مثال : جملات سوم، هشتم و هجدهم یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی می‌باشند. قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

مثلثات

مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی رابطه بین زوایا و اضلاع یک مثلث میپردازد. یکی از هدف های این شاخه از ریاضیات اندازه گیری به طور غیرمستقیم است.

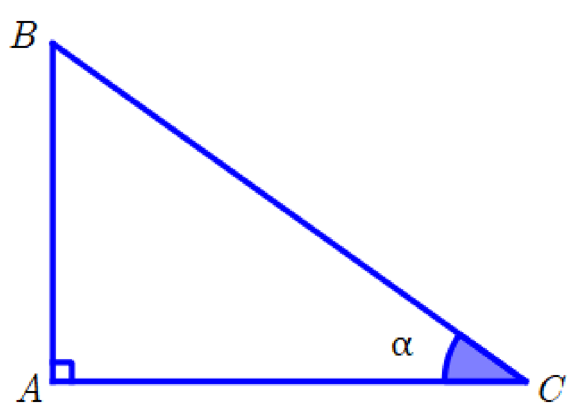
برای هر زاویه حاده در مثلث قائم الزاویه نسبت های سینوس $\sin$ و کسینوس $\cos$ و تانژانت Tan و کتانژانت $\cot$ زاویه به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{AC}{AB}$$



از تعاریف فوق مشخص است که $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$ و در نتیجه : $\tan\alpha \cot\alpha = 1$

هم چنین : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

مثال : چرا برای هر زاویه حاده ی α داریم:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

مثال :ثابت کنید برای هر زاویه داریم:

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

مثال :ثابت کنید برای هر زاویه داریم :

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

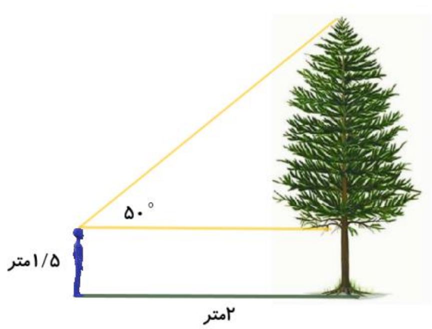
مثال :در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(B = 90^\circ)$ اگر $\cos A = \frac{4}{5}$ و $AC = 10$ باشد، مقدار تانژانت زاویه C را به‌دست آورید.

مثال :در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($A = ۹۰^\circ$) داریم $AC = ۵\sqrt{۳}$ و $B = ۶۰^\circ$. با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی، مقادیر AB و BC را بیابید

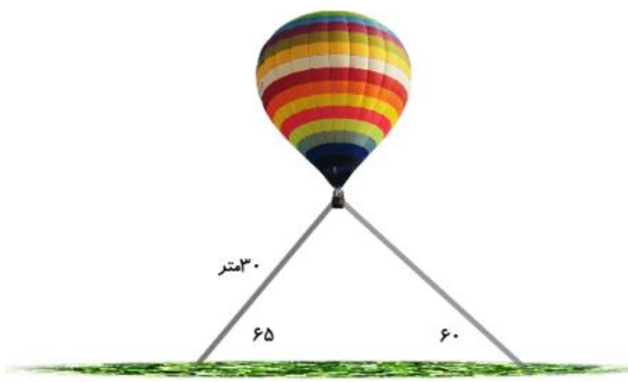
نسبت های مثلثاتی زوایای معروف

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
$\sin\alpha$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
$\cot\alpha$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

مثال : با توجه به شکل زیر، ارتفاع درخت تقریبا چند متر است ؟ $\tan ۵۰ \approx ۱/۲$

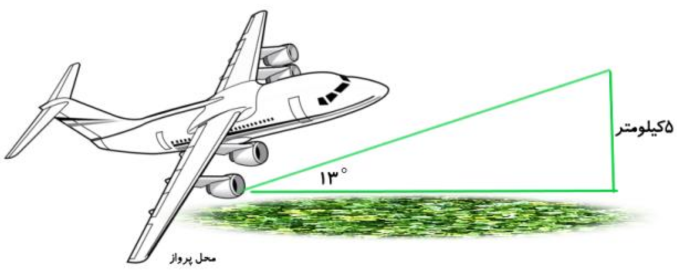


مثال : یک بالن با دو طناب به زمین وصل شده اند. طول یکی از طناب ها **۳۰** متر است. طول طناب دیگر را حساب کنید. $\sin ۶۵ \approx ۰/۹$

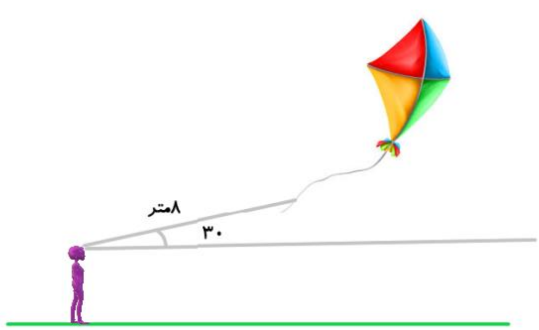


مثال : یک هواپیما با زاویه ۱۳ درجه شروع به پرواز میکند. این هواپیما چند کیلومتر طی میکند تا مطمئن باشیم با زمین ۲ کیلومتر فاصله عمودی دارد؟

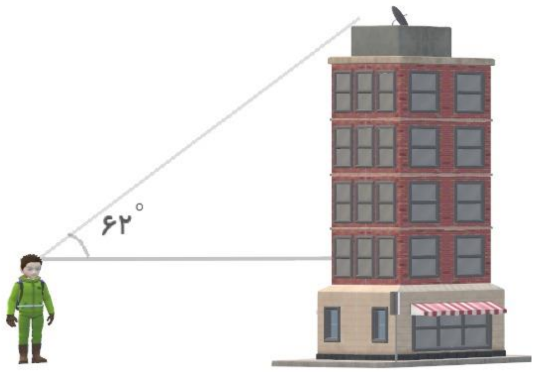
$\sin ۱۳ \approx ۰/۲۲$



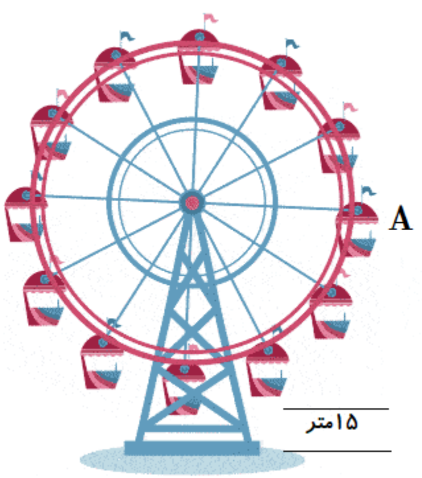
مثال : آرش **۱/۵** متر قد دارد و بادبادکی را هوا کرده است که نخ آن را هم ارتفاع با قدش گرفته است. زاویه ای که نخ با بادبادک با سطح زمین می سازد **۳۰** درجه است و طول نخ بادبادک **۸** متر است. معین کنید بادبادک در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار گرفته است؟



مثال : شخصی با قد ۲۰۰ سانتی متر جلوی یک ساختمان ایستاده و با زاویه ۶۲ درجه بالای ساختمان را نگاه میکند. اگر فاصله شخص تا ساختمان ۵ متر باشد، ارتفاع ساختمان را بیابید. $(\tan ۶۲ = ۲)$



مثال : چرخ و فلکی دایره ای شکل به قطر ۴۰ متر مطابق شکل مفروض است. کابین دلخواه M در لحظه $t=۰$ با شروع از نقطه A و با سرعتی ثابت در هر **۳** ثانیه یک دور در جهت مثبت مثلثاتی میچرخد. اگر فاصله سطح زمین تا پایین ترین نقطه چرخ و فلک **۱۵** متر باشد، تابعی که ارتفاع کابین بر حسب متر x را نسبت به زمان بر حسب ثانیه t نشان میدهد، کدام است؟



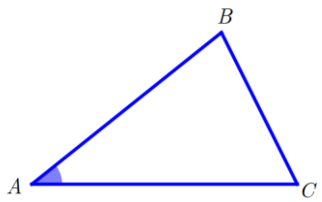
مثال : حاصل عبارت روبه‌رو را بیابید.

$$\frac{\sin ۴۵^\circ \cos ۲۷۰^\circ - \tan^۲ ۶۰^\circ}{\cot ۴۵^\circ - \sin^۲ ۳۰^\circ}$$

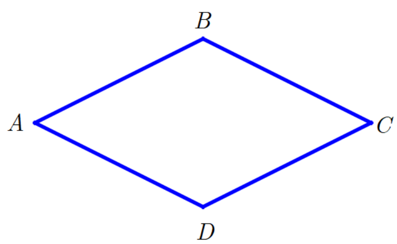
محاسبه مساحت مثلث با داشتن دو ضلع و زاویه بین آنها

مساحت هر مثلث برابر است با $\frac{۱}{۲}$ حاصل ضرب طول دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها.

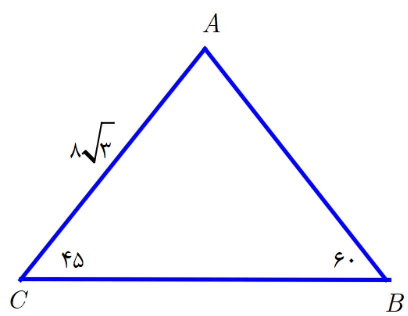
$$S = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin A$$



مثال : در لوزی شکل زیر $\cos \hat{B} = -\frac{۳}{۵}$ طول ضلع لوزی برابر ۸ سانتی‌متر می‌باشد، مساحت آن را بیابید.

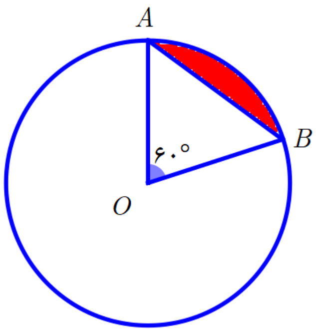


مثال : با توجه به شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدامست؟



مثال : مساحت متوازی الاضلاعی را بیابید که اندازه دو قطر آن **۶,۸** و زاویه بین دو قطر **۱۵۰** باشد.

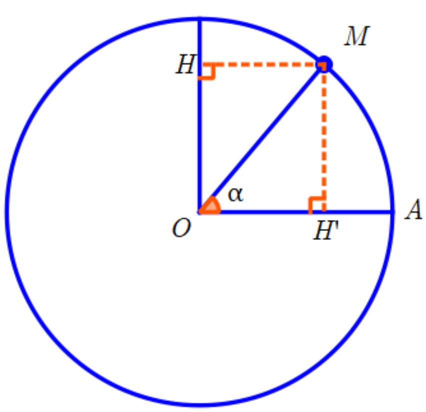
مثال : مساحت قسمت رنگی را بیابید.



مثال : زاویهٔ بین دو قطر مستطیل برابر °۳۰ و مساحت آن برابر °۲۵ می‌باشد. طول قطر مستطیل را بدست آورید.

دایره مثلثاتی

دایره مثلثاتی دایره ای است که به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱ که نقطه $A(۱,۰)$ مبدا حرکت برای رسم زاویه است. جهت مثبت بر روی دایره مثلثاتی خلاف جهت عقربه های ساعت است.

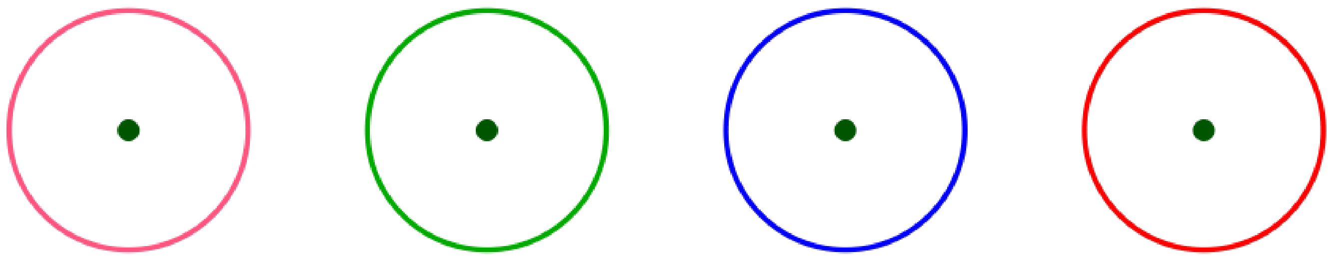


$$\sin\alpha = OH = MH'$$

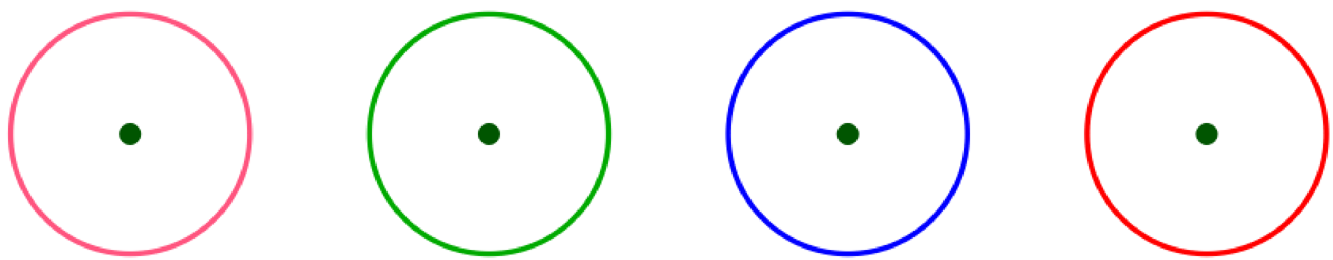
$$\cos\alpha = OH' = MH$$

مثال : روی دایره مثلثاتی زوایای خواسته شده را نشان دهید.

الف) ۳۵° ب) -۸۰° پ) ۱۲۰° ت) -۲۵۰°

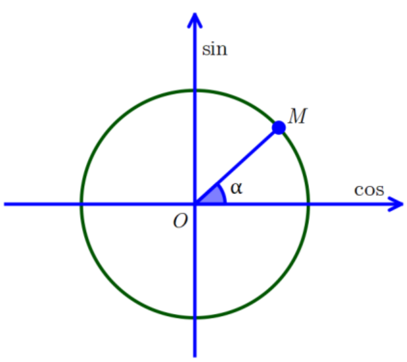


ث) ۹۰   ج) ۱۸۰   چ) ۲۷۰   ح) ۳۶۰



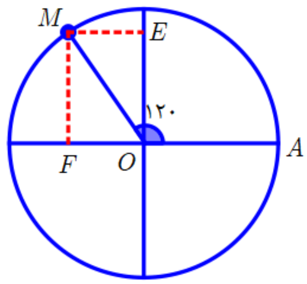
محورهای مختصاتی : در شکل روبرو محور عمودی را محور $\sin$ ها و محور افقی را محور $\cos$ ها قرارداد کرده ایم.

برای محاسبه نسبت های مثلثاتی زاویه α کافی است از نقطه M بر محور مورد نظر عمود کنید و فاصله پای عمود تا مرکز نسبت مورد نظر است.

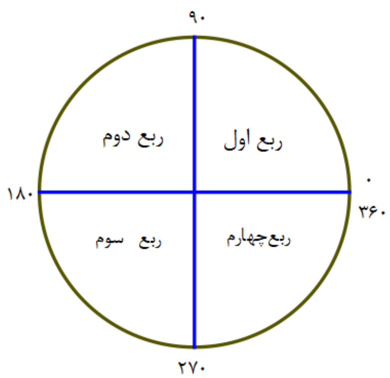


مثلا: در یک دایره مثلثاتی مقدار سینوس و کسینوس ۱۲۰ درجه را نشان میدهیم.

$$\sin 120 = OE$$
$$\cos 120 = OF$$



ناحیه های مثلثاتی: تمام زوایای بین ۰ تا **۹۰** درجه را ربع اول و زوایای بین **۹۰** تا **۱۸۰** درجه را ربع دوم و زوایای بین **۱۸۰** تا **۲۷۰** درجه را ناحیه(ربع) سوم و زوایای بین **۲۷۰** تا **۳۶۰** درجه را ربع چهارم می گوییم.



مثال :مشخص کنید زوایای زیر در کدام ربع دایره قرار دارد؟

الف) $\mathbf{۷۵}^{\circ}$ ب) $\mathbf{۱۳۵}^{\circ}$ پ) $\mathbf{۲۹۰}^{\circ}$ ت) $\mathbf{-۱۳۰}^{\circ}$

نکته بسیار مهم : از روی ناحیه های مثلثاتی میتوان مشخص کرد مقدار نسبت های مثلثاتی مثبت یا منفی است.

بهترین روش برای این کار این است که تصور کنیم نقطه مورد نظر مربوط به زاویه مورد نظر در کدام ناحیه است و تصویر آن نقطه را روی محورهای $\sin, \cos$ پیدا کنید. سپس مثبت یا منفی بودن را از روی محورها تشخیص دهید. محور $\sin$ ها بالا مثبت و پایین منفی است.

ناحیه	sin	cos	tan	cot
اول	+	+	+	+
دوم	+	−	−	−
سوم	−	−	+	+
چهارم	−	+	−	−

محور $\cos$ ها سمت راست مثبت و سمت چپ منفی است. برای تشخیص مثبت یا منفی بودن نسبت

$\tan$ با توجه به اینکه نمیدانید محور آن کجای دایره است بهتر است از تکنیک $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ استفاده کنید یعنی

علامت $\cos,\sin$ را در هم ضرب کنید.

دقت کنید همواره $\cot,\tan$ هم علامت هستند. زیرا عکس یکدیگرند.

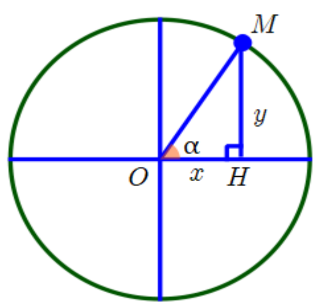
☼ابتدای فصل مقدارهای یک زاویه مثلثاتی را در مثلث قائم الزاویه تعریف کردیم. حال با توجه به اینکه مختصات

$M(x,y)$ را داریم میتوان دوباره نسبت های زاویه α را در مثلث OMH

بنویسیم.

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}\qquad \cot\alpha=\frac{x}{y}$$



در دایره مثلثاتی $r=۱$ پس مختصات هر نقطه در دایره مثلثاتی به صورت $M(\cos\alpha,\sin\alpha)$ داده میشود.

مثال: در دایره مثلثاتی زوایای **۳۶۰,۲۷۰,۱۸۰,۹۰,۰** را نشان دهید و مقدار نسبت های مثلثاتی آنها را بیابید.

☼یک نکته بسیار مهم در مورد نسبت های $\sin$ و $\cos$

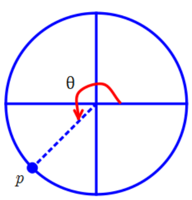
از آنجاییکه دایره مثلثاتی دایره ای به شکل **۱** واحد است پس با توجه روی محور عمودی(محور $\sin$)و توجه روی محور افقی(محور $\cos$) متوجه میشویم که کمترین مقدار این محورها در دایره **۱−** و بیشترین مقدار آن **۱+** است.

$$-۱\le\sin\alpha\le۱$$
$$-۱\le\cos\alpha\le۱$$

مثال : اگر $\sin x.\cos x < ۰$ و $\sin x.\cot x > ۰$ باشد، انتهای کمان روبرو به زاویه x در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

مثال : اگر $\sin\alpha\cos\alpha > ۰$ و $\cos\alpha.\tan\alpha < ۰$ آن‌گاه انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟

مثال : مطابق شکل نقطه P روی دایره مثلثاتی است. اگر $P(\frac{۱}{\sqrt{۵}}, b)$ باشد، مقدار $\tan\theta$ چقدر است؟



مثال : نقطهٔ $P(x, -\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ در دستگاه مختصات دکارتی مفروض است. اگر θ زاویهٔ بین OP و جهت مثبت محور **x** ها، و در ناحیه سوم باشد، مقدار نسبت‌های $\sin\theta, \tan\theta$ را مشخص کنید.

حدود تغییرات نسبت ها

بهترین روش برای یافتن حدود تغییرات نسبت های $\sin, \cos$ محاسبه مقادیر آنها روی دایره مثلثاتی است. بیشترین اشتباه در مورد محاسبه ها وقتی است که محدوده ی زاویه ای داده میشود و از طرفین نامساوی $\sin$ یا $\cos$ میگیرید.

مثلاً $150 \leq \alpha \leq 30$ از روی شکل مشخص است که تمام زوایایی که در این ناحیه قرار دارند دارای سینوسی در بازه ی $1 \leq \sin\alpha \leq \frac{1}{2}$ هستند. اما اگر از طرفین $\sin$ بگیرید داریم: $\frac{1}{2} \leq \sin\alpha \leq \frac{1}{2}$ که اشتباه است.

مثال : اگر θ زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد و $\sin\theta = 5 - 2m$ حدود m را بیابید.

مثال : اگر $30 < x < 120$ حدود تغییرات $\cos x$ را مشخص کنید.

مثال : با فرض($\cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3}$) حدود m را چنان تعیین کنیدکه اگر $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6}$، تساوی $\cos x = 2 - 3m$ برقرار باشد.

مثال : اگر $۶۰ \le x \le ۱۸۰$ و داشته باشیم $\cos x = ۲m - ۳$ حدود m را بیابید.

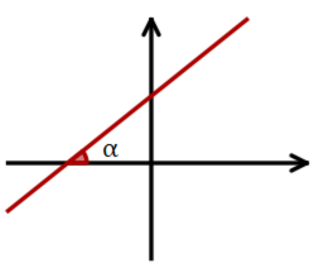
مثال : اگر α در ناحیه سوم و $\sin \alpha = \frac{۳m - ۲}{۴}$ حدود m را بیابید.

رابطه بین شیب خط و تانژانت زاویه

شیب هر خط که محور افقی را قطع میکند، با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور x ها برابر است. به عبارت دیگر اگر α زاویه ای باشد که خط با جهت مثبت محور x ها میسازد داریم: $\tan \alpha$ = شیب خط

در شکل روبرو معادله خط رسم شده $y = mx + h$ است.

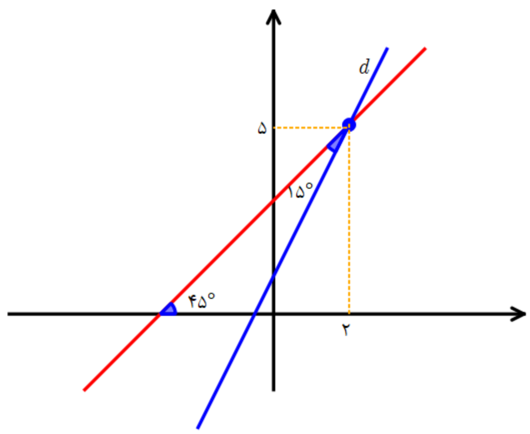
پس طبق تعریف بالا : $m = \tan \alpha$



مثال : معادله خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x ها، زاویه ۳۰° بسازد و از نقطه $(۳,۰)$ بگذرد.

مثال : طول نردبانی را بیابید که هرگاه آن را به لبه دیواری به ارتفاع **۲** متر تکیه دهیم، شیب آن $\frac{۴}{۳}$ باشد.

مثال :در شکل مقابل معادله خط را بنویسید.

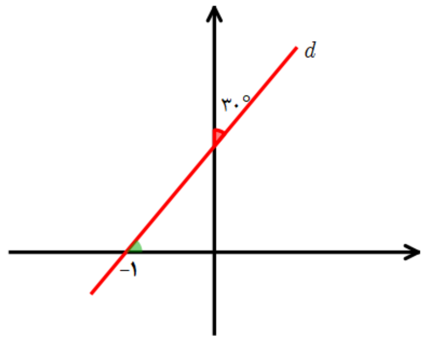


مثال: معادله خطی را به دلخواه بنویسید که با قسمت مثبت محور طول‌ها زاویه **۶۰** درجه بسازد.

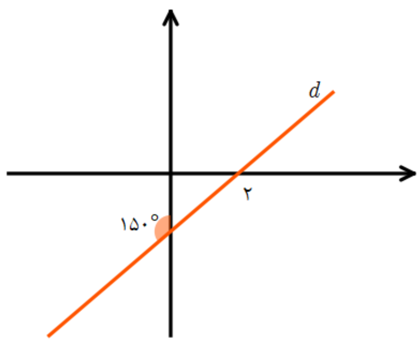
مثال: معادله خطی را بنویسید که با قسمت مثبت محور y ها زاویه **۴۵** درجه ساخته است و از نقطه $(۲,۰)$ گذشته است.

مثال: معادله خطی را بنویسید که بامحور xها زاویه ۶۰° بسازد و از نقطه $(۲,-۳)$ بگذرد.

مثال: معادله خط d را بنویسید



مثال: معادله خط d را بنویسید



اتحادهای مثلثاتی

در ابتدای فصل برای زاویه حاده در مثلث قائم الزاویه رابطه هایی را اثبات کردیم. اکنون میخواهیم روابط مهمی که برای هر زاویه در دایره مثلثاتی برقرار است را به عنوان یادآوری نوشته و در ادامه مثال هایی را حل کنیم که حفظ کردن آنها لازم نیست اما روش اثبات مهم است.

اتحادهای مثلثاتی که برای زاویه برقرار است.

① $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$

② $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

③ $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

④ $۱+\tan^{۲}\alpha=\dfrac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$

⑤ $۱+\cot^{۲}\alpha=\dfrac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$

مثال: تساوی های زیر را اثبات کنید.

$$(۱-\sin x)(۱+\sin x)=\cos^۲ x$$

$$\tan^۲ x-\tan^۲ x\sin^۲ x=\sin^۲ x$$

مثال: آیا زاویه ای مانند x وجود دارد که $\sin x=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ و $\cos x=\frac{۱}{۳}$ باشد ؟

مثال : اگر θ زاویه ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد و $\tan\theta=\frac{۴}{۳}$ باشد. در این صورت $\cos\theta$ مثلثاتی زاویه θ را بیابید.

مثال : اگر $\cos\alpha=-\frac{۲}{۳}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ناحیهٔ سوم باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را بدست آورید.

مثال : اگر $\sin\alpha = \frac{-۳}{۵}$ و α در ربع سوم باشد ، حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$P = ۵\cos\alpha \times ۴\tan\alpha + ۳\cos\alpha$$

مثال : هرگاه $\sin\theta = -۲\cos\theta$ حاصل $\cot\theta$ چقدر است؟

مثال : هر گاه $\tan\theta = -۲$ باشد، حاصل عبارت مقابل را بدست آورید: $\frac{\sin\theta - ۲\cos\theta}{۳\sin\theta + \cos\theta}$

مثال: درستی رابطه روبرو را نشان دهید. $(\sin\alpha + \cos\alpha)(\frac{۱}{\sin\alpha} - \frac{۱}{\cos\alpha}) = \cot\alpha - \tan\alpha$