱)

پایه یازدهم ریاضی و فیزیک

فصل ۴

۱ رادیان

۲ نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

۳ توابع مثلثاتی

۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

تهیه و تنظیم : مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2

Majid.ghaderi.mathclass.2

فصل ۴

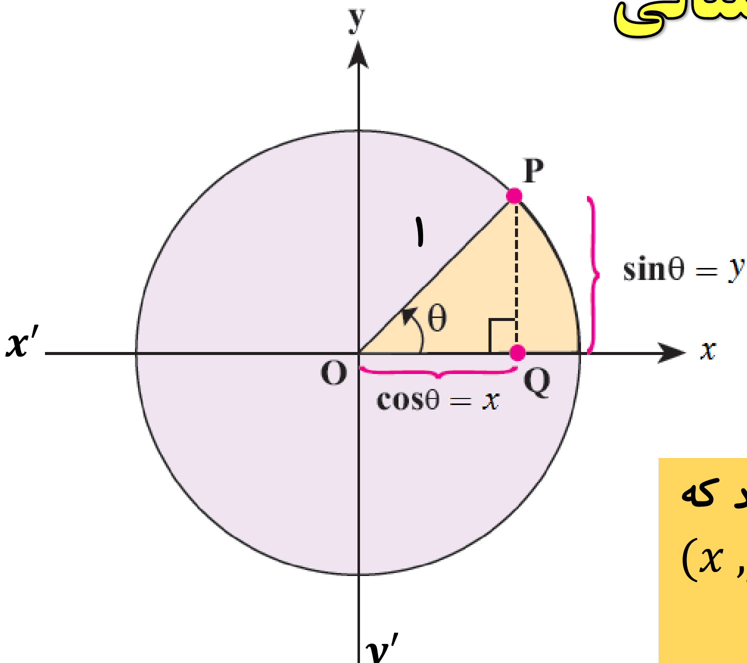
درس ۲

نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

اهداف

- ❑ شناخت نسبت های مثلثاتی دو زاویهٔ قرینه
- ❑ شناخت نسبت های مثلثاتی دو زاویهٔ مکمل
- ❑ شناخت نسبت های مثلثاتی دو زاویهٔ متمم
- ❑ شناخت نسبت های مثلثاتی دو زاویهٔ با اختلاف ۱۸۰ درجه
- ❑ شناخت نسبت های مثلثاتی دو زاویهٔ با اختلاف ۹۰درجه
- ❑ آشنایی با ویژگی های زاویه های هم انتها

یادآوری مختصات نقطه P روی دایره مثلثاتی



با در نظر گرفتن مثلث قائم الزاویه POQ و تعریف نسبتهای مثلثاتی برای زاویه θ به نتایج زیر دست خواهیم یافت.

محور $x'ox$ یا محور xها را محور کسینوس ها و محور $y'oy$ یا محور yها را محور سینوس ها می نامیم.

اگر $P(x\,,y)$ نقطه ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی و θ زاویه ای باشد که نیم خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overline{Ox}$ می سازد، آنگاه P نقطه ای با مختصات $(x\,,y)$ است که در آن $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$.

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{وتر}} = \frac{y}{۱} = y$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاورزاویه } \theta}{\text{وتر}} = \frac{x}{۱} = x$$

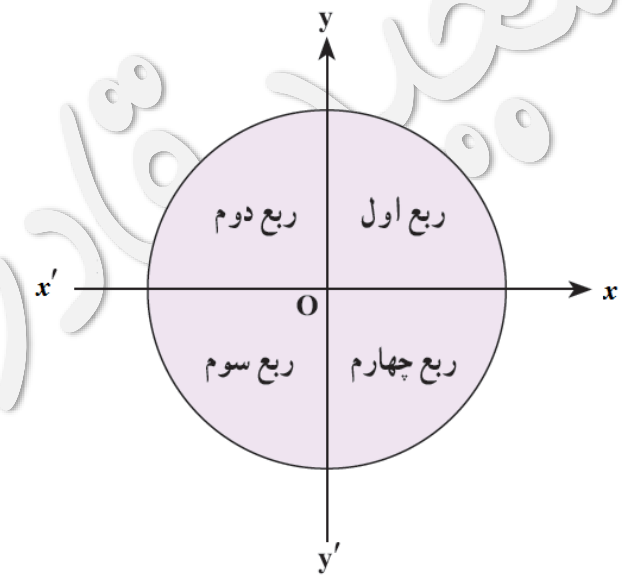
طبق رابطه فیثاغورث داریم : $x^۲ + y^۲ = ۱$

۴ ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی

یادآوری

علامت نسبت های مثلثاتی با توجه به ناحیه ای که در آن قرار دارند، در جدول زیرخلاصه شده است:

نسبت مثلثاتی	ناحیهٔ اول	ناحیهٔ دوم	ناحیهٔ سوم	ناحیهٔ چهارم
	$x > 0$ $y > 0$	$x < 0$ $y > 0$	$x < 0$ $y < 0$	$x > 0$ $y < 0$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−



$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ α در ربع اول است

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow$ α در ربع دوم است

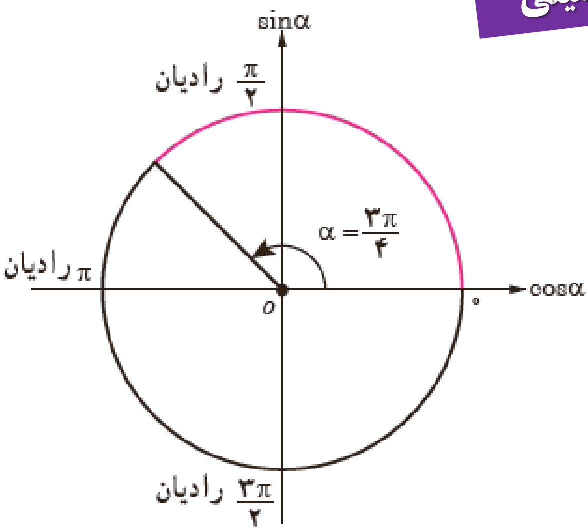
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ α در ربع سوم است

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow$ α در ربع چهارم است

نکته

زاویه های 0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ و 2π رادیان زاویه های مرزی هستند و آنها را در هیچ کدام از ناحیه های فوق در نظر نمی گیریم.

تمرین تکمیلی



سوال ۱ : جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

$\frac{\pi}{۲} < \frac{۴\pi}{۵} < \pi$

$\frac{۳\pi}{۲} < \frac{۵\pi}{۳} < ۲\pi$

$۰ < \frac{۵\pi}{۱۲} < \frac{\pi}{۲}$

$\pi < \frac{۵\pi}{۴} < \frac{۳\pi}{۲}$

انتهای کمان رو به روی α	زاویهٔ α (رادیان)
ربع دوم	$\frac{۳\pi}{۴}$
ربع دوم	$\frac{۴\pi}{۵}$
ربع چهارم	$\frac{۵\pi}{۳}$
ربع اول	$\frac{۵\pi}{۱۲}$
ربع سوم	$\frac{۵\pi}{۴}$

تمرین تکمیلی

سوال ۲ : اگر $\cos x = \frac{-۴}{۵}$ و $\sin x > ۰$ ، نسبت های مثلثاتی دیگر زاویهٔ x را بیابید.

چون $\cos x < ۰$ و $\sin x > ۰$، پس انتهای کمانْ زاویهٔ α در ربع دوم واقع است.

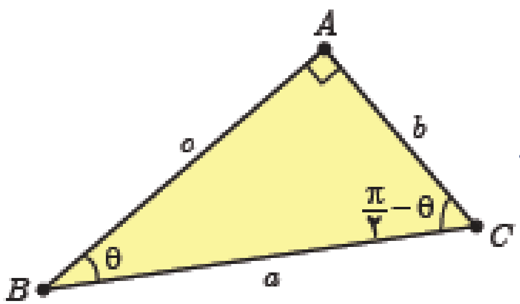
$$\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x \quad \Longrightarrow \quad \sin^۲ x = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \quad \Longrightarrow \quad \sin x = \frac{۳}{۵}$$

$$\xrightarrow{x \text{ در ربع دوم است}} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-۳}{۴}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-۴}{۳}$$

فعالیت صفحهٔ ۹۸ کتاب درسی

نسبت های مثلثاتی زوایای متمّم



یک مثلث قائم الزاویه دلخواه مانند شکل مقابل را در نظر بگیرید.

زاویه های θ و $\frac{\pi}{۲}-\theta$ متمم یکدیگرند زیرا مجموع آنها برابر ۹۰درجه می شود.

با توجه به شکل، دو ستون روبه رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

$\sin\theta=\frac{b}{a}$	$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{c}{a}$
$\cos\theta=\frac{c}{a}$	$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{b}{a}$
$\tan\theta=\frac{b}{c}$	$\tan(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{c}{b}$
$\cot\theta=\frac{c}{b}$	$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{b}{c}$

$$\sin\theta=\frac{b}{a}=\frac{\text{ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{وتر}}$$

$$\cos\theta=\frac{c}{a}=\frac{\text{ضلع مجاور زاویه } \theta}{\text{وتر}}$$

$$\tan\theta=\frac{b}{c}=\frac{\text{ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{ضلع مجاور زاویه } \theta}$$

$$\cot\theta=\frac{c}{b}=\frac{\text{ضلع مجاور زاویه } \theta}{\text{ضلع مقابل زاویه } \theta}$$

صفحه ۹۸ کتاب درسی

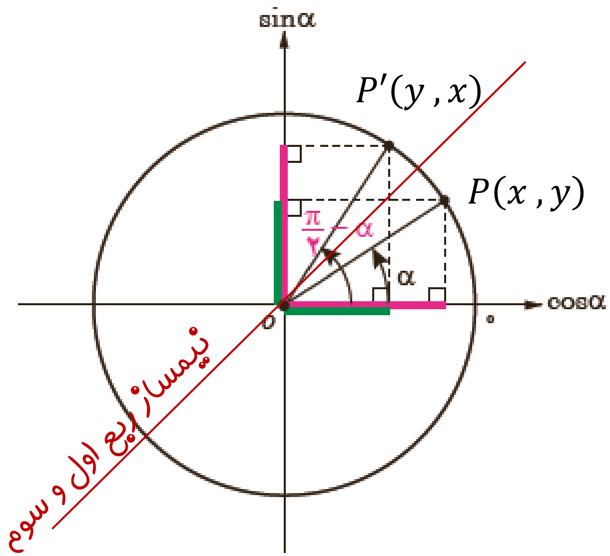
نسبت های مثلثاتی زوایای متمّم

زاویه های α و β را متمم می گوییم هرگاه مجموع آنها برابر ۹۰درجه ($\frac{\pi}{۲}$ رادیان) شود و موقعیت آنها روی محیط دایرهٔ مثلثاتی، نقاط $P(x , y)$ و $P'(y , x)$ باشد.

در حالت کلی داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \cot\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\tan\alpha$$



قرینهٔ نقطه ای به مختصات (x , y) نسبت به نیمساز ربع اول و سوم، نقطه ای به مختصات (y , x) است.

به عنوان مثال:

اگر در شکل بالا $\alpha=۳۰^\circ$ باشد آنگاه متمم آن زاویهٔ ۶۰° است و داریم:

$$\sin(۶۰^\circ)=\sin(۹۰^\circ-۳۰^\circ)=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(۶۰^\circ)=\cos(۹۰^\circ-۳۰^\circ)=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan(۶۰^\circ)=\tan(۹۰^\circ-۳۰^\circ)=\cot ۳۰^\circ=\sqrt{۳}$$

$$\cot(۶۰^\circ)=\cot(۹۰^\circ-۳۰^\circ)=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

نتیجه

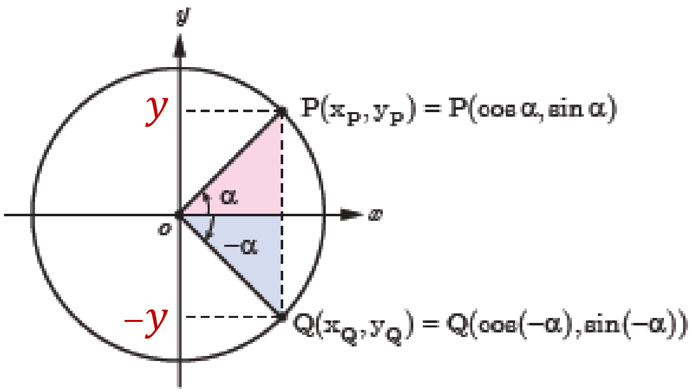
در دو زاویهٔ متمم، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است.

فعالیت صفحه ۹۹ کتاب درسی

نسبت های مثلثاتی زوایای قرینه

زاویه های α و $-\alpha$ را قرینه می گوییم هرگاه مجموع آنها برابر صفر شود و موقعیت آنها روی محیط دایرهٔ مثلثاتی نقاط P و Q باشد. در حالت کلی داریم:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$



به عنوان مثال:

اگر در شکل بالا $\alpha = ۳۰^\circ$ باشد آنگاه قرینهٔ آن زاویهٔ -۳۰° است و داریم:

$$\sin(-۳۰^\circ) = -\sin ۳۰^\circ = \frac{-۱}{۲}$$
$$\cos(-۳۰^\circ) = \cos ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\tan(-۳۰^\circ) = -\tan ۳۰^\circ = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$
$$\cot(-۳۰^\circ) = -\cot ۳۰^\circ = -\sqrt{۳}$$

قرینهٔ نقطه ای به مختصات $(x\,,\,y)$ نسبت به محور طول ها (افقی)، نقطه ای به مختصات $(x\,,\,-y)$ است.

نتیجه

دو زاویهٔ قرینه با هم دارای کسینوس های برابرند و سایر نسبت های مثلثاتی آنها قرینه یکدیگر است.

تمرین تکمیلی

سوال ۳ : حاصل هریک از عبارت های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot\left(\frac{-\pi}{۳}\right)\times\cos\left(\frac{-\pi}{۶}\right)+\tan\left(\frac{-\pi}{۴}\right)=-\cot\frac{\pi}{۳}\times\cos\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱=\frac{-۳}{۲}$$

الف) $$\frac{\cos(-۹۰^\circ)+\sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ)-\cos(-۳۶۰^\circ)}=\frac{\cos ۹۰^\circ-\sin ۲۷۰^\circ}{-\sin ۱۸۰^\circ-\cos ۳۶۰^\circ}=\frac{۰-(-۱)}{-۱-۰}=\frac{۱}{-۱}=-۱$$

ب) $$\cot\left(\frac{-\pi}{۶}\right)+\tan\left(\frac{-\pi}{۳}\right)=-cot\left(\frac{\pi}{۶}\right)-tan\left(\frac{\pi}{۳}\right)=-\sqrt{۳}-\sqrt{۳}=-۲\sqrt{۳}$$

پ) $$\cot(-۴۵^\circ)\times\cos(-۶۰^\circ)+\sin(-۴۵^\circ)\times\sin(-۶۰^\circ)=$$

$$-\cot ۴۵^\circ\times\cos ۶۰^\circ+\sin ۴۵^\circ\times\sin ۶۰^\circ=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{-\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

فعالیت صفحه ۱۰۰ کتاب درسی

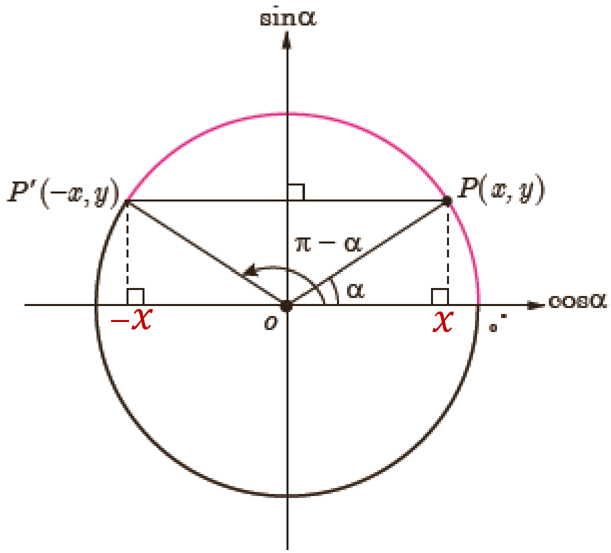
نسبت های مثلثاتی زاویه های مکمل

زاویه های α و β را مکمل می گوییم هرگاه مجموع آنها برابر ۱۸۰ درجه (π رادیان) شود و موقعیت آنها روی محیط دایرهٔ مثلثاتی، نقاط $P(x\,,y)$ و $P'(-x\,,y)$ باشد.

در حالت کلی داریم:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$



قرینهٔ نقطه ای به مختصات $(x\,,y)$ نسبت به محور عرض ها (عمودی)، نقطه ای به مختصات $(-x\,,y)$ است.

به عنوان مثال:

اگر در شکل بالا $\alpha=۳۰^\circ$ باشد آنگاه مکمل آن زاویهٔ ۱۵۰° است و داریم:

$$\sin(۱۵۰^\circ)=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos(۱۵۰^\circ)=-\cos ۳۰^\circ=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(۱۵۰^\circ)=-\tan ۳۰^\circ=\frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot(۱۵۰^\circ)=-\cot ۳۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

نتیجه

دو زاویهٔ مکمل دارای سینوس های برابرند و سایر نسبت های مثلثاتی آنها قرینه یکدیگر است.

تمرین تکمیلی

سوال ۴ : مکمل هریک از زاویه های زیر را مشخص کنید.

الف) ۷۵° $\longrightarrow$ $۱۸۰^\circ - ۷۵^\circ = ۱۰۵^\circ$

ب) -۲۵° $\longrightarrow$ $۱۸۰^\circ - (-۲۵^\circ) = ۲۰۵^\circ$

پ) رادیان $\frac{\pi}{۱۲}$ $\longrightarrow$ $\pi - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱۱\pi}{۱۲}$

ت) رادیان $\frac{-\pi}{۴}$ $\longrightarrow$ $\pi - \left(\frac{-\pi}{۴}\right) = \frac{۵\pi}{۴}$

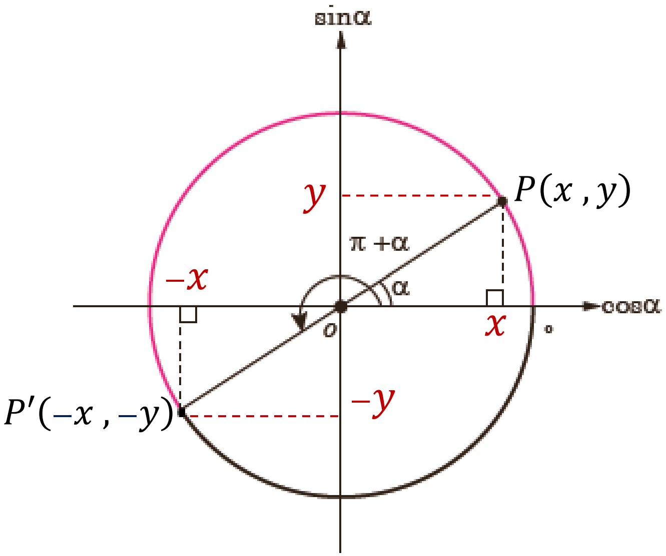
صفحه ۱۰۰ کتاب درسی

نسبت های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

زاویه های α و β، ۱۸۰ درجه (π رادیان) اختلاف دارند هرگاه موقعیت آنها روی محیط دایرهٔ مثلثاتی، نقاط $P(x\,,y)$ و $P'(-x\,,-y)$ باشد.

در حالت کلی داریم:

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$



به عنوان مثال:

اگر در شکل بالا $\alpha=۳۰^\circ$ باشد آنگاه زاویهٔ $\pi+\alpha$ ۲۱۰° است و داریم:

$$\sin(۲۱۰^\circ)=\sin(\pi+۳۰^\circ)=-\sin ۳۰^\circ=\frac{-۱}{۲}$$
$$\cos(۲۱۰^\circ)=\cos(\pi+۳۰^\circ)=-\cos ۳۰^\circ=\frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\tan(۲۱۰^\circ)=\tan(\pi+۳۰^\circ)=\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$
$$\cot(۲۱۰^\circ)=\cot(\pi+۳۰^\circ)=\cot ۳۰^\circ=\sqrt{۳}$$

قرینهٔ نقطه ای به مختصات $(x\,,y)$ نسبت به مبدا مختصات نقطه ای به مختصات $(-x\,,-y)$ است.

نتیجه

دو زاویهٔ با اختلاف π رادیان دارای سینوس های قرینه و کسینوس های قرینه یکدیگر هستند.

مثال صفحهٔ ۱۰۰ کتاب درسی

حاصل هریک از نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\sin\frac{-۷\pi}{۶} = -\sin\frac{۷\pi}{۶} = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = -\left(-\sin\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۲۲۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

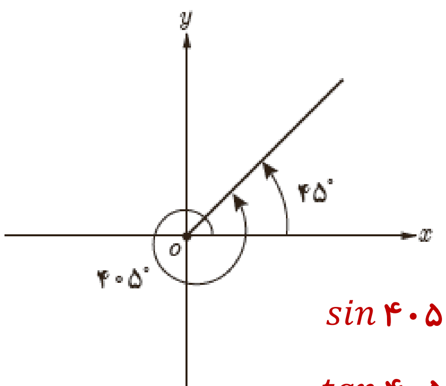
$$\cos ۱۲۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\cos ۶۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$$

صفحه ۱۰۱ کتاب درسی

زاویه های هم انتها

زاویه هایی را هم انتها می نامیم که اختلاف آنها مضرب صحیح از ۳۶۰ درجه یا به عبارتی دیگر مضرب زوجی از π رادیان باشد.

به عنوان مثال:



الف) مانند آنچه در شکل مقابل می بینیم؛ زاویه های ۴۵ درجه و ۴۰۵ درجه هم انتها هستند و انتهای آنها در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند.

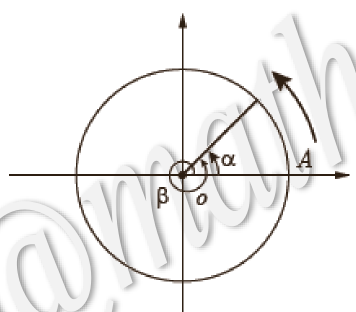
$$\cos ۴۰۵^\circ = \cos(۳۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin ۴۰۵^\circ = \sin(۳۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cot ۴۰۵^\circ = \cot(۳۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cot ۴۵^\circ = ۱$$

$$\tan ۴۰۵^\circ = \tan(۳۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

زاویه هایی با اختلاف $۲k\pi$ رادیان



برای هر دو زاویهٔ هم انتها مانند α و β که به اندازهٔ $۲k\pi$ رادیان با هم اختلاف دارند، داریم:

$$\beta - \alpha = ۲k\pi \rightarrow \beta = ۲k\pi + \alpha$$

در حالت کلی داریم:

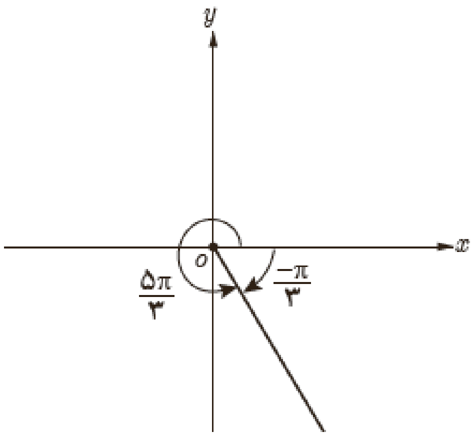
$$\tan(۲k\pi + \alpha) = \tan\alpha \qquad \sin(۲k\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cot(۲k\pi + \alpha) = \cot\alpha \qquad \cos(۲k\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

صفحه ۱۰۱ کتاب درسی

به عنوان مثال:

ب) مانند آنچه در شکل زیرمی بینیم؛ زاویه های $\frac{-\pi}{3}$ رادیان و $\frac{5\pi}{3}$ رادیان هم انتها هستند و انتهای آنها در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارند.



$$\sin\frac{5\pi}{3}=\sin(2\pi+\frac{-\pi}{3})=\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos(2\pi+\frac{-\pi}{3})=\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{3}=\tan(2\pi+\frac{-\pi}{3})=\tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

$$\cot\frac{5\pi}{3}=\cot(2\pi+\frac{-\pi}{3})=\cot\left(\frac{-\pi}{3}\right)=-\cot\frac{\pi}{3}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

زاویه هایی با مجموع $2k\pi$ رادیان

اگر مجموع دو زاویه مانند α و β به اندازهٔ $2k\pi$ رادیان باشد، آنگاه α و قرینهٔ β هم انتها خواهند شد. داریم:

$$\beta+\alpha=2k\pi \rightarrow \beta=2k\pi-\alpha$$

در حالت کلی داریم:

$$\tan(2k\pi-\alpha)=-\tan\alpha \qquad \sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\cot(2k\pi-\alpha)=-\cot\alpha \qquad \cos(2k\pi-\alpha)=\cos\alpha$$

مثال صفحهٔ ۱۰۱ کتاب درسی

حاصل هریک از نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$tan\frac{۵\pi}{۳} = tan(۲\pi + \frac{-\pi}{۳}) = tan\left(\frac{-\pi}{۳}\right) = -tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$

$$sin\,۴۰۵^{\circ} = sin(۳۶۰^{\circ} + ۴۵^{\circ}) = sin\,۴۵^{\circ} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۱۰۲ کتاب درسی

مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\sin ۲۱۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = -\sin ۳۰^\circ = -\frac{۱}{۲}$$

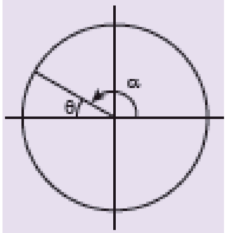
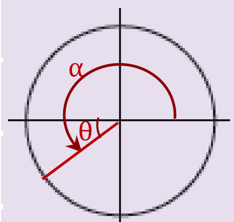
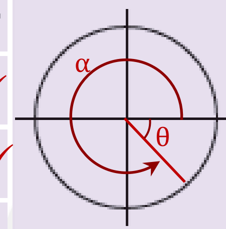
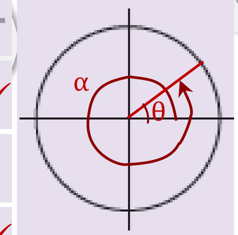
$$\tan \frac{-۷\pi}{۴} = -\tan \frac{۷\pi}{۴} = -\tan\left(۲\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = -\left(-\tan \frac{\pi}{۴}\right) = ۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = \cot(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$

$$\sin \frac{۳\pi}{۴} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \sin \frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۱۰۲ کتاب درسی

جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

زاویه / نسبت	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \pi + \theta$	$\alpha = 2k\pi - \theta$	$\alpha = 2k\pi + \theta$
انتهای کمان	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم	ربع اول
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها	 نسبت: + / − sinα: + ✓ cosα: − ✓ tanα: − ✓	 نسبت: + / − sinα: − ✓ cosα: − ✓ tanα: + ✓	 نسبت: + / − sinα: − ✓ cosα: + ✓ tanα: − ✓	 نسبت: + / − sinα: + ✓ cosα: + ✓ tanα: + ✓
$\sin\alpha$	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$	$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$	$\sin(2k\pi-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(2k\pi+\theta) = \sin\theta$
$\cos\alpha$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$	$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$	$\cos(2k\pi-\theta) = \cos\theta$	$\cos(2k\pi+\theta) = \cos\theta$
$\tan\alpha$	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$	$\tan(2k\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(2k\pi+\theta) = \tan\theta$
$\cot\alpha$	$\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$	$\cot(2k\pi-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(2k\pi+\theta) = \cot\theta$

کار در کلاس ۳ صفحهٔ ۱۰۲ کتاب درسی

برای زاویه های قرینهٔ $(\alpha = -\theta)$ از کدام ستون جدول بالا می توان کمک گرفت؟ چرا؟ ستون سوم به ازای $k = 0$

نسبت های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف ۹۰ درجه

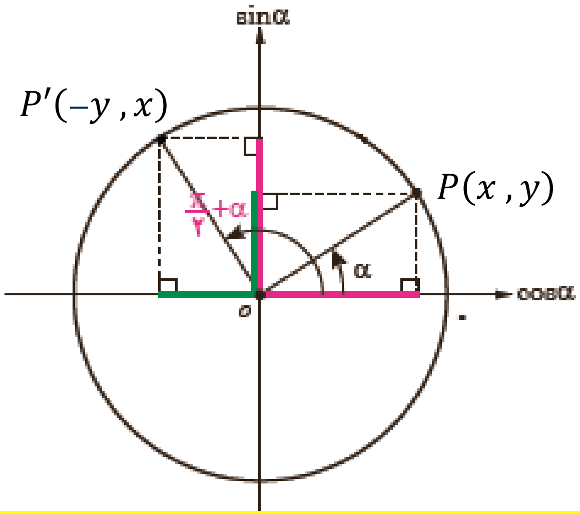
صفحه ۱۰۳ کتاب درسی

زاویه های α و β، ۹۰ درجه ($\frac{\pi}{۲}$ رادیان) اختلاف دارند هرگاه موقعیت آنها روی محیط دایرهٔ مثلثاتی، نقاط $P(x\,,y)$ و $P'(-y\,,x)$ باشد.

در حالت کلی داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\cot\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \cot\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$



کمتر از آن استفاده می شود. به مثال پایین دقت کنید:

به عنوان مثال:

اگر در شکل بالا $\alpha=۳۰^\circ$ باشد آنگاه زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}+\alpha$ ، ۱۲۰° است و داریم:

$$\cos(۱۲۰^\circ)=\cos(۹۰^\circ+۳۰^\circ)=-\sin ۳۰^\circ=\frac{-۱}{۲} \qquad \sin(۱۲۰^\circ)=\sin(۹۰^\circ+۳۰^\circ)=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot(۱۲۰^\circ)=\cot(۹۰^\circ+۳۰^\circ)=-\tan ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۳} \qquad \tan(۱۲۰^\circ)=\tan(۹۰^\circ+۳۰^\circ)=-\cot ۳۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

روش دیگر

$$\cos(۱۲۰^\circ)=\cos(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-\cos ۶۰^\circ=\frac{-۱}{۲} \qquad \sin(۱۲۰^\circ)=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot(۱۲۰^\circ)=\cot(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-\cot ۶۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۳} \qquad \tan(۱۲۰^\circ)=\tan(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-\tan ۶۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

جمع بندی

اگر زاویه θ را بتوانیم به صورت مجموع یا تفاضل مضرب های π و زاویهٔ α نوشت $(0 < \alpha < 90^\circ)$، آنگاه برای یافتن نسبت های مثلثاتی زاویهٔ θ ؛ می توان مضرب π را نادیده گرفت و با توجه به موقعیت θ در دایرهٔ مثلثاتی، نسبت مثلثاتی α را به دست آورد.

انتهای کمان ۳۳۰ درجه در ربع چهارم قرار دارد. در ربع چهارم سینوس منفی است.

مثال

$$\sin 330^\circ = \sin(\cancel{360} - 30)^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

اگر زاویه θ را بتوانیم به صورت مجموع یا تفاضل مضرب های فرد $\frac{\pi}{2}$ و زاویهٔ α نوشت $(0 < \alpha < 90^\circ)$، آنگاه برای یافتن نسبت های مثلثاتی زاویهٔ θ ؛ می توان مضرب موجود درآن را نادیده گرفت و با تغییر sin به cos یا برعکس و tan به cot یا برعکس و همچنین با توجه به موقعیت θ در دایرهٔ مثلثاتی، نسبت مثلثاتی α را به دست آورد.

انتهای کمان ۳۳۰ درجه در ربع چهارم قرار دارد. در ربع چهارم سینوس منفی است.

مثال

$$\sin 330^\circ = \sin(\cancel{270} + 60)^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۵ : مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

$$A=\frac{\sin ۱۲۰^\circ+\cos ۲۲۵^\circ}{-۲\sin ۴۵^\circ-\tan ۳۰۰^\circ}$$

$$\sin ۱۲۰^\circ=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\qquad \cos ۲۲۵^\circ=-\cos ۴۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\qquad \tan ۳۰۰^\circ=-\tan ۶۰^\circ=-\sqrt{۳}$$

$$A=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{-\cancel{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{\cancel{۲}}\right)+\sqrt{۳}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{-\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۱}}=\frac{\cancel{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}}{۲\cancel{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}}=\frac{۱}{۲}$$

جمع بندی

اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند، سینوس هر کدام برابر است با کسینوس دیگری.

$\sin\theta = \cos(۹۰^\circ - \theta)$

مثال $\boxed{\sin ۲۰^\circ = \cos ۷۰^\circ}$

اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند، تانژانت هر کدام برابر است با کتانژانت دیگری.

$\tan\theta = \cot(۹۰^\circ - \theta)$

مثال $\boxed{\tan ۳۰^\circ = \cot ۶۰^\circ}$

سینوس دو زاویه مکمل، با هم برابر هستند و سایر نسبت های مثلثاتی قرینه یکدیگرند.

مثال $\boxed{\cos ۱۲۰^\circ = -\cos ۶۰^\circ}$ $\boxed{\sin ۱۲۰^\circ = \sin ۶۰^\circ}$

کسینوس دو زاویه قرینه، با هم برابر هستند و سایر نسبت های مثلثاتی قرینه یکدیگرند.

مثال $\boxed{\cos(-۵۰^\circ) = \cos ۵۰^\circ}$ $\boxed{\sin(-۵۰^\circ) = -\sin ۵۰^\circ}$

تمرین ۱ صفحهٔ ۱۰۴ کتاب درسی

مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

$$\sin ۳۰۰^\circ = \sin(۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\sin ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot ۷۵۰^\circ = \cot\left(۲(۳۶۰^\circ) + ۳۰^\circ\right) = \cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\left(\frac{-۲۳\pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۲۳\pi}{۴}\right) = \cos\left(۶\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin\frac{۵\pi}{۴} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = -\sin\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan(-۸۴۰^\circ) = -\tan ۸۴۰^\circ = -\tan(۹۰۰^\circ - ۶۰^\circ) = -(-\tan ۶۰^\circ) = \sqrt{۳}$$

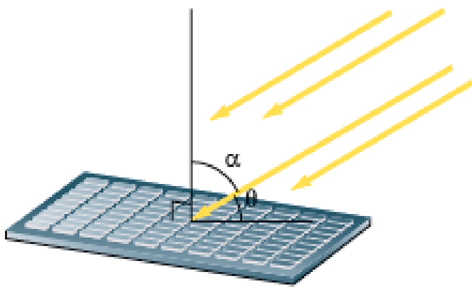
$$\tan(-۱۵۰^\circ) = -\tan ۱۵۰^\circ = -\tan(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = -(-\tan ۳۰^\circ) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cos\left(\frac{۹\pi}{۴}\right) = \cos\left(۲\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan\frac{۱۰\pi}{۳} = \tan\left(۳\pi + \frac{\pi}{۳}\right) = \tan\frac{\pi}{۳} = \sqrt{۳}$$

تمرین ۲ صفحه ۱۰۴ کتاب درسی

شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم، رابطهٔ $I = k\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به دست می دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب کسینوس زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

θ و α متمم یکدیگرند، پس داریم: $\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$$I = k\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = k\sin\theta = k\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right)$$

ب) شدت نور را برای زاویه های $\theta = ۰$ ، $\theta = \frac{\pi}{۶}$ و $\theta = \frac{\pi}{۳}$ برحسب k به دست آورید.

$$I = k\sin\theta \xrightarrow{\theta = ۰} I = k\sin ۰ = ۰$$

$$I = k\sin\theta \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{۳}} I = k\sin\frac{\pi}{۳} = \frac{k\sqrt{۳}}{۲}$$

$$I = k\sin\theta \xrightarrow{\theta = \frac{\pi}{۶}} I = k\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{k}{۲}$$

پ) زاویهٔ θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی: از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

$$\sin\theta = ۱ \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{۲}$$

تمرین ۳ صفحه ۱۰۴ کتاب درسی

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا برحسب رادیان است).

الف) $\cos\theta + \cos(\pi - \theta) = ۰$

ب) $\sin(\frac{\pi}{۲} - \theta) + \cos\theta = ۱$

ج) $\cos(۷) = \cos(-۷)$

د) $\tan(\pi - \theta) = \tan\pi - \tan\theta$

الف) درست است زیرا داریم: $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

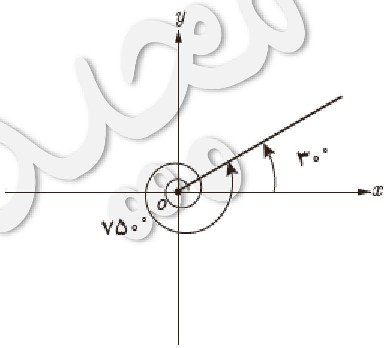
ب) نادرست است زیرا داریم: $\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right) = \cos\theta$

ج) درست است زیرا داریم: $\cos\theta = \cos(-\theta)$

د) درست است زیرا داریم: $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ و $\tan\pi - \tan\theta = ۰ - \tan\theta = -\tan\theta$

تمرین تکمیلی

سوال ۶ : مطابق نمونه هر یک از نسبت های مثلثاتی زاویه های زیر را مشخص کنید.



$$\sin ۷۵۰^\circ = \sin(۲(۳۶۰^\circ)+۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan(-۳۱۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$$ زاویه های هم انتها

$$\cos ۳۰۰^\circ = \cos(۳۶۰^\circ - ۶۰^\circ) = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\sin ۴۲۰^\circ = \sin(۳۶۰^\circ + ۶۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(-۲۲۵^\circ) = \tan ۱۳۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot(-۳۳۰^\circ) = \cot ۳۰^\circ = \sqrt{۳}$$ زاویه های هم انتها

$$\sin \frac{۱۱\pi}{۴} = \sin\left(۳\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos\left(\frac{-۷\pi}{۴}\right) = \cos\left(\frac{۷\pi}{۴}\right) = \cos\left(۲\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۷ : حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲۰^\circ = -\tan ۴۵^\circ - \cot ۶۰^\circ = -۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{-۳-\sqrt{۳}}{۳}$

ب) $\cancelto{\cos ۱۵۰^\circ}{\cos(-۲۱۰^\circ)} + \cot ۲۴۰^\circ = -\cos ۳۰^\circ + \cot ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{-۳\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}}{۶}$

پ) $\sin ۶۳۰^\circ + \tan(-۵۴۰^\circ) = \sin ۲۷۰^\circ - \tan ۱۸۰^\circ = -۱ - ۰ = -۱$

ت) $\cos(-۷۲۰^\circ) + \cancelto{\cot ۱۲۰^\circ}{\cot(-۶۰۰^\circ)} + \tan ۷۲۰^\circ - \cancelto{\tan ۱۲۰^\circ}{\tan(-۶۰۰^\circ)} =$

$$\cos ۰^\circ - \cot ۶۰^\circ + \tan ۰^\circ + \tan ۶۰^\circ = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۰ + \sqrt{۳} = \frac{۳-\sqrt{۳}+۳\sqrt{۳}}{۳}$$

تمرین تکمیلی

ث) $\sin\frac{۲۵\pi}{۳} - \cos\frac{۲۳\pi}{۴} = \sin\frac{۲۴\pi + \pi}{۳} - \cos\frac{۲۴\pi - \pi}{۴} =$

$$\sin\left(۸\pi + \frac{\pi}{۳}\right) - \cos\left(۶\pi + \frac{\pi}{۴}\right) = \sin\frac{\pi}{۳} - \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{۲}$$

ج) $\dfrac{\sin\frac{۳\pi}{۴} - \cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin\frac{-۳\pi}{۴} + \tan\frac{-۴\pi}{۳}} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{۴} + \cos\frac{\pi}{۶}}{-\sin\frac{\pi}{۴} - \tan\frac{\pi}{۳}} = \dfrac{\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳}} = \dfrac{\frac{\sqrt{۲} - \sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۳}}{۲}}$

$\tan\frac{۲\pi}{۳}$

$$= \frac{\sqrt{۲} - \sqrt{۳}}{-\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۳}} \xrightarrow{\text{بعد از گویا کردن مخرج کسر}} = \frac{۴ + \sqrt{۶}}{-۱۰}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۸ : جدول زیر را کامل کنید.

زاویه / نسبت	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$
$\cos x$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\tan x$	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$-\sqrt{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	-۱	$-\sqrt{۳}$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\sqrt{۳}$

تمرین تکمیلی

سوال ۹ : بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin ۸۴۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$

$\sin ۸۴۰^\circ = \sin\left(۲(۳۶۰^\circ) + ۱۲۰^\circ\right) = \sin ۱۲۰^\circ = \sin\ (۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ$

ب) $\cos\left(-۳۲۴^\circ\right) = \cos ۳۶^\circ$

$\cos(-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۲۴^\circ = \cos(۳۶۰^\circ - ۳۶^\circ) = \cos ۳۶^\circ$

پ) $\tan\left(-۱۰۰۰^\circ\right) = \tan ۸۰^\circ$

$\tan(-۱۰۰۰^\circ) = -\tan ۱۰۰۰^\circ = -\tan\left(۲(۳۶۰^\circ) + ۲۸۰^\circ\right)$

$= -\tan ۲۸۰^\circ = -\tan\ (۲۷۰^\circ + ۱۰^\circ) = -(-\cot ۱۰^\circ) = \tan ۸۰^\circ$

ت) $\sin ۸۷۵^\circ = \sin ۱۵۵^\circ$

$\sin ۸۷۵^\circ = \sin\left(۲(۳۶۰^\circ) + ۱۵۵^\circ\right) = \sin ۱۵۵^\circ$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۰ : در هر یک از تساوی های زیر به جای x یک زاویهٔ مناسب قرار دهید.

الف) $\sin x = \cos(۲۰^\circ + x)$

با توجه به تساوی داده شده می توان گفت زاویه ها موجود در طرفین تساوی، متمم یکدیگرند. پس داریم:

$$x + ۲۰^\circ + x = ۹۰^\circ \implies ۲x = ۷۰^\circ \implies x = ۳۵^\circ$$

ب) $\tan\left(x + \frac{\pi}{۱۸}\right) = \cot\left(\frac{۲\pi}{۹} + x\right)$

$$x + \frac{\pi}{۱۸} + \frac{۲\pi}{۹} + x = \frac{\pi}{۲} \implies ۲x + \frac{۵\pi}{۱۸} = \frac{\pi}{۲} \implies ۲x = \frac{۴\pi}{۱۸} \implies x = \frac{\pi}{۹}$$

آیا برای زاویهٔ x تنها یک مقدار می توان یافت؟

خیر، می توان مقادیر به دست آمده را با مضارب زوج π جمع کرد.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۱ : اگر انتهای کمان α در ربع سوم واقع باشد و داشته باشیم $\tan\alpha = \frac{۳}{۴}$ حاصل هر یک از عبارت های زیر را پیدا کنید؟

الف) $\cos(۱۱\pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\left(\frac{-۴}{۵}\right) = \frac{۴}{۵}$

انتهای کمان $۱۱\pi - \alpha$ در ربع دوم قرار دارد.

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + \tan^۲\alpha = ۱ + \left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ = \frac{۲۵}{۱۶} \to \cos^۲\alpha = \frac{۱۶}{۲۵} \xrightarrow{\text{در ناحیهٔ سوم } \alpha} \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

ب) $\cot\left(\frac{۱۳\pi}{۲} + \alpha\right) = \cot\left(\frac{۱۲\pi + \pi}{۲} + \alpha\right) = \cot\left(\frac{\pi}{۲} + \alpha\right) = -\tan\alpha = -\frac{۳}{۴}$

انتهای کمان $\frac{۱۳\pi}{۲} + \alpha$ در ربع دوم قرار دارد.

تمرین تکمیلی

سوال ۱۲ : مقدار عبارت $A = \dfrac{۷\sin(-x) + \sin(x-\pi)}{۲\sin(\pi - x) + ۳\sin(\pi + x)}$ را تعیین کنید.

$$sin(-x) = -\sin x$$
$$sin(x-\pi) = -sin(\pi - x) = -\sin x$$
$$sin(\pi - x) = \sin x$$
$$sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$A = \frac{۷\sin(-x) + \sin(x-\pi)}{۲\sin(\pi - x) + ۳\sin(\pi + x)} = \frac{-۷\sin x - \sin x}{۲\sin x - ۳\sin x} = \frac{-۸\sin x}{-\sin x} = ۸$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۳ : اگر $tan\ ۱۵^\circ = ۲ - \sqrt{۳}$ باشد، حاصل عبارت $\dfrac{۲sin\ ۴۳۵^\circ + ۲cos\ ۳۴۵^\circ}{cos\ ۱۰۵^\circ - ۳sin۱۹۵^\circ}$ را بیابید.

$$sin\ ۴۳۵^\circ = sin(۳۶۰^\circ + ۷۵^\circ) = sin\ ۷۵^\circ = cos۱۵^\circ$$

$$cos\ ۳۴۵^\circ = cos(۳۶۰^\circ - ۱۵^\circ) = cos۱۵^\circ$$

$$cos۱۰۵^\circ = cos(۹۰^\circ + ۱۵^\circ) = -sin۱۵^\circ$$

$$sin۱۹۵^\circ = sin(۱۸۰^\circ + ۱۵^\circ) = -sin۱۵^\circ$$

$$cot۱۵^\circ = \frac{۱}{tan۱۵^\circ}$$

$$\frac{۲sin\ ۴۳۵^\circ + ۲cos\ ۳۴۵^\circ}{cos\ ۱۰۵^\circ - ۳sin۱۹۵^\circ} = \frac{۲cos۱۵^\circ + ۲\ cos۱۵^\circ}{-sin۱۵^\circ + ۳\ sin۱۵^\circ} = \frac{۴\ cos۱۵^\circ}{۲\ sin۱۵^\circ} = ۲cot۱۵^\circ = ۲\left(\frac{۱}{tan۱۵^\circ}\right) = \frac{۲}{۲ - \sqrt{۳}}$$

مخرج کسر را گویا می کنیم :

$$\frac{۲}{۲ - \sqrt{۳}} \times \frac{۲ + \sqrt{۳}}{۲ + \sqrt{۳}} = \frac{۴ + ۲\sqrt{۳}}{۴ - ۳} = ۴ + ۲\sqrt{۳}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۴ : با توجه به تساوی زیر مقدار $cot\,\alpha$ را بیابید.

$$\frac{۲cos(\alpha-۳\pi)+۳sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)}{cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)}=۲$$

$$cos(\alpha-۳\pi)=cos(۳\pi-\alpha)=cos(\pi-\alpha)=-cos\,\alpha$$

کسینوس دو زاویه قرینه با هم برابرند.
$۳\pi-\alpha$ و $\alpha-۳\pi$ قرینهٔ هم هستند.

$$sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=cos\,\alpha$$

$$cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=-sin\,\alpha$$

$$\frac{۲cos(\alpha-۳\pi)+۳sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)}{cos\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)}=۲\Rightarrow\frac{-۲cos\,\alpha+۳cos\,\alpha}{-sin\,\alpha}=۲\Rightarrow\frac{cos\,\alpha}{-sin\,\alpha}=۲$$

$$\Rightarrow -cot\,\alpha=۲\Rightarrow cot\,\alpha=-۲$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۵ : مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

$$B = \tan ۱^\circ \times \tan ۲^\circ \times \tan ۳^\circ \times \ \dots \times \tan ۸۹^\circ$$

می دانیم که

$$\tan\theta \times \cot\theta = ۱$$

$$\tan ۱^\circ \times \tan ۸۹^\circ = \tan ۱^\circ \times \cot ۱^\circ = ۱$$

$$\tan ۲^\circ \times \tan ۸۸^\circ = \tan ۲^\circ \times \cot ۲^\circ = ۱$$

$$\tan ۳^\circ \times \tan ۸۷^\circ = \tan ۳^\circ \times \cot ۳^\circ = ۱$$

$$\vdots$$

$$\tan ۴۴^\circ \times \tan ۴۶^\circ = \tan ۴۴^\circ \times \cot ۴۶^\circ = ۱$$

$$B = ۱^{۴۴} \times \underbrace{\cancel{\tan ۴۵^\circ}}_{۱} = \ ۱ \times ۱ = ۱$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱۶ : مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

$$A = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \ldots + \sin^2 90^\circ$$

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ = 1$$

$$\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ = 1$$

$$\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ = \sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ = 1$$

$$\vdots$$

$$\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ = \sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ = 1$$

$$A = 44\,(1) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ = 44 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2 = 45/5$$

پایان درس دوم