

## تجزیه در سه سوت

-۱

در عبارت درجه ۳ اگر یکی از عامل‌ها  $(x - a)$  را بدانیم به روش زیر می‌توان عبارت درجه دو بعدی را حساب کرد: باید اولین جمله را تقسیم بر اولین جمله و آخرین جمله را تقسیم بر آخرین جمله کرد و مقادیر به دست آمده را به عنوان جمله اول و آخر در پرانتز حاصل نوشت.

$$x^3 + 5x^2 - 6 = (x - 1)(x^2 + k + 6)$$

$\frac{x^3}{x} = x^2$        $\frac{-6}{-1} = 6$

حال می‌خواهیم جمله وسط را حساب کنیم کافی است جمله دوم عامل  $(x - a)$  یعنی  $(-a)$  را در جمله‌ی اول حاصل (یعنی پرانتز سه جمله‌ای) ضرب کرده (دو مقدار نزدیک به هم) و با  $kx$  جمع و برابر جمله دوم عبارت اولیه (جمله با ضریب  $x^2$ ) قرار داده و سپس  $k$  که همان جمله دوم است به دست می‌آید.

$$(x - 1)(x^2 + k + 6)$$

$$-1 \times x^2 + kx = 5x^2 \Rightarrow k = 6x$$

از این روش در تجزیه و حد مبهم  $\frac{0}{0}$  می‌توان استفاده کرد.

## مثال‌هایی از تجزیه در سه سوت

### مثال ۱:

$$\begin{aligned} (x^3 + x^2 - 12) &= (x - 2)(x^2 + k + 6) \\ \div \quad \quad \quad \div \quad \quad \quad \div \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ -2x^2 + kx &= x^2 \Rightarrow k = 3x \end{aligned}$$

حاصل تجزیه  $\Rightarrow (x - 2)(x^2 + 3x + 6)$

می‌دانیم به ازای  $x = 2$  صفر می‌شود، بنابراین:

### مثال ۲:

$$\begin{aligned} (x^3 + x - 10) &= (x - 2)(x^2 + k + 5) \\ \div \quad \quad \quad \div \quad \quad \quad \div \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ -2x^2 + kx &= 0 \Rightarrow k = 2x \end{aligned}$$

ضرب  $\times$  در عبارت اولیه صفر است.

می‌دانیم به ازای  $x = 2$  صفر می‌شود، بنابراین:

حاصل تجزیه  $\Rightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 5)$

### مثال ۳:

$$\begin{aligned} x^3 + x - 30 &= (x - 3)(x^2 + k + 10) \\ \div \quad \quad \quad \div \quad \quad \quad \div \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ -3x^2 + kx &= 0 \Rightarrow k = 3x \end{aligned}$$

حاصل تجزیه  $\Rightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 10)$

می‌دانیم به ازای  $x = 3$  صفر می‌شود، بنابراین:

### مثال ۴:

$$\begin{aligned} x^3 + 5x^2 - 72 &= (x - 3)(x^2 + k + 24) \\ \div \quad \quad \quad \div \quad \quad \quad \div \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ -3x^2 + kx &= 5x^2 \Rightarrow k = 8x \end{aligned}$$

حاصل تجزیه  $\Rightarrow (x - 3)(x^2 + 8x + 24)$

می‌دانیم به ازای  $x = 3$  صفر می‌شود، بنابراین:

### مثال ۵:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x - 3 &= (x - 1)(x^2 + k + 3) \\ \div \quad \quad \quad \div \quad \quad \quad \div \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ -x^2 + kx &= x^2 \Rightarrow k = 2x \end{aligned}$$

حاصل تجزیه  $\Rightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 3)$

می‌دانیم به ازای  $x = 1$  صفر می‌شود، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = ax_0 + b$$

-۱۲ قضیه:

$$x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = a_n x_0^n + \dots + a_1 x_0 + a_0 \quad -۱۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^4 - 3x^2 + 8x - 12) = 32 - 12 + 16 - 12 = 24 \quad -۱۴$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \quad -۱۵$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

$$x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \quad -۱۶$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$$

$$x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad -۱۷$$

$$\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kL_1$$

$$x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \quad -۱۸$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$$

$$x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad -۱۹$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}, \quad (L_2 \neq 0)$$

$$x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2 \quad -۲۰$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L_1}{L_2}, \quad (L_2 \neq 0)$$

$$x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad -۲۱$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^n = (L_1)^n$$

$$x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \quad -۲۲$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L_1}$$

$$x \rightarrow a$$

که اگر  $n$  زوج بود باید  $L_1 > 0$  باشد.

۲۳- مثال: حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 8x + 7}{3x^2 + 6x - 9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-7)}{\cancel{(x-1)}(3x+9)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-7}{3x+9} = \frac{-6}{12} = \frac{-1}{2}$$

تابع  $f(x)$  در  $x = 1$  تعریف نشده است.

۲۴- نکته: اگر  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ،  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، آن گاه برای محاسبه  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ، ابتدا باید عامل صفرکننده‌ی صورت و مخرج را حذف کرد. سپس به کمک قضایای حد، حد را محاسبه کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)} = -1$$

تابع در  $x = 1$  حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{|x|-1} = 1$$

حد چپ و راست تابع در  $x = 1$  برابر ۱ است. بنابراین حد تابع برابر ۱ است.

۲۷- حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+13}}{\sqrt{7x+4} - \sqrt{-x+28}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+13}}{\sqrt{7x+4} - \sqrt{-x+28}} \times \frac{\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+13}}{\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+13}}$$

$$\times \frac{\sqrt{7x+4} + \sqrt{-x+28}}{\sqrt{7x+4} + \sqrt{-x+28}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4(x-3) (\sqrt{7x+4} + \sqrt{-x+28})}{8(x-3) (\sqrt{5x+1} + \sqrt{x+13})} = \frac{4(5+5)}{8(4+4)} = \frac{5}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow x} \sin x = \sin x, \quad \text{۲۸- نکته:}$$

$$x \rightarrow x,$$

$$\lim_{x \rightarrow x} \cos x = \cos x, \quad \text{۲۹- نکته:}$$

$$x \rightarrow x,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(a), \quad \left( a \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{۳۰-}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{Cotg} x = \operatorname{Cotg}(a), \quad (a \neq k\pi) \quad \text{۳۱-}$$

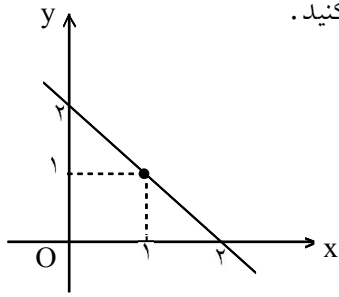
$$x \rightarrow a$$

$$\lim_{x \rightarrow x} ax + b = ax + b \quad \text{۳۲- قضیه:}$$

$$x \rightarrow x,$$

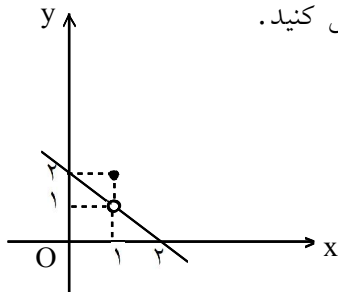


۳۹- با استفاده از نمودار، حد تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده (در صورت وجود) مشخص کنید.



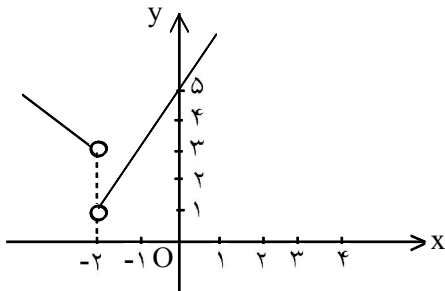
$$\lim_{x \rightarrow 1} (-x + 2)$$

۴۰- با استفاده از نمودار، حد تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده (در صورت وجود) مشخص کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ? \quad f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

۴۱- با استفاده از نمودار، حد تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده (در صورت وجود) مشخص کنید.



$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x > -2 \\ -x + 1, & x < -2 \end{cases}$$

۴۲- حد چپ و حد راست تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید و معلوم کنید آیا این تابع دارای حد است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-1}, & x \geq 2 \\ x^3 + 2, & x < 2 \end{cases}$$

در نقطه‌ی  $x = 2$

۴۳- حد چپ و حد راست تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید و معلوم کنید آیا این تابع دارای حد است؟

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1}, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$

در نقطه‌ی  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\cos x + \sin^2 x + 1)$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{3}$$

۴۴- حد مقابل را حل کنید.

۴۵- از روی نمودار، حد راست و حد چپ تابع را، وقتی  $x$  به سمت عدد داده شده میل می‌کند، تعیین کنید و مشخص نمایید که آیا تابع حد دارد؟

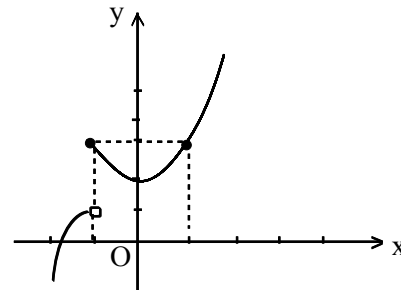
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \geq -1 \\ -x^2 + 2, & x < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$x \rightarrow -1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

$$x \rightarrow -1^-$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[2]{f(x)}$$

$$x \rightarrow x_0$$

۴۶- اگر  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -3$  باشد، حد تابع مقابل را حساب کنید.

۴۷- اگر  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -3$  باشد، حد تابع مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x))$$

$$x \rightarrow x_0$$

۴۸- تابع  $f(x) = \begin{cases} (a+1)x + 3, & x > -2 \\ -2x^2 + 1, & x < -2 \end{cases}$  مفروض است. عدد  $a$  را چنان بیابید که وقتی  $x \rightarrow -2$  تابع حد داشته باشد.

۴۹- تابع  $f(x) = \begin{cases} ax + 2b, & x > 3 \\ ax^2 + bx + 2, & x < 3 \end{cases}$  مفروض است. عددهای  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos 2x + \sin \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

۵۰- حد مقابل را حل کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{2x^2 - 3x + 1}$$

۵۱- حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}^+} \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$$

۵۲- حد مقابل را حساب کنید:

$$x \rightarrow \frac{\pi}{9}^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{x+18}}{\sqrt{3x+7}-1}$$

۵۳- حد مقابل را حساب کنید:

$$x \rightarrow -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$$

۵۴- حد مقابل را حساب کنید.

$$x \rightarrow 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{(-2x^2 + 1)^3}{x^2 + 1}$$

۵۵- حد مقابل را حل کنید.

$$x \rightarrow \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (2 \sin x - 1)$$

۵۶- حد مقابل را حل کنید.

$$x \rightarrow \frac{\pi}{6}$$

۵۷- دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت  $f(x) = x^2 - x - 2$  و  $g(x) = \frac{1}{x-2}$  داده شده‌اند. حد هر یک از این دو تابع را وقتی  $x \rightarrow 3$  به دست آورید.

۵۸- در صورتی که  $f(x+2) = \frac{x+4}{x}$  باشد،  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$$

۵۹- حد مقابل را حساب کنید.

$$x \rightarrow -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 12}{2 - x - x^2}$$

۶۰- حد مقابل را حساب کنید:

$$x \rightarrow -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

۶۱- حد زیر را حساب کنید.

$$x \rightarrow 0$$



۶۲- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}}$$

$$x \rightarrow (-3)$$

۶۳- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$$

$$x \rightarrow (-2)$$

۶۴- اگر  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$  و  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -3$  باشد، حد تابع مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$$

$$x \rightarrow x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

$$x \rightarrow 1$$

۶۵- حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{x+6}}{x+2}$$

$$x \rightarrow -2$$

۶۶- حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x - 1}{9x^2 - 1}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{3}$$

۶۷- حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 9} + \frac{x^2 + x}{x}$$

$$x \rightarrow 0$$

۶۸- حد مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$$

$$x \rightarrow 2^+$$

۶۹- حد مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$x \rightarrow 0$$

۷۰- حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{6}$$

۷۱- حد زیر را حساب کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$x \rightarrow 1$$

۷۲- حد مقابل را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{x+6}}{x+2}$$

$$x \rightarrow -2$$

۷۳- حد تابع زیر را حساب کنید.

۷۴- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -3$  باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5 f(x)}$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 3$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$  محاسبه کنید.

۷۵- حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x+12} - x}$$

$$x \rightarrow 4$$

۷۶- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\cos x} \right)$$

$$x \rightarrow 0$$

۷۷- حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$$

$$x \rightarrow 1$$

۷۸- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x+7}}$$

$$x \rightarrow 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 5}$$

$$x \rightarrow 5$$

۷۹- حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+25} - 5}{x}$$

$$x \rightarrow 0$$

۸۰- بدون استفاده از هم‌ارزی و قاعده‌ی هوییتال، حد زیر را در صورت وجود بیابید.

۸۱- بدون استفاده از هم‌ارزی و قاعده‌ی هوییتال، حد زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x}$$

۸۲- حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 5x + 4}$$

۸۳- در صورتی که  $f(x - 3) = \frac{x + 5}{x - 1}$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  را حساب کنید.

۸۴- اگر  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = -1$ ، حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 3} (f(x))^2 & \text{(ب)} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x) + 5h(x)} & \text{(د)} \\ \lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + 2h(x)) & \text{(الف)} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{g(x)} & \text{(ج)} \end{array}$$

۸۵- اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 10$  باشد  $a$  و  $b$  را حساب کنید.

۸۶- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{2x + 3}}{\sqrt{x + 1} - 2} & \text{(ب)} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x + 3}} & \text{(الف)} \end{array}$$

۸۷- اگر  $f(x) = 3x[x] + 4b[x + 2]$  در  $x = 5$  دارای حد باشد، مقدار  $b$  و حاصل حد را حساب کنید. [ ] نماد جزء صحیح است.

۸۸- اگر  $f(x) = (3x^2 - ax + 2b - 1)[x]$  در  $x = 1$  و  $x = 5$  دارای حد باشد،  $a$  و  $b$  را حساب کنید.

۸۹- حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

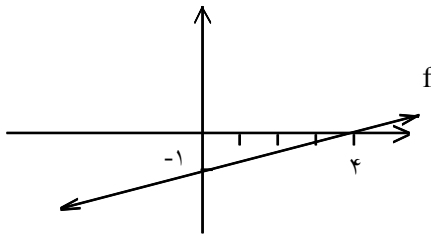
$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 8} - 2}{x^2 - 4x} & \text{(ب)} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4x - 4}}{\sqrt{x^2 - 1}} & \text{(الف)} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{x^2 + x - 1} = 1$$

۹۰- تابع  $g$  را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم:

$$91- \text{ اگر } f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & x > 2 \\ x^3 + 4b & x < 2 \end{cases} \text{ در } x = 2 \text{ دارای حد باشد } a - b \text{ را حساب کنید.}$$

$$92- \text{ اگر } f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x > 1 \\ 5x - 7 & x < 1 \end{cases} \text{ در } x = 1 \text{ دارای حد باشد، } a \text{ را حساب کنید.}$$



۹۳- اگر نمودار تابع خطی  $f(x)$  به صورت زیر باشد،

$$\lim_{x \rightarrow 8} (f(x) - f^{-1}(x)) \text{ را حساب کنید.}$$

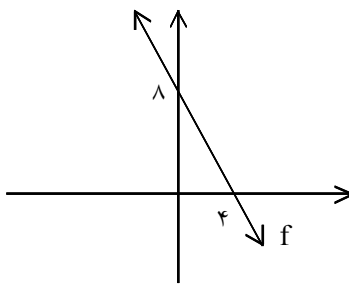
۹۴- حاصل هریک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 - [-x]$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 2}{\sqrt{3x + 4}}$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$



۹۵- شکل زیر نمودار  $f(x)$  است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x^2 - 5x + 4}$  را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x + 3}}{x^2 - 1}$$

۹۶- حد مقابل را محاسبه کنید.

۹۷- پیوستگی در بازه:

می‌گوئیم تابع  $f$  در بازه‌ی  $[a, b]$  پیوسته است اگر و فقط اگر  $f$  در تمام نقاط  $(a, b)$  پیوسته باشد و در  $x = a$  پیوستگی راست و در  $x = b$  پیوستگی چپ داشته باشد.

۹۸- مقدار  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که  $f(x)$  در  $x = 3$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+7}-4}{x-3} + b & x > 3 \\ 6 & x = 3 \\ a|x| + 1 & x < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 6 \\ \frac{3}{8} + b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = a[3^-] + 1 = 2a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{3x+7-16}{(x-3)(3x+7+4)} = \frac{3x-9}{(x-3) \times 8} = \frac{3}{8} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 6 \\ \frac{3}{8} + b = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = \frac{45}{8} \end{cases}$$

۹۹- پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید. در صورتی که تابع در نقطه‌ی داده شده پیوسته نباشد، آیا

$$f(x) = \frac{2x^2 + x}{x-2}, (x = -2)$$

پیوستگی راست یا پیوستگی چپ دارد؟

۱۰۰- پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید. در صورتی که تابع در نقطه‌ی داده شده پیوسته نباشد، آیا

$$f(x) = \frac{x+2}{2x-3}, (x = 3)$$

پیوستگی راست یا پیوستگی چپ دارد؟

۱۰۱- پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید. در صورتی که تابع در نقطه‌ی داده شده پیوسته نباشد، آیا

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x, & x > -\frac{3}{2} \\ -2x + 3, & x < -\frac{3}{2} \end{cases}, (x = -\frac{3}{2})$$

پیوستگی راست یا پیوستگی چپ دارد؟

۱۰۲- پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید. در صورتی که تابع در نقطه‌ی داده شده پیوسته نباشد، آیا

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1}, & x > 3 \\ 2, & x = 3 \\ 5x - 13, & x < 3 \end{cases}, (x = 3)$$

پیوستگی راست یا پیوستگی چپ دارد؟

۱۰۳- پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید. در صورتی که تابع در نقطه‌ی داده شده پیوسته نباشد، آیا

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 1}, & x \geq 0 \\ (2x-1)^2, & x < 0 \end{cases}, (x = 0)$$

پیوستگی راست یا پیوستگی چپ دارد؟

۱۰۴- پیوستگی راست و پیوستگی چپ هر یک از تابع‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 2, & x \geq -1 \\ -x^2 + 4x, & x < -1 \end{cases}, (x = -1)$$

۱۰۵- تابع  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{و } |x| < 2 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 1} & \text{و } |x| \geq 2 \end{cases}$  داده شده است. مقادیر  $a$  و  $b$  را به قسمی محاسبه کنید که تابع روی  $R$  (مجموعه اعداد حقیقی) پیوسته باشد.

۱۰۶- معلوم کنید در چه بازه‌ای تابع زیر پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} \sqrt{|x-1|} & x \neq 1 \\ x & x = 1 \end{cases}$$

۱۰۷- ثابت کنید تابع زیر در نقاط داده شده پیوسته نیست.

$$f(x) = \begin{cases} |x-3| & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$$

در نقطه‌ی ۳.

۱۰۸- مقدار ثابت  $c$  را در تابع زیر طوری پیدا کنید که تابع در نقطه‌ی داده شده‌ی  $a$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & x \leq 4 \\ cx - 1 & 4 < x \end{cases} \quad a = 4$$

۱۰۹- مقدار ثابت  $c$  را در تابع‌های زیر طوری پیدا کنید که تابع در نقطه‌ی داده شده‌ی  $a$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} cx - 1 & x < 2 \\ cx^2 & 2 \leq x \end{cases} \quad (a = 2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & x \neq -1 \\ 0 & x = -1 \end{cases}$$

۱۱۰- نقاط ناپیوستگی تابع مقابل را در دامنه‌ی آن پیدا کنید.

۱۱۱- نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$  را رسم کرده و نقاط ناپیوستگی آن را به دست آورید (ادعای خود را ثابت کنید).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & x \neq 1, 2 \\ \frac{x+2}{x} & x = 1 \end{cases}$$

۱۱۲- نقاط ناپیوستگی تابع مقابل را در دامنه‌ی آن پیدا کنید.

۱۱۳-  $a$  و  $b$  را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه‌ی  $x = 1$  پیوسته باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax + b & x > 1 \\ 6 & x = 1 \\ bx - 4 & x < 1 \end{cases}$$

۱۱۴- مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 8 & \text{و } x < 2 \\ a & x = 2 \\ x + 3b & \text{و } x > 2 \end{cases}$  در نقطه  $x = 2$  پیوسته باشد؟

۱۱۵- ثابت کنید اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & -1 \leq x \leq 0 \\ cx^2 + d & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ bx + d & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$  روی بازه  $[-1, 1]$  پیوسته باشد آن گاه  $c = 2b$  و  $d = 0$ .

۱۱۶- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} a[4x] - b & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ a \sin \frac{\pi}{4}x + b & x > 1 \end{cases}$  ضرایب  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که در  $x_0 = 1$  پیوسته باشد. ( $[ ]$  نماد جزء صحیح است).

۱۱۷- پیوستگی تابع زیر را در نقطه  $x = 2$  بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x^2 - 20}{x^2 - 4} & , x < 2 \\ 2x + 2 & , x > 2 \\ 6 & , x = 2 \end{cases}$$

۱۱۸- به ازای چه مقادیری از  $a$  تابع  $f$  به معادله  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + ax + 1}$  همواره پیوسته است؟

۱۱۹-  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که تابع  $f(x) = \begin{cases} -ax - 1 & x > 2 \\ 1 & x = 2 \\ bx^2 - 3 & x < 2 \end{cases}$  در  $x = 2$  پیوسته باشد.

۱۲۰- مقدار  $b$  و  $a$  را چنان بیابید که تابع زیر در  $x_0 = 2$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & x > 2 \\ 1 & x = 2 \\ x + a & x < 2 \end{cases}$$

۱۲۱- مقادیر  $a$  و  $b$  را چنان بیابید تا تابع زیر در  $x = 2$  پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} & x > 2 \\ a & x = 2 \\ b + x & x < 2 \end{cases}$$

۱۲۲- تابع  $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x > -2 \\ 13 & x = -2 \\ 2ax^2 + bx - 1 & x < -2 \end{cases}$  داده شده است  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که تابع در نقطه‌ای به طول  $x = -2$  پیوسته باشد.

۱۲۳- قدر مطلق تفاضل حد چپ و راست تابع  $f$  به معادله  $y = \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|}$  در نقطه  $x = 1$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۲۴- تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{-x + |x - 2|}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$  به ازای کدام مقدار  $a$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۲۵- تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$  به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$  در  $x = 0$  پیوسته است؟

(۱)  $\{0\}$  (۲)  $\emptyset$  (۳)  $\{2\}$  (۴)  $\{0, 2\}$

۱۲۶- اگر  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$  آنگاه  $a$  کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴) -۵

۱۲۷- به ازای کدام مقدار  $a$  تابع  $f(x) = \begin{cases} 3x + \frac{|2x|}{x} & x \neq 0 \\ a - 3 & x = 0 \end{cases}$  در نقطه  $x = 0$  پیوستگی چپ دارد؟

(۱) -۱ (۲) -۵ (۳) ۱ (۴) ۵

۱۲۸- اگر تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & x < 1 \\ bx - 1 & x > 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$  بر  $R$  پیوسته باشد،  $a + b$  چقدر است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲۹- حد عبارت  $\frac{\sqrt[3]{x - 2} - 1}{x^2 - 9}$  وقتی  $x \rightarrow 3$  برابر کدام است؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳)  $\frac{1}{9}$  (۴)  $\frac{1}{18}$

۱۳۰- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x + a & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ x - 2b & x < 1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$  پیوسته است.  $a + b$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲



۱۳۱- به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۳۲- حد کسر  $\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x+3}-3}$  وقتی  $x$  به سمت ۳ میل می کند برابر است با:

(۱)  $\frac{4}{3}$  (۲)  $\frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{3}$

۱۳۳- تابع  $f(x) = \begin{cases} x-1 & x > 1 \\ \sqrt{1-x^2} & -1 \leq x \leq 1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$  در نقطه  $x = 1$  دارای کدامیک از وضعیت های زیر است؟

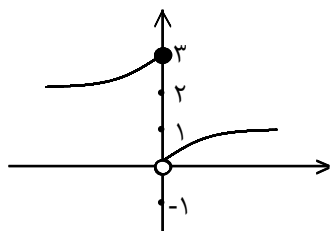
(۱) پیوستگی چپ دارد (۲) منفصل است (۳) پیوسته است (۴) پیوستگی راست دارد

۱۳۴- حاصل  $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x+3}{\sqrt{x+3}}$  کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۳

۱۳۵- فرض کنیم که  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}(\sqrt[3]{x+8}-2) & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$  اگر  $f$  در نقطه صفر پیوسته باشد، آنگاه مقدار  $a$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{12}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{1}{3}$



۱۳۶- نمودار تابع  $f$  شکل مقابل است.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  کدام است؟

(۱) ۰ (۲)  $1/5$  (۳) ۲ (۴) ۳

۱۳۷- تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ -2x & -1 \leq x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$  از نظر پیوستگی در کدام گزینه صدق می کند؟

- (۱) در  $x = -1$  پیوسته و در  $x = 1$  از چپ پیوسته  
 (۲) در  $x = -1$  ناپیوسته و در  $x = 1$  از راست پیوسته  
 (۳) در  $x = -1$  ناپیوسته و در  $x = 1$  از چپ پیوسته  
 (۴) در  $x = -1$  پیوسته و در  $x = 1$  از راست پیوسته

۱۳۸- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 2 \\ x^2+ax+b & x < 2 \end{cases}$  داده شده. اگر در نقطه  $x = 2$  پیوسته باشد کدام درست است؟

(۱)  $a = 2$  و  $b = 1$  (۲)  $a + 2b - 1 = 0$  (۳)  $2a + b = 0$  (۴)  $2a + b + 1 = 0$

۱۳۹- حد کسر  $\frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2 + x}}$  وقتی  $x \rightarrow 0$  برابر است با:

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)  $+\infty$

۱۴۰- تابع  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2 & x > -1 \\ 3 & x = -1 \\ -3x + b & x < -1 \end{cases}$  در  $x = -1$  پیوسته است  $a$  و  $b$  کدامند؟ ( $a \neq 0$ )

- (۱)  $a = 1$  و  $b = 0$  (۲)  $a = -1$  و  $b = 1$  (۳)  $a = 1$  و  $b = -1$  (۴)  $a = -1$  و  $b = -1$

۱۴۱- به ازای کدام مقدار  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x} & ; x \neq 1 \\ \frac{1-x}{a} & ; x = 1 \end{cases}$  بر روی اعداد حقیقی غیر منفی پیوسته است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

۱۴۲- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x > 1 \\ ax + 3 & x \leq 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  پیوسته است آنگاه:

- (۱)  $a = -1$  (۲)  $a = 1$  (۳)  $a = 0$  (۴)  $a = 2$

۱۴۳- حد عبارت  $\frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} + \frac{x-2}{\sqrt{x+2} - 2}$  وقتی  $x \rightarrow 2$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{257}{16}$  (۲) ۲ (۳)  $\frac{33}{16}$  (۴)  $\frac{65}{16}$

۱۴۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $a$  تابع با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & ; x \geq -1 \\ 2x+1 & ; x < -1 \end{cases}$  در نقطه  $x = -1$  حد دارد؟

- (۱)  $\{0\}$  (۲)  $\{2\}$  (۳)  $\emptyset$  (۴)  $\mathbb{R}$

۱۴۵- مجموع مقادیر حد چپ و راست تابع  $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \frac{|x - 1|}{x - 1}$  وقتی  $x \rightarrow 1$  چقدر است؟

- (۱) ۳ (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۴

۱۴۶- به ازای کدام مقدار  $a$  تابع  $\begin{cases} x^2 + \frac{|2x|}{x} & ; x \neq 0 \\ 2a - 1 & ; x = 0 \end{cases}$  در نقطه  $x = 0$  از چپ پیوسته است؟

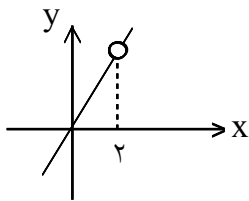
- (۱) -۱ (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

۱۴۷-  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{2 - \sqrt[3]{x}}{4 - \sqrt{2x}}$  برابر کدام است؟

- (۱)  $-\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{1}{6}$  (۳)  $\frac{1}{3}$  (۴)  $\frac{2}{3}$

۱۴۸- در تابع  $y = \begin{cases} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases}$  اگر تابع در  $x = 2$  پیوستگی چپ داشته باشد، آنگاه:

(۱)  $k = -4$  (۲)  $k = 4$  (۳)  $k = 2$  (۴)  $k = -2$



۱۴۹- شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2}$  است.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۵۰- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  کدام است؟  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} & x \geq 1 \\ 2x-1 & x < 1 \end{cases}$

(۱) -1 (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۵۱- حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{2x^2 - 3x - 2}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{5}$  (۲)  $\frac{3}{5}$  (۳)  $\frac{3}{10}$  (۴)  $\frac{3}{20}$

۱۵۲- حد تابع  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x - 1}{\sqrt{4x - 4} + x^2 - 1}$  وقتی  $x \rightarrow 1^+$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $\sqrt{2}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱۵۳- اگر فرض کنیم  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + ax + b} = 2$  مقدار  $2a + b$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۵۴- مقدار  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 (2x^2 - 2)}{(x^2 - 2x + 1)^2}$  کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) -۴

۱۵۵- مقدار حد روبرو کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^3}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$$

- ۱۲ (۱)      ۱۲<sup>۲</sup> (۲)      ۱۲<sup>۳</sup> (۳)      ۱۲<sup>۴</sup> (۴)

۱۵۶- مقدار حد روبرو کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 6 - \sqrt{x}}{x^2 - 10x + 9}$$

- ۵/۴۸ (۱)      ۵/۶ (۲)      ۵/۲۴ (۳)      -۵/۲۴ (۴)

۱۵۷- تابع  $f(x) = \begin{cases} a[x] + 3a & x < 0 \\ 3x + 5 & x \geq 0 \end{cases}$  در  $x = 0$  پیوسته است. مقدار  $a$  کدام است؟

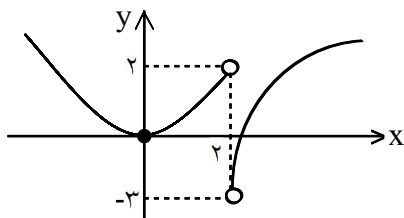
- ۵/۳ (۱)      ۵ (۲)      ۵/۲ (۳)      ۵/۴ (۴)

۱۵۸- اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^3 + 2x^2 + b}{x^2 - 4x + 3} = -\frac{1}{2}$  آنگاه حاصل  $a + b$  کدام است؟

- ۱ (۱)      -۲ (۲)       $x \rightarrow 1$  (۳)      ۲ (۴)

۱۵۹- اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x + 1} + a & x > -1 \\ b & x = -1 \\ \text{tg} \frac{\pi x}{4} & x < -1 \end{cases}$  در  $x = -1$  پیوسته باشد، مقدار  $a \times b$  کدام است؟

- ۴ (۱)      ۴ (۲)      ۲ (۳)      -۲ (۴)

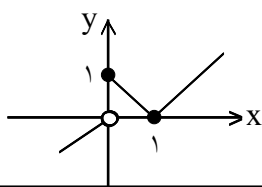


۱۶۰- نمودار تابع  $y = f(x)$  به شکل روبرو است. مقدار  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$  کدام است؟

- ۲ (۱)      -۲ (۲)      ۵ (۳)      -۱ (۴)

۱۶۱- با توجه به شکل  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  برابر است با:

- ۱ (۱)      ۲ (۳)      ۱ (۲)      وجود ندارد (۴)



۱۶۲- اگر حد تابع  $f(x) = \begin{cases} x - a & x \geq 1 \\ 2x + 1 & x < 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  موجود باشد،  $a$  کدام مقدار است؟

(۱) ۲      (۲) -۲      (۳) ۱      (۴) -۱

۱۶۳- به ازای چه مقدار  $a$  تابع  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x + a}$  همواره پیوسته است؟

(۱)  $a = 1$       (۲)  $a > -1$       (۳)  $a > 1$       (۴)  $a < 1$