فصل ۴

مشتق


ماهواره صدا


ماهواره طلوع


ماهواره امید


ماهواره‌بر سیمرغ ـ پایگاه فضایی امام‌خمینی(ره)

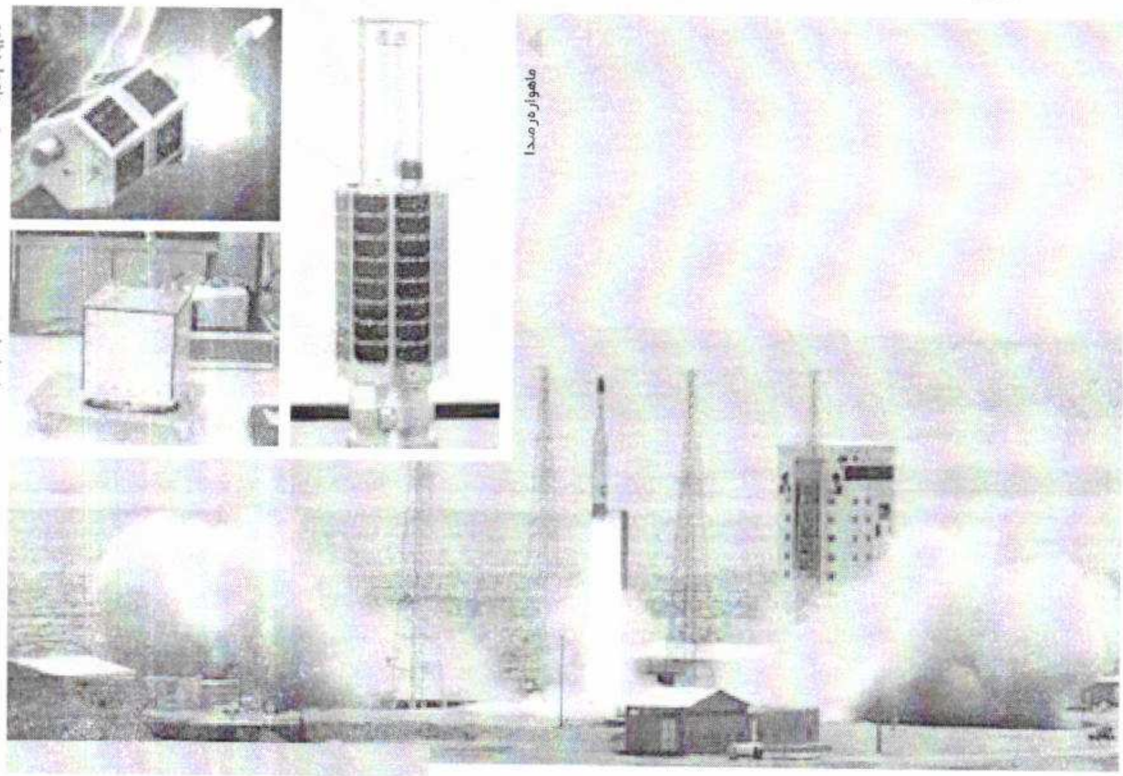
مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی،مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

درس اوّل — آشنایی با مفهوم مشتق

درس دوم — مشتق‌پذیری و پیوستگی

درس سوم — آهنگ تغییر

۴ مشتق



ماهواره‌بر سیمرغ ـ پایگاه فضایی امام‌خمینی(ره)

مفهوم مشتق به مسئله تاریخی خط مماس در یک نقطه از منحنی و مسئله یافتن سرعت لحظه‌ای یک جسم مربوط می‌شود. امروزه مشتق در علوم مختلف کاربردهای وسیع و گسترده‌ای دارد. به‌طور مثال در صنایع فضایی،مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت و کمینه‌سازی زمان سفر با مفهوم مشتق ارتباط دارند.

درس اول — آشنایی با مفهوم مشتق

درس دوم — مشتق‌پذیری و پیوستگی

درس سوم — آهنگ تغییر

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

درس اول

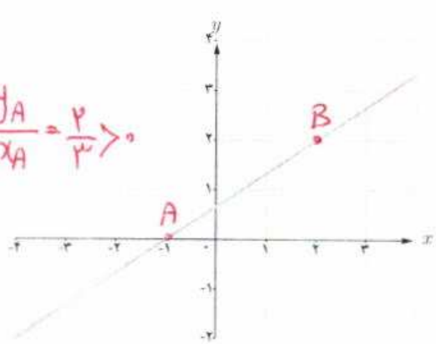
آشنایی با مفهوم مشتق

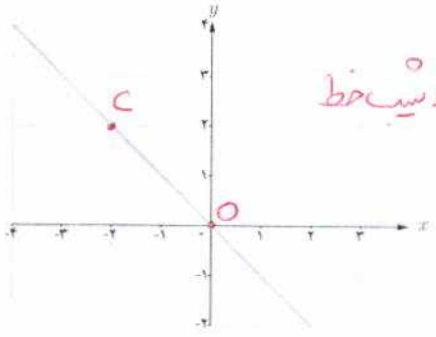
مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است. ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق، به شیب یک خط مربوط می‌شود. به کمک این ایده به تدریج به‌صورت دقیق‌تری با مفهوم مشتق آشنا می‌شویم.

شیب

۱ شیب هر یک از خط‌های داده شده را به‌دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟

شیب خط $= m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{۲}{۳} > ۰$

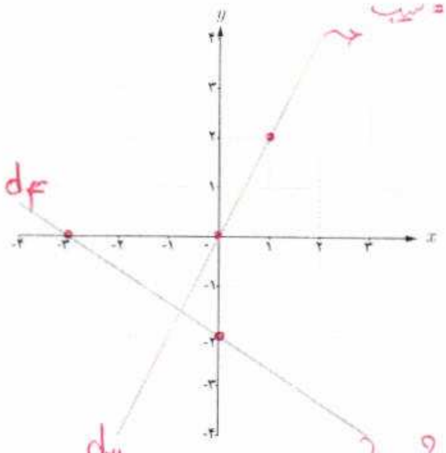


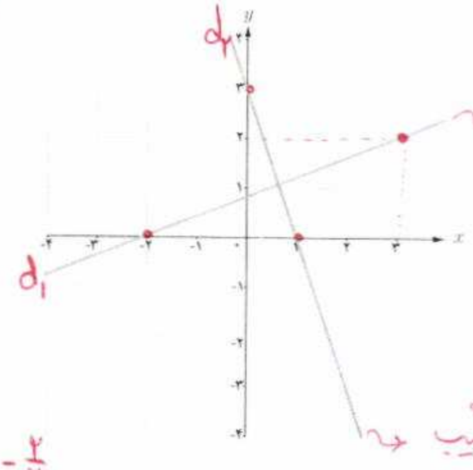


شیب خط $= m = \dfrac{y_C - y_O}{x_C - x_O} = -1 < ۰$

۲ با توجه به جدول روبه‌رو، نمودار مربوط خط‌های d_1 ، d_2 ، d_3 و d_4 را روی شکل مشخص کنید.

خط	d_1	d_2	d_3	d_4
شیب	$\frac{۲}{۵}$	-۳	۲	$-\frac{۲}{۳}$

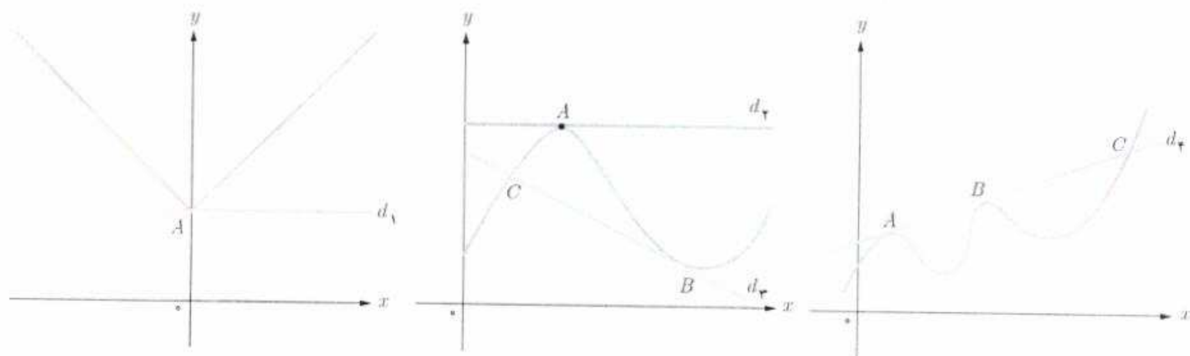




خط مماس بر یک منحنی

یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی مسئله‌ای تاریخی است که زمانی طولانی برای حل آن صرف شده است. مفهوم خط مماس بر یک دایره از زمان‌های گذشته مشخص بوده است. خط مماس بر دایره، خطی است که با دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشد. این تعریف در حالت کلی برای همه منحنی‌ها صادق نیست.

خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_2 در نقطه A، خط d_3 در نقطه B و خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_1 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_3 و d_4 در نقطه c بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.



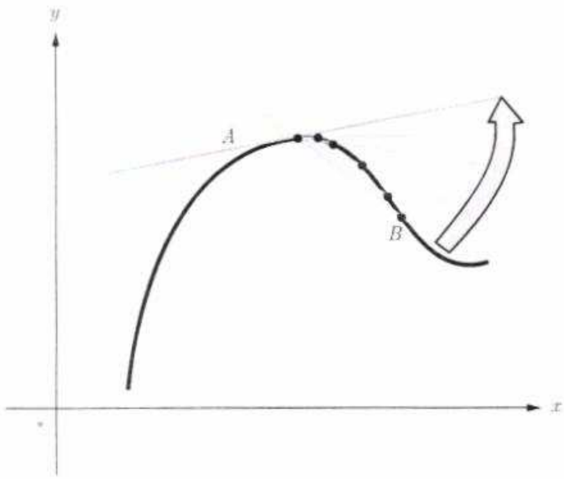
خواندنی

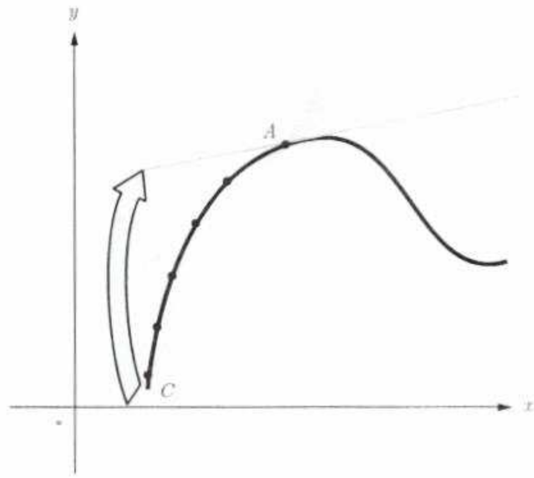
از نظر تاریخی مسئله یافتن خط مماس در یک نقطه از یک منحنی، برای اولین بار در اوایل قرن هفدهم میلادی زمانی مطرح شد که فرما ریاضی‌دان فرانسوی اقدام به تعیین ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های چند تابع خاص کرد. فرما دریافت که خطوط مماس، در نقاطی که منحنی ماکزیمم یا مینیمم دارد باید افقی باشد. از این‌رو به نظرش رسید که مسئله تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم به حل مسئله دیگر، یعنی یافتن مماس‌های افقی مربوط می‌شود. تلاش برای حل این مسئله کلی‌تر بود که فرما را به کشف برخی از ایده‌های مقدماتی مفهوم «مشتق» هدایت کرد. مفهوم مشتق به شکل امروزی آن نخستین بار در سال ۱۶۶۶ میلادی، توسط نیوتن و به فاصله چند سال بعد از او توسط لایب نیتس، مستقل از یکدیگر پدید آمد. شیوه نیوتن مبتنی بر دیدگاه فیزیکی بود و از مشتق برای به دست آوردن سرعت لحظه‌ای استفاده کرد، اما لایب نیتس با دیدگاهی هندسی از مشتق برای به دست آوردن شیب خط مماس در منحنی‌ها استفاده کرد.

اکنون سعی می‌کنیم که به کمک نمودار منحنی، خط مماس بر منحنی در یک نقطه را بررسی کنیم. نقطه ثابت A را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. خطی که از A و B می‌گذرد یک خط قاطع نامیده می‌شود. روی منحنی نقطه‌های دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم و خط‌های گذرنده از A و آن نقطه‌ها را رسم می‌کنیم. حدس بزنید که وقتی نقاط به قدر کافی به A نزدیک می‌شوند، برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به خط مماس در نقطه A نزدیک می‌شود به‌عبارت دیگر خط‌های قاطع به چه خطی نزدیک می‌شوند؟ به خط مماس بر منحنی در نقطه A

اکنون نقطه C را سمت چپ نقطه A اختیار می‌کنیم و خط قاطع AC را رسم می‌کنیم. مانند قبل نقاط دیگری را نزدیک‌تر به نقطه A اختیار می‌کنیم. حدس می‌زنید برای خط‌های قاطع چه اتفاقی می‌افتد؟ به‌طور شهودی می‌توان گفت:

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A حد شیب خط‌های قاطع گذرنده از A است به شرطی که نقطه‌ها به قدر کافی به A نزدیک شوند.





در ادامه این بحث را دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

الف) تابع $f(x)=-x^2+10x$ داده شده است، اگر $0 \le x \le 10$ نقاط $A(2,f(2))$، $B(6,f(6))$، $C(5,f(5))$، $D(4,f(4))$ و $E(3,f(3))$ را روی منحنی در نظر می‌گیریم. شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد یعنی m_{AB} از دستور زیر به‌دست می‌آید:

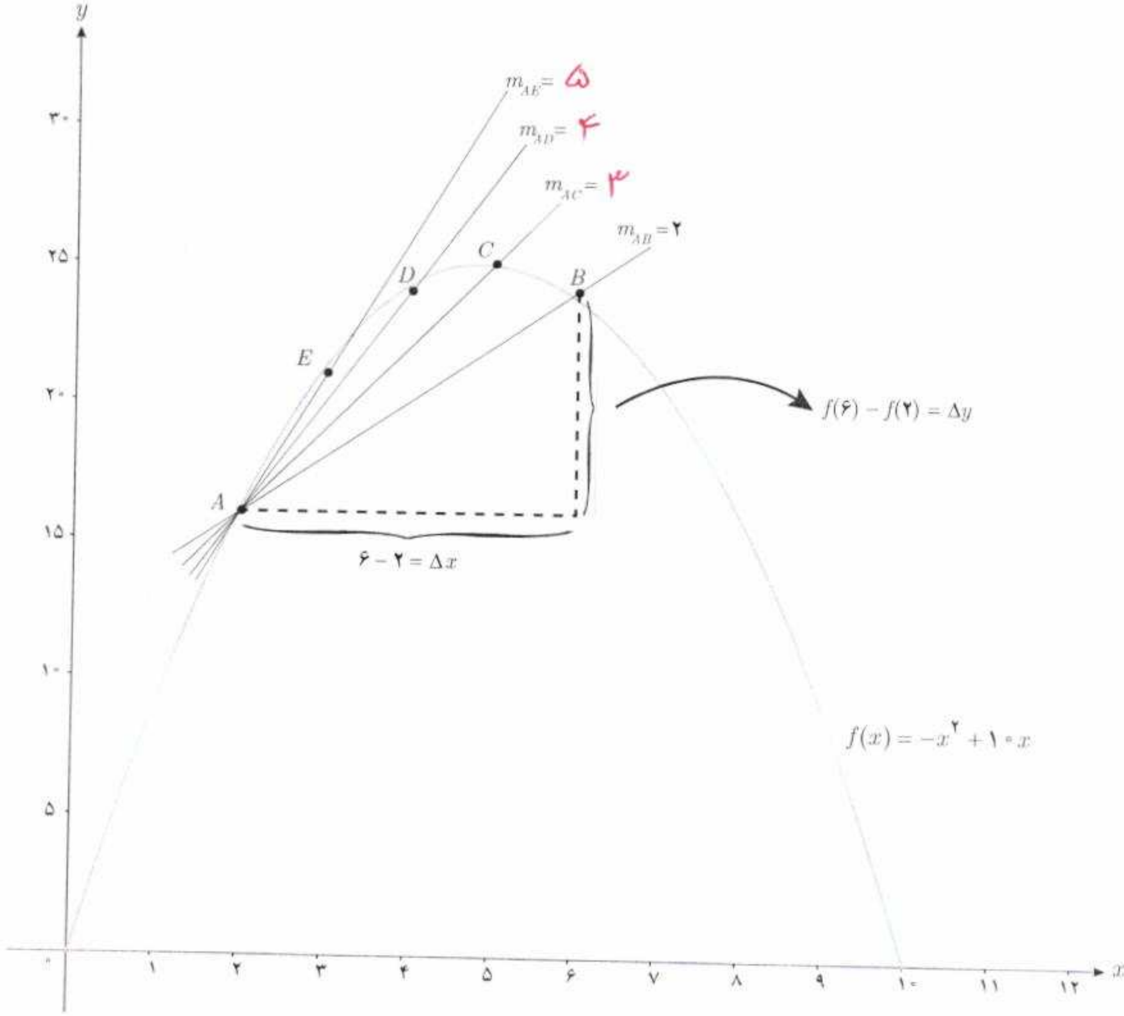
$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{24-16}{4}=\frac{8}{4}=2$$

به همین روش m_{AC} و m_{AD} و m_{AE} را به‌دست آورید.

$$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{25-16}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$m_{AD}=\frac{y_D-y_A}{x_D-x_A}=\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{24-16}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$m_{AE}=\frac{y_E-y_A}{x_E-x_A}=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{21-16}{1}=5$$



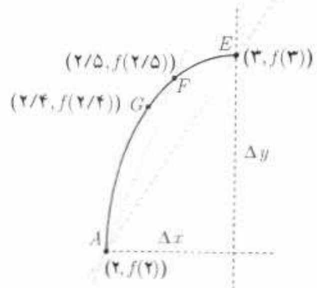
همان‌طور که می‌دانید برای محاسبه شیب خط AB نسبت تغییر عمودی را به تغییر افقی به‌دست می‌آوریم. اگر این تغییرات را به ترتیب با Δy و Δx نمایش دهیم، داریم:

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

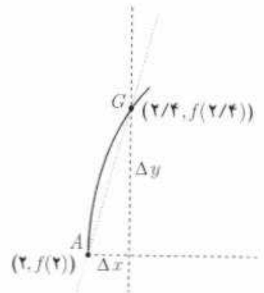
در هنگام محاسبه شیب‌های بالا، توضیح دهید که Δxها چگونه تغییر می‌کنند؟ کوچک و کوچکتر می‌شوند

[۲,۶]	۲ ———————— ۶	$\Delta x=۶-۲=۴$	$\Delta y=۲۴-۱۶=۸$
[۲,۵]	۲ ——————— ۵	$\Delta x=۵-۲=۳$	$\Delta y=۲۵-۱۶=۹$
[۲,۴]	۲ ———— ۴	$\Delta x=۴-۲=۲$	$\Delta y=۲۴-۱۶=۸$
[۲,۳]	۲ —— ۳	$\Delta x=۳-۲=۱$	$\Delta y=۲۱-۱۶=۵$

ب) حال فرض کنید که با ادامه روندی که در قسمت (الف) اختیار کردیم، نقاط بیشتری را نزدیک به A انتخاب کنیم. شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، منحنی $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$ در فاصله $[۲,۳]$ رسم شده است. در ادامه نمودار تابع در بازه $[۲,۲/۴]$ رسم شده است.



$$m_{AF}=\frac{f(۲/۵)-f(۲)}{۲/۵-۲}=\frac{۱۸/۷۵-۱۶}{۰/۵}=\frac{۲/۷۵}{۰/۵}=۵/۵$$



$$m_{AG}=\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{۱۸,۲۴-۱۶}{۰,۴}=\frac{۲,۲۴}{۰,۴}=۵,۶$$

اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری در نظر بگیریم، شیب خطوط به‌دست آمده به شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A نزدیک می‌شود. برای درک بهتر این موضوع، با تکمیل جدول و مقایسه شیب خط‌های قاطع، شیب خط مماس را حدس بزنید.

بازه $[a,b]$	شیب خطی که از نقاط $(a\ ,\ f(a))$ و $(b\ ,\ f(b))$ می‌گذرد. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$[۲,۲/۴]$	$\frac{f(۲/۴)-f(۲)}{۲/۴-۲}=\frac{۱۸,۲۴-۱۶}{۰,۴}=\frac{۲,۲۴}{۰,۴}=۵/۶$
$[۲,۲/۳]$	$\frac{f(۲,۳)-f(۲)}{۲,۳-۲}=\frac{۱۷,۷۱-۱۶}{۰,۳}=\frac{۱,۷۱}{۰,۳}=۵,۷$
$[۲,۲/۲]$	$\frac{f(۲/۲)-f(۲)}{۲/۲-۲}=\frac{۱۷/۱۶-۱۶}{۰/۲}=\frac{۱/۱۶}{۰/۲}=۵/۸$
$[۲,۲/۱]$	$\frac{f(۲/۱)-f(۲)}{۲/۱-۲}=\frac{۱۶/۵۹-۱۶}{۰/۱}=\frac{۰/۵۹}{۰/۱}=۵/۹$
$[۲,۲/۰۱]$	$\frac{f(۲/۰۱)-f(۲)}{۲/۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۵۹۹-۱۶}{۰/۰۱}=\frac{۰/۰۵۹۹}{۰/۰۱}=۵/۹۹$
$[۲,۲/۰۰۱]$	$\frac{f(۲/۰۰۱)-f(۲)}{۲/۰۰۱-۲}=\frac{۱۶/۰۰۵۹۹۹-۱۶}{۰/۰۰۱}=۵/۹۹۹$
$\vdots$	$\vdots$ $\qquad\vdots$
$[۲,۲+h]$ (h یک عدد خیلی کوچک و مثبت است.)	$\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}\longrightarrow ?=۶$

اگر بخواهیم دقیق‌تر صحبت کنیم، باید در مورد مقادیر عبارت $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ وقتی h به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) است، بررسی کنیم. روند بالا این حدس را تقویت می‌کند که هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم این مقادیر را به عدد ۶ نزدیک کنیم مشروط بر آنکه h را به قدر کافی نزدیک به صفر (و مثبت) اختیار کنیم. به عبارت دیگر حدس می‌زنیم که: $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$

کافی است با محاسبه مقدار حد، صحت حدس خود را بررسی کنیم:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(2+h)^2+10(2+h)-16}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-(h^2+4h+4)+20+10h-16}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2-4h-\cancel{4}+\cancel{4}+10h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-h^2+6h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h(-h+6)}{h}=\lim_{h\to 0}(-h+6)=6$$

به طریق مشابه می‌توان دید که اگر نقاط روی منحنی را در سمت چپ A اختیار کنیم، به عبارت دیگر اگر بازه‌هایی مانند، [۱/۵,۲]، [۱/۶,۲]، [۱/۷,۲]، [۱/۸,۲] و... را در نظر بگیریم شیب خط‌های قاطع برابر با ۶/۵، ۶/۴ ، ۶/۳، ۶/۲، ... خواهد شد. به عبارت دیگر در این حالت هم شیب خط‌های قاطع به هر اندازه که بخواهیم به عدد ۶ نزدیک می‌شوند، مشروط بر آنکه h به قدر کافی از سمت چپ به صفر نزدیک شود، یعنی داریم: $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$

بنابراین به طور کلی می‌توان نوشت: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=6$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(a\,,f(a))$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در نقطه } = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرط آنکه این حد موجود و متناهی باشد.

حد بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند، یعنی:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد مذکور را شیب منحنی در a نیز می‌نامند.

بنابراین در مثال قبل داریم $f'(2)=6$. در ادامه $f'(3)$ برای $f(x)=-x^2+10x$ محاسبه شده است :

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(3+h)^2+10(3+h)-21}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-9-6h-h^2+30+10h-21}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}(-h+4)=4$$

مثال : معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=-x^2+10x$ را در نقطه $A(2,f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

حل : با توجه به آنچه که در فعالیت قبل مشاهده شد :

$f'(2)=6=$ شیب خط مماس در نقطه A

$A(2,f(2))=(2,16)$

$y-16=6(x-2)\Rightarrow y=6x+4$

کار در کلاس

شیب خط $=f'(-2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=$

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^2+3$ را در نقطه‌ای به طول -2 بنویسید.

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{(-2+h)^2+3-7}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{4-4h+h^2-4}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h(-4+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(-4+h)=-4\xrightarrow{\text{معادله خط}} y-7=-4(x+2)\Rightarrow y=-4x-1$

تذکر : با نمادهای معرفی شده در فعالیت در مورد شیب خط‌های قاطع می‌توان دستورهای معادل دیگری برای محاسبه مشتق در یک نقطه به‌دست آورد، به‌طور مثال شیب خطی که از نقاط A و B می‌گذرد برابر است با :

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

و از آنجا :

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

مثال : اگر $f(x)=-x^2+10x$، $f'(2)$ را از دستور بالا به‌دست آورید :

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(2+\Delta x)^2+10(2+\Delta x)-16}{\Delta x}$$

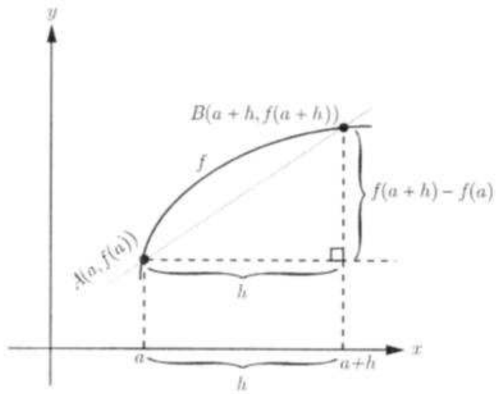
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\cancel{4}-\Delta x^2-4\Delta x+\cancel{20}+10\Delta x-\cancel{16}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x^2+6\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(-\Delta x+6)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(-\Delta x+6)=6$$

محاسبه $f'(a)$ به روش دیگر

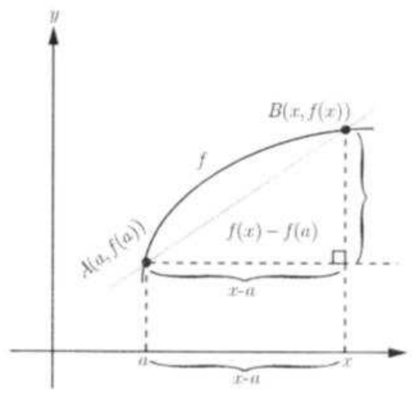
مشتق تابع f در نقطه $x=a$ به‌صورت : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تعریف شد. اکنون دستور دیگری برای مشتق تابع f در نقطه $x=a$ می‌یابیم که در برخی محاسبات کار را ساده‌تر می‌کند.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان



(الف)



(ب)

با استفاده از نموداری مشابه نمودار (الف) برای محاسبه مشتق f در a داریم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$A \text{ شیب خط مماس بر منحنی در } = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

با استفاده از نمودار (ب) راه دیگر محاسبه شیب خط مماس این است که نقطه دلخواه B را به مختصات $(x,f(x))$ در نظر بگیریم در این صورت داریم :

$$AB \text{ شیب خط } = m_{AB} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای محاسبه شیب خط مماس کافی است که x را مرتباً به a نزدیک کنیم. در این صورت شیب خط مماس برابر با $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ است مشروط بر اینکه این حد موجود باشد (واضح است که مانند قبل x باید از راست و چپ به قدر کافی به a نزدیک شود). به عبارت دیگر : $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مثال : اگر $f(x)=x^۲$ ، $f'(۳)$ را به دو روش به‌دست آورید.

حل :

روش اول :

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(h+۳)^۲-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۶h+۹-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۶h}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h(h+۶)}{h}=\lim_{h\to ۰}(h+۶)=۶$$

روش دوم :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶$$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

در موقعیت‌های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده‌تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

$$f'(8)=\lim_{x\to 8}\frac{f(x)-f(8)}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{-x^2+10x-16}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{-(x-8)(x-2)}{x-8}=\lim_{x\to 8}-(x-2)=-6$$

کار در کلاس

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{-x^2+10x-25}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)^2}{x-5}=\lim_{x\to 5}-(x-5)=0$$

الف) برای تابع $f(x)=-x^2+10x$ ، $f'(8)$ و $f'(5)$ را حساب کنید.

ب) دو نقطه روی منحنی مشخص کنید که مقدار مشتق تابع در آنها قرینه یکدیگر باشد. نقاط A و F

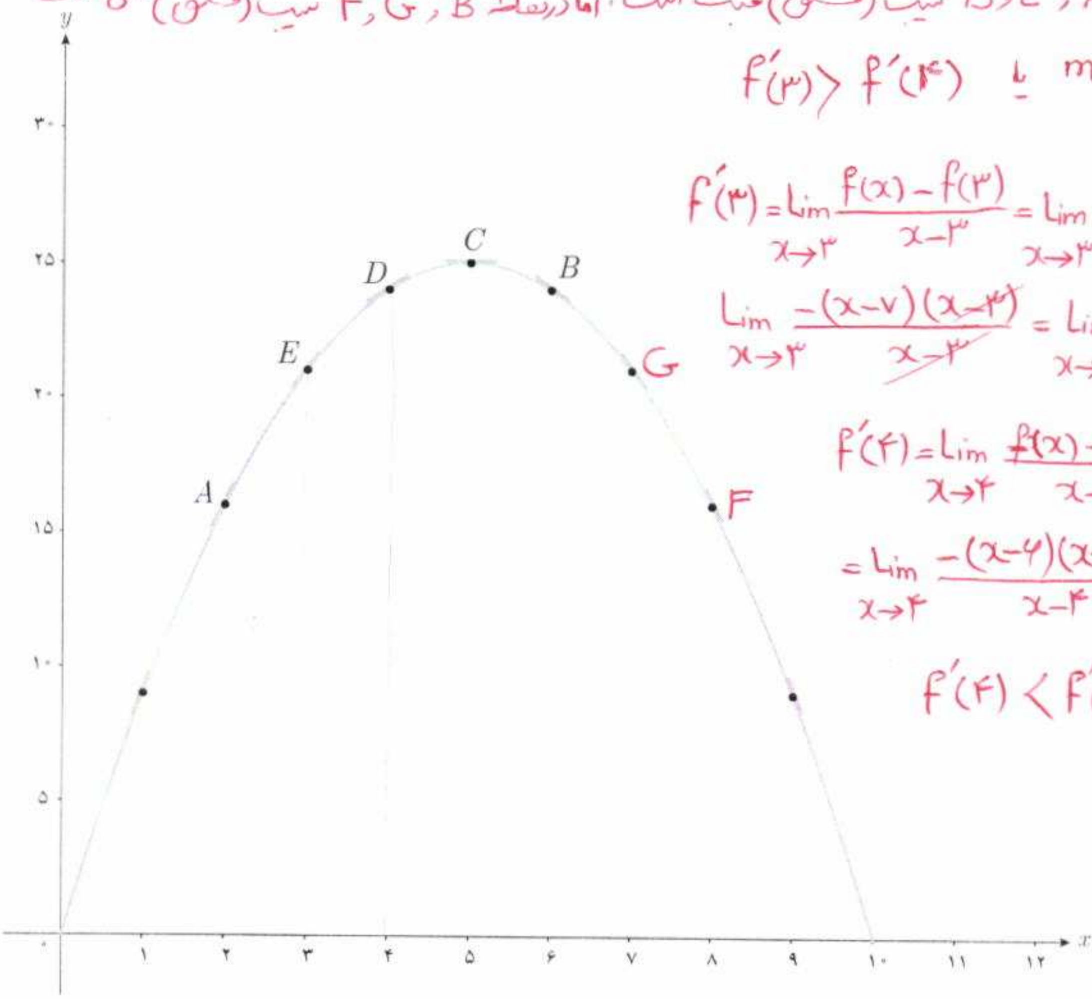
پ) به کمک شکل توضیح دهید که تابع در چه نقاطی دارای مشتق مثبت و در چه نقاطی مشتق منفی است.

ت) بدون محاسبه و تنها به کمک نمودار، شیب خط‌های مماس بر منحنی در نقاط ۳ و ۴ را با هم مقایسه کنید.

ث) با محاسبه $f'(3)$ و $f'(4)$ صحت حدس خود را بررسی نمایید.

در نقاط A و E و D شیب (مشتق) مثبت است، اما در نقاط B و G و F شیب (مشتق) منفی است

$$f'(3)>f'(4) \quad \text{یا} \quad m_E>m_D$$



$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+10x-21}{x-3}=$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{-(x-7)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}=\lim_{x\to 3}-(x-7)=4$$

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{-x^2+10x-24}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{-(x-6)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}-(x-6)=2$$

نتیجه: $f'(4)<f'(3)$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

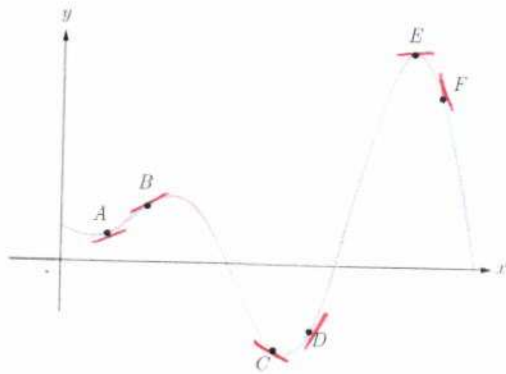
$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x+1-9}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(3x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(3x+4)=10$$

معادله خط مماس $y-9=10(x-2)\Rightarrow y=10x-11$

۱ اگر $f(x)=3x^2-2x+1$، $f'(2)$ را به‌دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

۲ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

نقطه	شیب
F	-3
C	-1
E	0
A	$\frac{1}{2}$
B	1
D	2



۳ برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.

m_1 الف) شیب نمودار در نقطه A

m_2 ب) شیب نمودار در نقطه B

m_3 پ) شیب نمودار در نقطه C

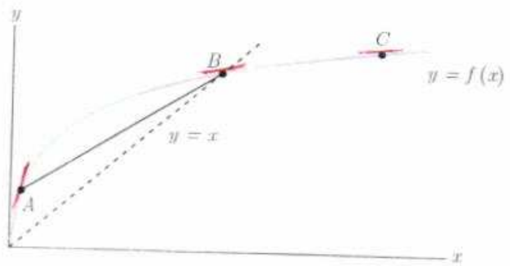
m_4 ت) شیب خط AB

$m_5=0$ ث) شیب خط $y=2$

$m_6=1$ ج) شیب خط $y=x$

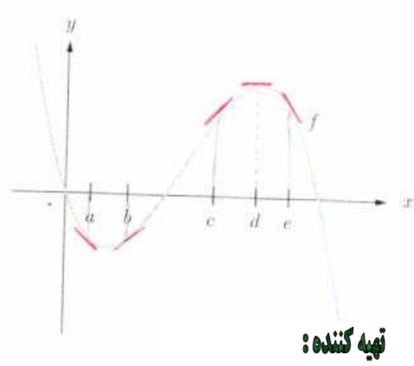
شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1، m_2، ... و m_6 در نظر بگیرید.

$m_5<m_3<m_2<m_4<m_6<m_1$



۴ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های d,c,b,a و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

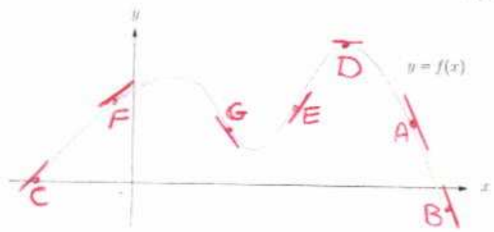
x	$f'(x)$
d	0
b	$0/5$
c	2
a	$-0/5$
e	-2



تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

۵ نقاطی مانند F ،E ،D ،C ،B ،A و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :



الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است. $f(x)=0 \ , \ f'(x)>0$

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است. $f'(x)=0$

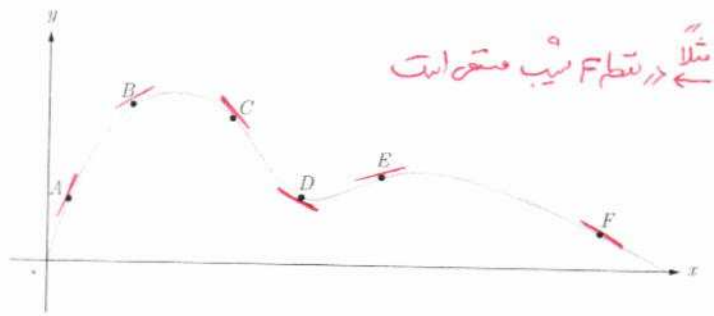
ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند. $f'(x_1)=f'(x_2)$

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.
$f(x)>0 \ , \ f'(x)<0$

۶ اگر $f(x)=x^3-2$ ، $f'(-1)$ را به‌دست آورید.

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2+3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3$$

۷ نقاط A ،B ،C ،D ،E و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است. نادرست ⟸ مثلاً در نقطه F شیب منفی است

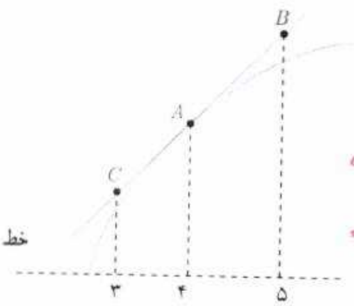
ب) $m_A<m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم) نادرست

پ) $m_E<m_B<m_A$ درست

ت) شیب منحنی در نقاط D، F و C منفی است. درست

ث) $m_F<m_D<m_C$ نادرست $m_C<m_D<m_F$

ج) $m_C<m_D<m_F<m_E<m_B<m_A$ درست



خط مماس

۸ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم : $f'(4)=1/5$ و $f(4)=25$ باتوجه به شکل مختصات نقاط A ، B و C را بیابید.

$$\text{شیب}=\frac{f(B)-f(A)}{x_B-x_A}=\frac{f(C)-f(A)}{x_C-x_A}=f'(A)$$

$$\Rightarrow \frac{f(B)-25}{1}=\frac{f(C)-25}{-1}=1/5 \quad f(B)=26/5 \Rightarrow B(5, 26/5) \quad f(C)=23/5 \Rightarrow C(3, 23/5)$$

۹ در هر ثانیه علی j متر با دوچرخه و رضا s متر با پای پیاده طی می‌کنند، به‌طوری که $j>s$. در یک زمان داده شده، چگونه می‌توان مسافت طی شده توسط رضا و علی را مقایسه کرد؟

الف) علی $j-s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ب) علی $j \cdot s$ متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

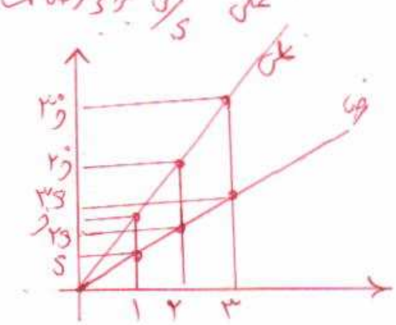
پ) علی j/s متر بیش از رضا مسافت طی خواهد کرد.

ت) علی $j \cdot s$ برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

ث) علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.

زمان	۱	۲	۳	k
علی	j	$2j$	$3j$	kj
رضا	s	$2s$	$3s$	ks

نسبت سرعت علی به رضا ثابت $\frac{j}{s}$ است. لذا علی j/s برابر رضا مسافت طی خواهد کرد.



درس دوم

مشتق‌پذیری و پیوستگی

در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول $x_\circ$ به یکی از دو صورت زیر تعریف شد :

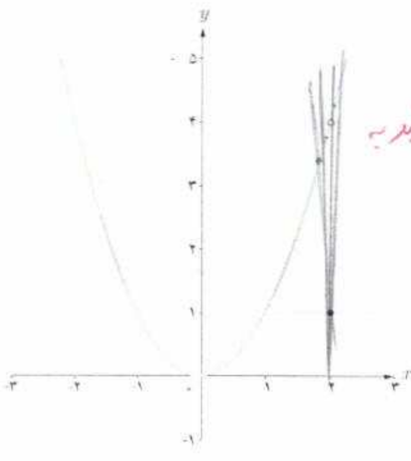
$$f'(x_\circ)=\lim_{h\to \circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است.

در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست دارای اهمیت است.

در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق‌پذیر نیست آشنا می‌شوید.

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\neq ۲ \\ ۱ & x=۲ \end{cases}$ (شکل مقابل) را درنظر می‌گیریم :



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(۲)$ وجود ندارد؟ زیرا شیب خط‌های قاطع که از نقطه $x=۲$ می‌گذرند به عدد حقیقی و منحصربفردی میل نمی‌کنند

اگر برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x=۲$ تعریف مشتق f در $x=۲$ را به‌کار گیریم :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۱}{x-۲}$$

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x\to ۲$، داریم :

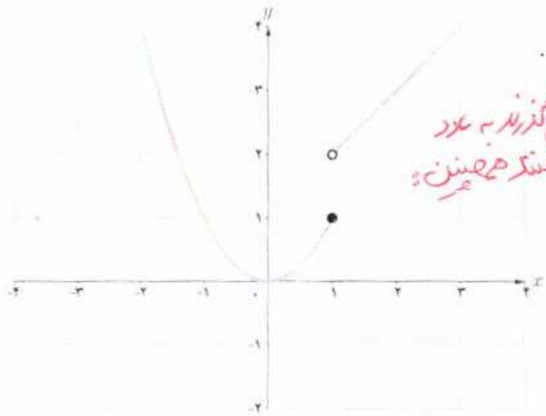
$$\text{حد راست}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۱}{x-۲}=+\infty$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x^۲-۱}{x-۲}=-\infty$$

بنابراین $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(۲)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به‌جز $x=۲$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟ بله پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

کار در کلاس



تابع g (شکل روبه‌رو) را به‌صورت $g(x)=\begin{cases} x^{2} & x\leq 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$ درنظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟

زیرا شیب خط‌های قاطع که از نقطه $x=1$ می‌گذرند به عدد حقیقی و منحصر به فردی میل نمی‌کند همچنین:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} \to \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{x+1-1}{x-1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^{-}}\dfrac{x^{2}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^{-}}(x+1)=2 \end{cases}$$

پس $g'(1)$ وجود ندارد

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x=2$ و $x=1$ ناپیوسته بودند و همان‌گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه : اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات : کافی است نشان دهیم : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}((x-a)(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}))$$
$$=\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})=0.f'(a)=0$$

بنابراین $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$ و از آنجا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به‌طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که :

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

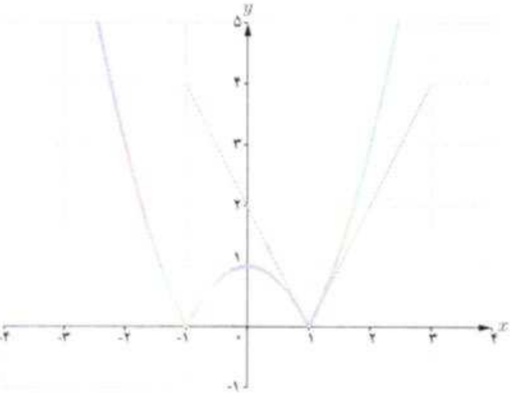
مثال : مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x^2-1|-0}{x-1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به‌دست آوریم.

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}=-2$$



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به‌عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x=1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲- است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x=1$ می‌نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می‌دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق‌پذیر نیست.

نیم‌خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت :

شیب نیم‌مماس چپ $=f'_-(1)$

شیب نیم مماس راست $=f'_+(1)$

معادله این نیم‌مماس‌ها نیز به ترتیب عبارت‌اند از :

نیم مماس راست $\quad y-0=2(x-1)$ یا $y=2x-2\ ,\ x\ge 1$

نیم مماس چپ $\quad y-0=-2(x-1)$ یا $y=-2x+2\ ,\ x\le 1$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

کار در کلاس

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{|x^2-1|-f(-1)}{x+1}\ \begin{cases}①\\②\end{cases}$$

① $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{-(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}-(x-1)=2\Rightarrow f'_+(-1)=2\to y-0=2(x+1)\Rightarrow y=2x+2\ ,\ x>-1$

② $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{(x^2-1)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}(x-1)=-2\Rightarrow f'_-(-1)=-2\Rightarrow y-0=-2(x+1)\Rightarrow y=-2x-2\ ,\ x<-1$

معادله نیم مماس ها

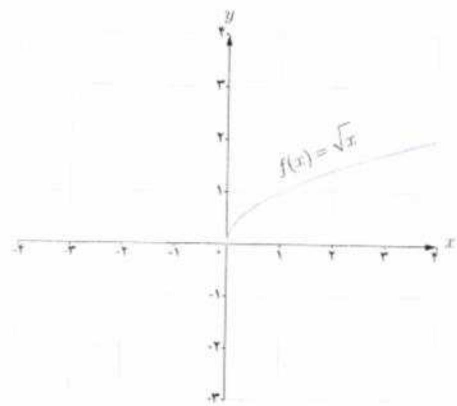
تعریف : مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

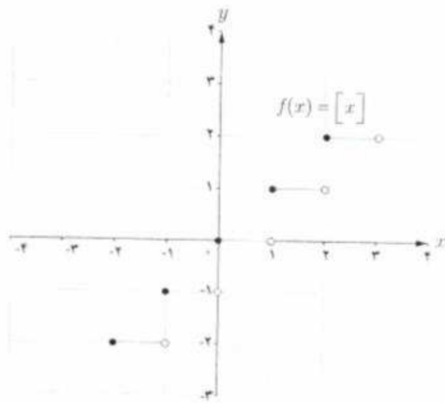
$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad , \quad f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

یا به‌طور معادل :

$$f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad , \quad f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال : توابع $f(x)=[x]$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.

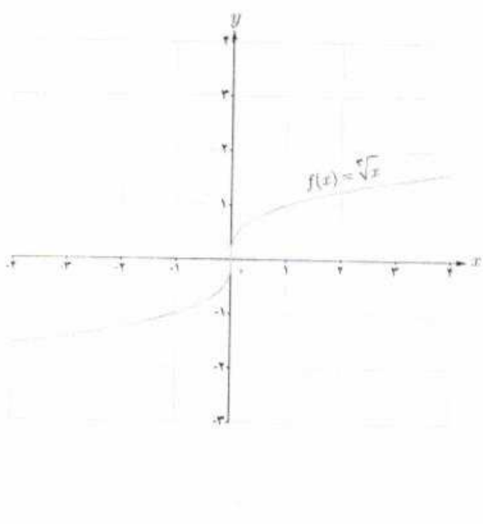




اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق‌پذیر نیست.

مثال : تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را درنظر می‌گیریم. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

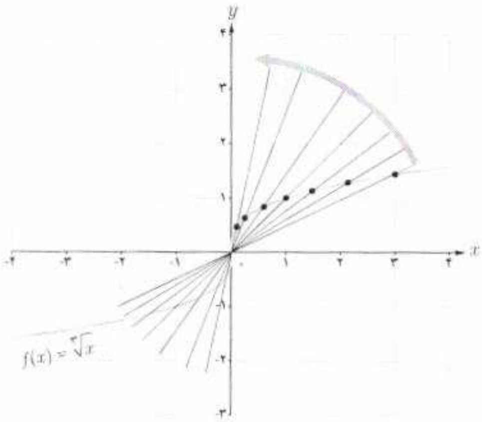


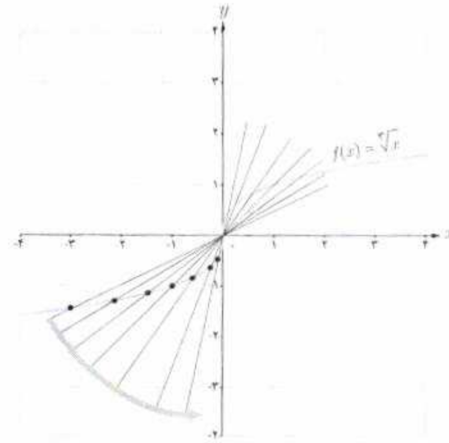
بنابراین تابع f در صفر مشتق‌پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x=0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x=0$ را «مماس قائم» منحنی می‌نامیم.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان





اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$ یا $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$ در این‌صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a,f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت:

تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد[1].

۱ــ f در a پیوسته نباشد.

۲ــ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

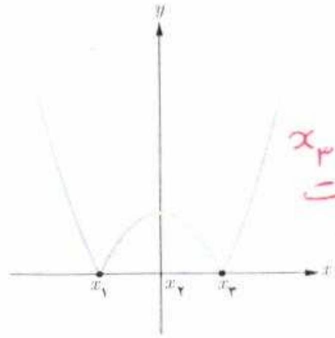
پ) هر دو نامتناهی باشند.

تهیه کننده:

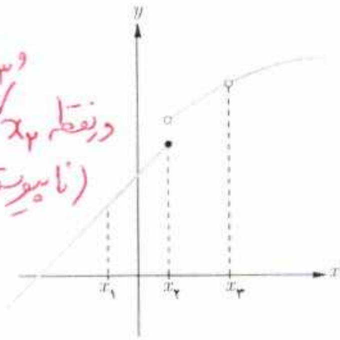
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۱ــ همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.

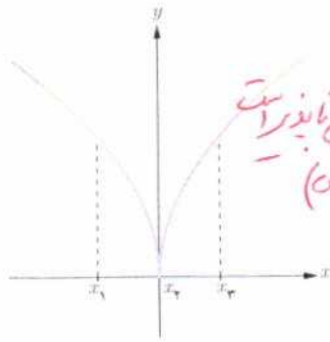


در نقاط x_1 و x_3 مشتق ناپذیر است (نقاط گوشه‌ای)

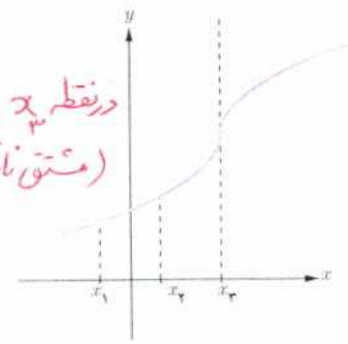


در نقطه x_2 و x_3 مشتق ناپذیر است (ناپیوسته)

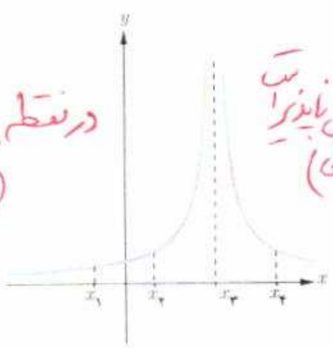
در نقطه x_2 مشتق ناپذیر است (نقطه گوشه‌ای)



در نقطه x_2 مشتق ناپذیر است (مشتق نامتناهی)



در نقطه x_3 مشتق ناپذیر است (مشتق نامتناهی)

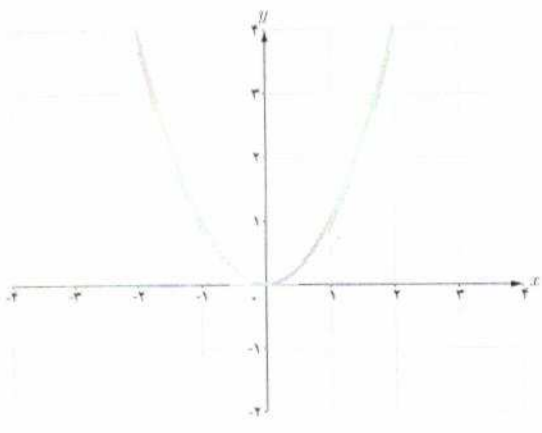


در نقطه x_3 مشتق ناپذیر است (نقطه ناپیوسته)

تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

تابع $f(x) = x^2$ را درنظر می‌گیریم.



تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	1	$2\sqrt{3}$	4

$$f'(-2)=\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4$$

$$f'(\sqrt{3})=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{f(x)-f(\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x)=x^2$ وجود دارد؟ در تمام نقاط

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به‌طور مثال برای تابع $f(x)=x^2$، دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

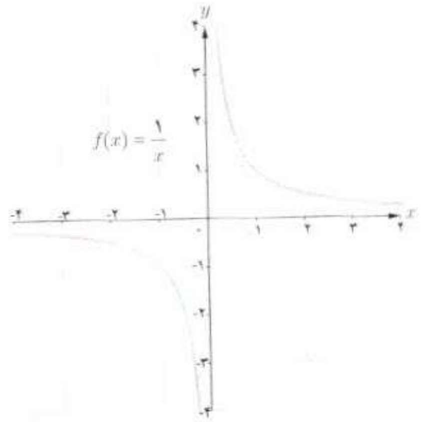
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

بنابراین $f'(x)=2x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x)=x^2$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به‌طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5})=-\frac{2}{5}\ ,\ f'(\sqrt{7})=2\sqrt{7}\quad \text{و}\quad f'(50)=100$$

مثال : اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به‌دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به‌دست آورید :
با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=3$.

حل : $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R}-\{0\}$ است. اگر $x\neq 0$ داریم :



$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

با استفاده از دستور فوق داریم : $f'(3)=\frac{-1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x\neq 0$) را نیز به کمک این دستور می‌توان محاسبه کرد، به‌طور مثال : $f'(\sqrt{5})=\frac{-1}{5}$ و $f'(-2)=-\frac{1}{4}$ ، $f'(3)$ را به‌طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد :

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3-x}{3x}}{\frac{x-3}{1}}=\lim_{x\to 3}\frac{-\cancel{(x-3)}}{3x\cancel{(x-3)}}=-\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

اگر $f(x)=\begin{cases}5x & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به‌دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

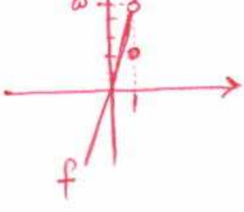
$D_f=(x\neq 1)\cup(x=1)=\mathbb{R}$

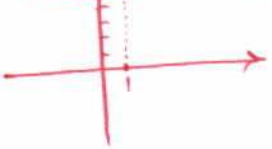
اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

اگر $x\neq 1 \Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)-5x}{h}=5 \Longrightarrow f'(x)=5$

$\Longrightarrow D_{f'}=\mathbb{R}-\{1\}$

اگر $x=1 \Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5x-2}{x-1}=\infty$



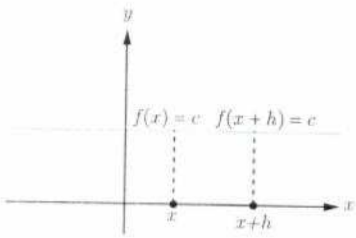


محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ــ اگر $f(x)=c$ آن‌گاه $f'(x)=0$. به‌عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

به‌طور مثال اگر $f(x)=7$ و $g(x)=-\frac{2}{5}$ آن‌گاه $f'(x)=0$ و $g'(x)=0$.



۲ــ اگر $n\in\mathbb{N}$ و $f(x)=x^n$ آن‌گاه $f'(x)=nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x)=x^2$، آن‌گاه $f'(x)=2x$. همچنین اگر $f(x)=x^3$، به‌کمک این دستور نشان می‌دهیم که : $f'(x)=3x^2$
ابتدا این رابطه آخر را ثابت می‌کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x)=x^n$ استفاده می‌کنیم. اگر $f(x)=x^3$ داریم :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]}{h}=\lim_{h\to 0}[(x+h)^2+x(x+h)+x^2]=x^2+x^2+x^2=3x^2$$

سومین تساوی در اثبات فوق بر اساس اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ به‌دست آمده است.
در حالت کلی می‌توان نشان داد که : $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$ $(n\in\mathbb{N})$ از این اتحاد در ادامه برای محاسبه مشتق $f(x)=x^n$ استفاده شده‌است.
اکنون اگر $f(x)=x^n$، محاسبات کمی دشوارتر می‌شود، اما در عوض دستور مهم‌تری را ثابت کرده‌ایم :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]$$

$$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}+x^{n-1}}_{n\text{ بار}}=nx^{n-1}$$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

۳ــ به‌طور کلی اگر n یک عدد **صحیح** باشد و $f(x)=x^n$ آن‌گاه : $f'(x)=nx^{n-1}$

مثال : اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $x\neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم : $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}\Rightarrow f'(x)=-x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$

*۴ــ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۵ــ اگر $f(x)=\sqrt{ax+b}$ و $ax+b>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{a(x+h)+b}-\sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h(\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b})}=\lim_{h\to 0}\frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b}+\sqrt{ax+b}}=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

۶ــ اگر $f(x)=\sqrt[3]{x}$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}{h\underbrace{(\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2})}_{A}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h.A}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، موردنظر است، رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

۷ـ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع kf $(k\in\mathbb{R})$، $f\pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ $(g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم :

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$ ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\dfrac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می‌توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

مثال : مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x)=-\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x)=-\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1 \Rightarrow g'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$

پ) $h(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x)=6x^2(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x)=\dfrac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x)=\dfrac{2x(3x+1)-3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

کار در کلاس

شایسته است که این تمرین در صفحات بعد باشد .

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ ب) $g(x)=(\dfrac{-3x-1}{x^2+5})^8$ پ) $h(x)=\dfrac{x}{2x^2+x-1}$

الف) $f'(x)=\dfrac{-1}{(x-4)^2}$

ب) $g'(x)=8\times(\dfrac{-3x-1}{x^2+5})^7\times\dfrac{-3(x^2+5)-2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2}$

پ) $h'(x)=\dfrac{1\times(2x^2+x-1)-(4x+1)\times x}{(2x^2+x-1)^2}$

۲ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(2)=3$ ، $f'(2)=5$ ، $g(2)=8$ و $g'(2)=-6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به‌دست آورید.

$(fg)'(2)=f'(2)\times g(2)+g'(2)\times f(2)=5\times 8+(-6)\times 3=22$

$(\frac{f}{g})'(2)=\dfrac{f'(2)\times g(2)-g'(2)\times f(2)}{(g(2))^2}=\dfrac{5\times 8-(-6)\times 3}{(8)^2}=\dfrac{58}{64}=\dfrac{29}{32}$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم :

$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

مثال : اگر $h(x)=(x^2+3x+1)^7$، مطلوب است $h'(x)$.

حل : اگر $f(x)=x^7$ و $g(x)=x^2+3x+1$. آن‌گاه : $h(x)=f\big(g(x)\big)$

$$h'(x)=g'(x)f'\big(g(x)\big)=(2x+3)\,f'\big(g(x)\big)$$

اگر $u=g(x)$ آن‌گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u)=u^7 \Rightarrow f'(u)=7u^6=7\big(g(x)\big)^6=7(x^2+3x+1)^6$$

بنابراین :

$$h'(x)=(2x+3)\,(7)\,(x^2+3x+1)^6$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می‌توان ارائه کرد،

اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد :

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$$

مثال : مشتق تابع $y=(\frac{x^2}{3x-1})^5$ را به دست آورید.

حل : با فرض $u=\frac{x^2}{3x-1}$ داریم : $y=u^5$ و از آنجا :

$$y'=u'.5u^4=\frac{2x(3x-1)-3x^2}{(3x-1)^2}.5(\frac{x^2}{3x-1})^4=5(\frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2})(\frac{x^2}{3x-1})^4$$

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=(x^2+1)^3(5x-1)$

$$f'(x)=\big((x^2+1)^3\big)'\times(5x-1)+(5x-1)'\times(x^2+1)^3$$
$$f'(x)=3(x^2+1)^2\times 2x\times(5x-1)+5\times(x^2+1)^3$$
$$f'(x)=(x^2+1)^2\times(35x^2-6x+5)$$

ب) $g(x)=(\frac{-3x-1}{x^2+5})^8$

$$g'(x)=8\times\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^7\times\frac{-3(x^2+5)-2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2}$$
$$g'(x)=8\times\frac{(-3x-1)^7(3x^2+2x-15)}{(x^2+5)^9}$$

مشتق‌پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه $(a\,,\,b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

تابع f روی بازه $[a\,,\,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f در بازه $(a\,,\,b)$ مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

تهیه کننده :

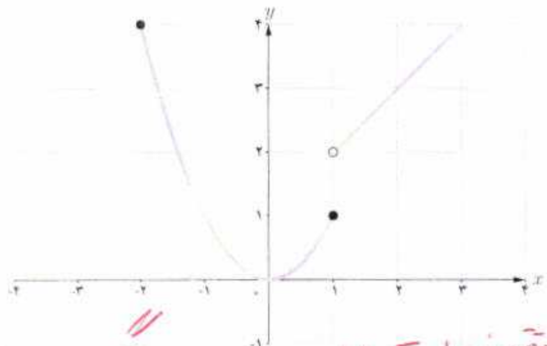
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

کار در کلاس

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a , b)$ و $(a , b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a , b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.

تابع f روی بازه $(a , b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty , +\infty)$ مشتق‌پذیر است.

مثال : تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & -2 \le x \le 1 \\ x+1 & x>1 \end{cases}$ را درنظر می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[-2 , 1]$ و $(1 , \infty)$ مشتق‌پذیر است. ولی f روی بازه $[1 , 2]$ مشتق‌پذیر نیست (چرا؟) اولاً f روی بازه (1و2) مشتق پذیر است اما در x=1 پیوستگی راست ندارد لذا در x=1 مشتق راست ندارد.

کار در کلاس

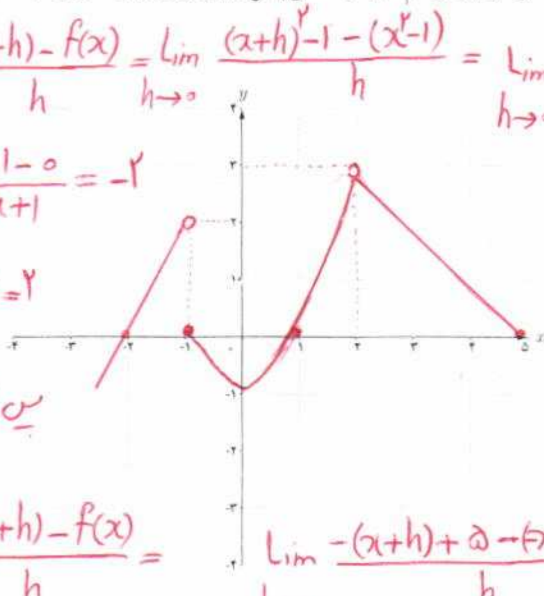
اگر $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x<-1 \\ x^2-1 & -1 \le x < 2 \\ -x+5 & 2<x<5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیری f را روی بازه‌های $[-1 , 1]$، $(2 , 5)$ و $[-2 , 0]$ بررسی کنید.

اگر $x \in (-1,1) \Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-1-(x^2-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2xh+h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$

$f'_+(-1) = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^2-1-0}{x+1} = -2$

$f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1-0}{x-1} = 2$

پس f روی بازه $[-1,1]$ مشتق پذیر است.



اگر $x \in (2,5) \Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(x+h)+5-(-x+5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$

پس f روی بازه (2و5) مشتق پذیر است.

چون طبق نمودار، f در $x=-1$ مشتق پذیر نیست و $-1 \in (-2,0)$ پس f روی بازه $[-2,0]$ مشتق پذیر نیست

جواب ۳)

$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}x=0$

$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{5x-4-0}{x-0}=\infty$

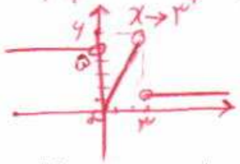
$\rightarrow f'_-(0)\neq f'_+(0)$

$f'_-(3)=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3^-}(x+3)=6$

$f'_+(3)=\lim_{x\to3^+}\frac{x+6-9}{x-3}=1 \rightarrow f'_-(3)\neq f'_+(3)$

(پ) $\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}5 & x<0\\ 2x & 0<x<3\\ 1 & x>3\end{cases}$

(ت) $\Rightarrow$



نمودار f'

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق‌پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

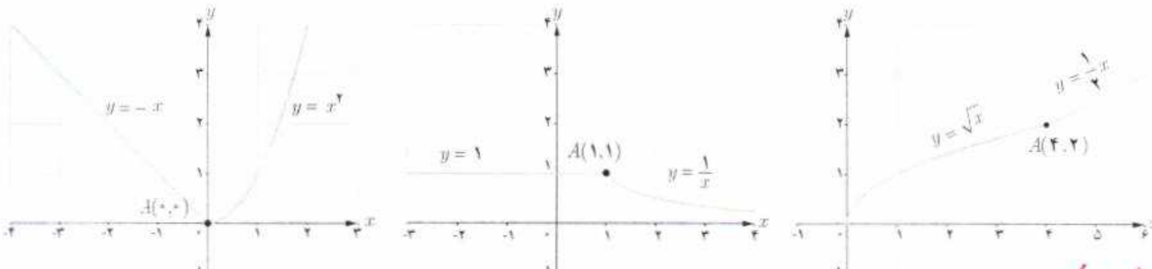
مثال : اگر $y=3x^4+2x^2-1$ آن‌گاه :

$$y'=12x^3+4x \quad , \quad y''=36x^2+4$$

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

$f(x)=|x-2| \quad , \quad g(x)=\begin{cases}x^2 & x<2\\ x+2 & x\geq 2\end{cases}$

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.



(الف) (ب) (پ)

الف) $f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1$

$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-0}{x-0}=0$

$\rightarrow f'_-(0)\neq f'_+(0)$

ب) $f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{1-1}{x-1}=0$

$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=-1$

$\rightarrow f'_-(1)\neq f'_+(1)$ (ب

پ) $f'_-(4)=\lim_{x\to4^-}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{4}$

$f'_+(4)=\lim_{x\to4^+}\frac{\frac{1}{2}x-2}{x-4}=\frac{1}{2}$

$f'_-(4)\neq f'_+(4)$

۳ تابع $f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\leq x\leq 3\\ x+6 & x>3\end{cases}$ داده شده است.

ادامه جواب در بالا

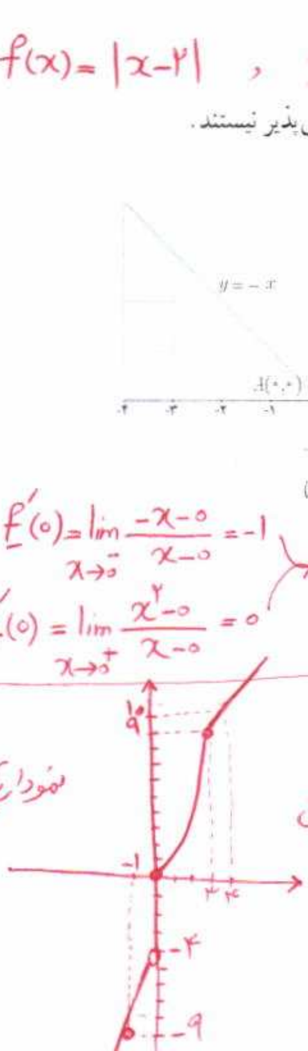
الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

با توجه به نمودار تابع f، تابع f در $x=0$ ناپیوسته است



نمودار تابع f

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

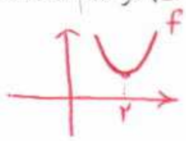
الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

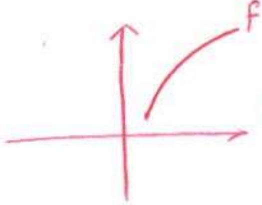
ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.

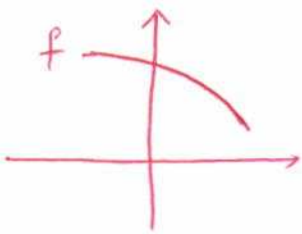
پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

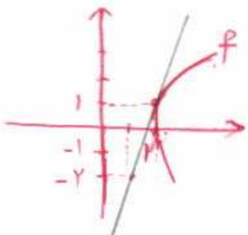
ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

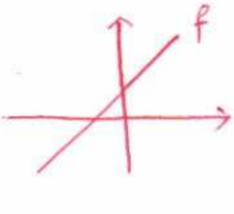
ث) در تمام نقاط منفی باشد.

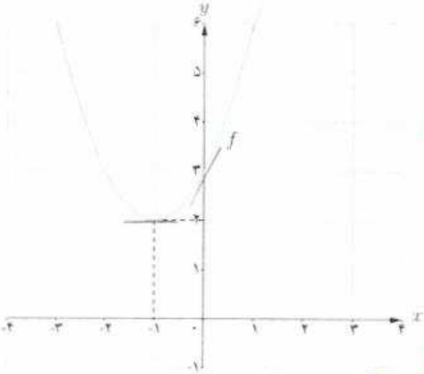
الف) 

ب) 

ث) 

پ) 

ت) 



۵

الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^2+2x+3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید.

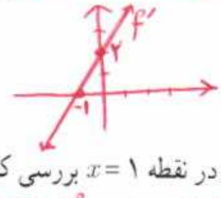
$0=f'(-1)<f'(0)<f'(2)<f'(3)$

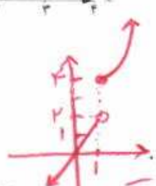
$f'(3)$ و $f'(0)$ و $f'(-1)$ و $f'(2)$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x)=x^2+2x+3$ بررسی کنید.

$f'(x)=2x+2 \Rightarrow f'(2)=6,\ f'(-1)=0,\ f'(0)=2,\ f'(3)=8$

پ) تابع مشتق را رسم کنید.





$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-4}{x-1}=\infty$

$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+3-4}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$

۶ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\ge 1\\ 2x & x<1\end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

توجه: تابع f در $x=1$ ناپیوسته است

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

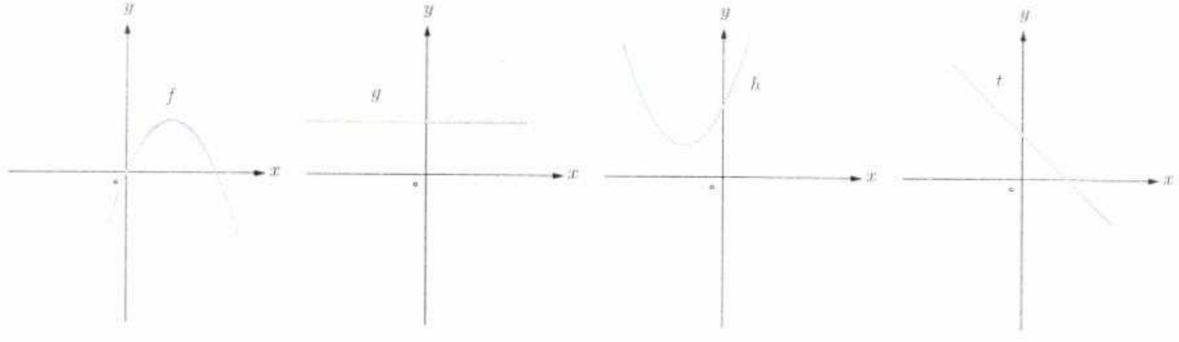
$f_1(x)=3x-1$ ، $f_2(x)=3x+5$ ، $f_3(x)=3x$ یا

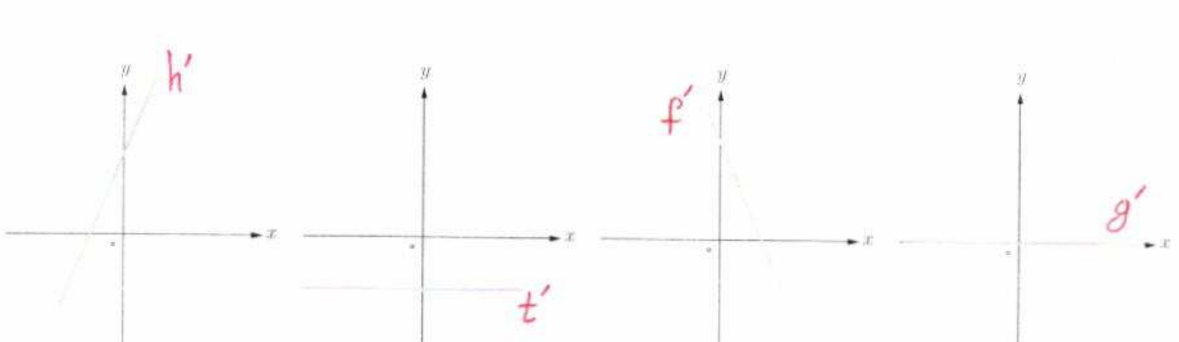
$g_1(x)=5$ ، $g_2(x)=\frac{3}{2}$ ، $g_3(x)=-1$

۸ اگر $f(x)=|x^2-4|$. به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

جواب در پایین صفحه

۹ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.





جواب (۷)

$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-4)-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}-(x+2)=-4$ ، $f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4-0}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x+2)=4 \Rightarrow f'_-(2)\neq f'_+(2)$

پس در $x=2$ مشتق ناپذیر است.

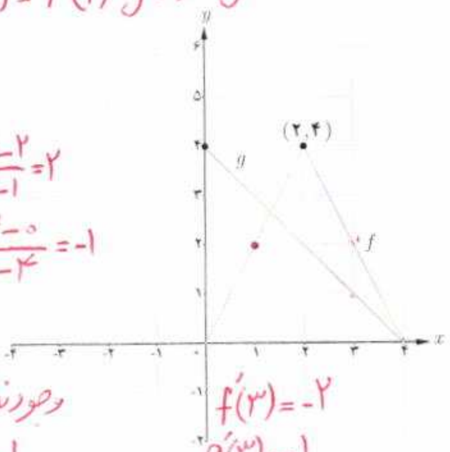
$f'_-(-2)=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x^2-4-0}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^-}\frac{x-2}{1}=-4$ ، $f'_+(-2)=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x^2-4)-0}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}-(x-2)=4 \Rightarrow f'_-(-2)\neq f'_+(-2)$

پس در $x=-2$ مشتق ناپذیر است.

الف) $h'(1) = f'(1).g(1) + g'(1).f(1) = ۲\times۳ + (-1)\times۲ = ۴$

نمودار توابع f و g را در شکل زیر درنظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x).g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$



$f'(1) = \frac{۴-۲}{۲-1} = ۲$

$g'(1) = \frac{۴-۰}{۰-۴} = -1$

$f'(۲) =$ وجود ندارد

$g'(۲) = -1$

$f'(۳) = -۲$

$g'(۳) = -1$

ب) اگر $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

$K'(1) = \frac{f'(1)\times g(1) - g'(1)\times f(1)}{(g(1))^۲} = \frac{۲\times۳ - (-1)\times۲}{(۳)^۲} = \frac{۸}{۹}$

$K'(۲) = \frac{f'(۲)\times g(۲) - g'(۲)\times f(۲)}{(g(۲))^۲} =$ وجود ندارد $\xrightarrow{\text{زیرا}}$ $f'(۲) =$ وجود ندارد

$K'(۳) = \frac{f'(۳)\times g(۳) - g'(۳)\times f(۳)}{(g(۳))^۲} = \frac{-۲\times1 - (-1)\times۲}{(1)^۲} = ۰$

اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$

$(f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = ۳ + ۵ = ۸$ ، $(۳f+۲g)'(1) = ۳f'(1) + ۲g'(1) = ۳\times۳ + ۲\times۵ = 1۹$

اگر $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \le ۰ \\ x & x > ۰ \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

$f'_+(۰) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{x-۰}{x-۰} = 1$ ، $f'_-(۰) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{x^۲-۰}{x-۰} = ۰ \Rightarrow f'_-(۰) \neq f'_+(۰) \Rightarrow f'(۰) =$ وجود ندارد

مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f'(x) = ۶x(۲x-۵)^۳ + ۶(۲x-۵)^۲(۳x^۲-۴) = ۶(۲x-۵)^۲(۵x^۲-۵x-۴)$

الف) $f(x) = (۳x^۲-۴)(۲x-۵)^۳$

پ) $f'(x) = \frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}} \times (x^۳+1) + ۳x^۲ \times \sqrt{۳x+۲}$

پ) $f(x) = (\sqrt{۳x+۲})(x^۳+1)$

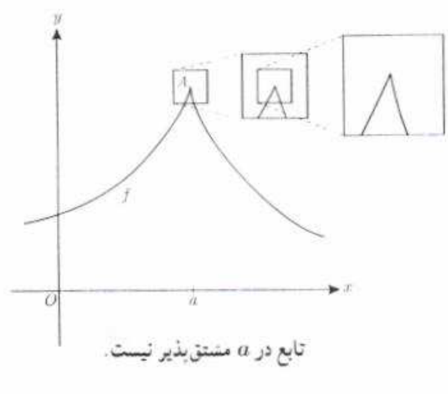
ب) $f(x) = \frac{x^۲-۳x+1}{-۳x+۲}$

ب) $f'(x) = \frac{(۲x-۳)(-۳x+۲) - (-۳)(x^۲-۳x+1)}{(-۳x+۲)^۲} = \frac{-۳x^۲+۴x-۳}{(-۳x+۲)^۲}$

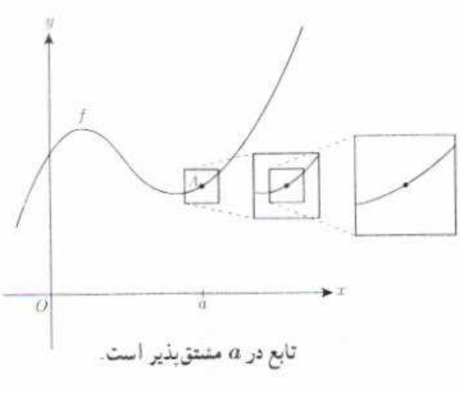
ت) $f(x) = \frac{۹x-۲}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۹\times\sqrt{x} - \frac{1}{۲\sqrt{x}}\times(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^۲} = \frac{۹x+۲}{۲x\times\sqrt{x}}$

خواندنی

مشتق‌پذیری در یک نقطه به‌صورت شهودی می‌تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک‌تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق‌پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می‌شود.



تابع در a مشتق‌پذیر نیست.



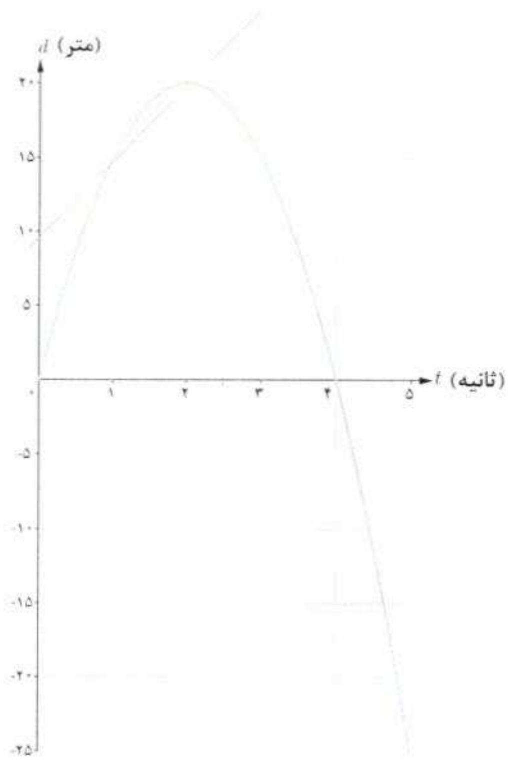
تابع در a مشتق‌پذیر است.

درس سوم

آهنگ تغییر

با مفهوم سرعت متوسط در فیزیک آشنا شده‌اید. اگر اتومبیلی در امتداد خط راست مسافت ۲۸۰ کیلومتر را در ۴ ساعت طی کند سرعت متوسط آن در این زمان $۷۰ = \frac{۲۸۰}{۴}$ کیلومتر بر ساعت است. با این حال ممکن است اتومبیل در لحظات مختلف سرعت‌های متفاوتی داشته باشد. همچنین مطابق آنچه که در درس فیزیک آموخته‌اید، سرعت متوسط روی یک بازه زمانی خیلی کوچک، به سرعت لحظه‌ای نزدیک است. اگر نمودار مکان ــ زمان در مورد حرکت اتومبیل را داشته باشیم، سرعت متوسط اتومبیل بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که نمودار مکان ــ زمان را در آن دو لحظه قطع می‌کند.
همچنین در درس فیزیک سرعت لحظه‌ای در هر لحظه دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه تعریف شد. با آنچه که در درس‌های گذشته ملاحظه کردید، می‌توان گفت که سرعت در لحظه t همان مقدار مشتق تابع (مکان ــ زمان) در لحظه t است. مفهوم مشتق را در بسیاری از پدیده‌های دیگر نیز می‌توان مشاهده کرد. ابتدا در مورد سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به ذکر مثالی خواهیم پرداخت.

مثال : خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند، که در آن $0 \leq t \leq 5$ برحسب ثانیه است. با در نظر گرفتن نمودار مکان ــ زمان (شکل) :



الف) سرعت متوسط خودرو را در بازه‌های زمانی [۱,۲]، [۱,۱/۵] و [۱,۱/۴] به‌دست آورید.

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های کوچک‌تری مانند [۱,۱/۳] و [۱,۱/۲] و ... اختیار کنیم، سرعت متوسط در این بازه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

پ) سرعت لحظه‌ای را با استفاده از مشتق تابع d در $t=1$ به‌دست آورید.

ت) سرعت لحظه‌ای در $t=2$ و $t=3$ چقدر است؟

حل :

الف)

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1,2] = \frac{d(2)-d(1)}{2-1} = \frac{20-15}{1} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1,1/5] = \frac{d(1/5)-d(1)}{1/5-1} = \frac{18/75-15}{0/5} = \frac{3/75}{0/5} = 7/5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{سرعت متوسط در بازه زمانی } [1,1/4] = \frac{d(1/4)-d(1)}{1/4-1} = \frac{18/2-15}{0/4} = \frac{3/2}{0/4} = 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ب) اگر به همین ترتیب بازه‌های زمانی کوچک‌تری اختیار کنیم، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای در $t=1$ نزدیک می‌شود.

پ) $d'(t) = -10t + 20$ ، پس ، $d'(1) = 10$

ت) $d'(3) = -10$ ، $d'(2) = 0$

سرعت در لحظه $t=۲$، صفر است و مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور xهاست و خودرو ساکن است. مقدار سرعت در لحظه‌های $t=۱$ و $t=۳$ برابر است و علامت منفی در مورد $d'(۳)$ نشان می‌دهد که جهت حرکت در $t=۳$ برخلاف جهت حرکت در $t=۱$ است.

به‌جز مفهوم سرعت، در مطالعه پدیده‌های زیاد دیگری که در قالب یک تابع نمایش داده می‌شوند با موضوع نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل مواجه می‌شویم. نسبت تغییرات دما به تغییرات زمان و همچنین نسبت تغییرات جمعیت نسبت به زمان نمونه‌های دیگری از اینگونه تغییرات هستند.

به‌طور کلی آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a\,,\,a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=$$ آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[a\,,\,a+h]$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

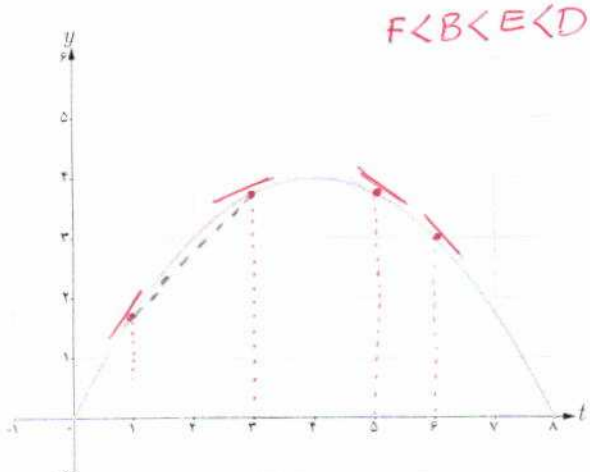
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$ = آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطه $x=a$

آهنگ متوسط تغییر با شیب خط قاطع و آهنگ لحظه‌ای تغییر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.

کار در کلاس

۱ نمودار زیر موقعیت یک ذره را در لحظه t نمایش می‌دهد. مقادیر زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید: (محاسبهٔ عددی لازم نیست.)

F<B<E<D<A<C



A سرعت متوسط بین $t=۱$ و $t=۳$

B سرعت متوسط بین $t=۵$ و $t=۶$

C سرعت لحظه‌ای در $t=۱$

D سرعت لحظه‌ای در $t=۳$

E سرعت لحظه‌ای در $t=۵$

F سرعت لحظه‌ای در $t=۶$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

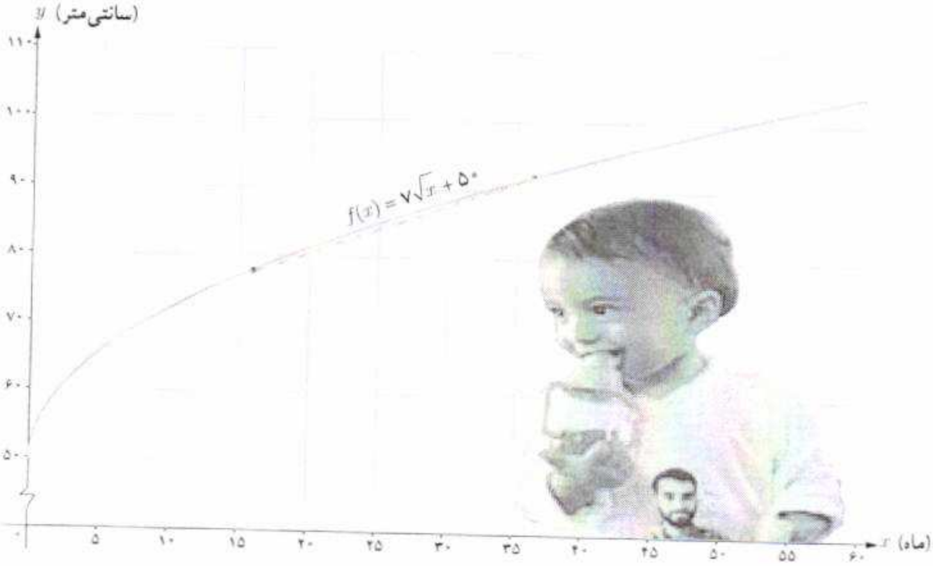
کاربردهایی دیگر از آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر

آهنگ رشد : تابع $f(x) = 7\sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. به‌طور مثال $f(25) = 85$

آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0,60]$ چنین است :

$$\frac{f(60)-f(0)}{60-0} = \frac{7\sqrt{60}+50-50}{60} \approx 0/9 \ \frac{\text{سانتی‌متر}}{\text{ماه}}$$

یعنی در طی ۵ سال، رشد متوسط قد حدود ۰/۹ سانتی‌متر در هر ماه است.



کار در کلاس

الف) آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0,25]$ چقدر است؟

$$\frac{f(25)-f(0)}{25-0} = \frac{7\sqrt{25}+\cancel{50}-\cancel{50}}{25} = \frac{35}{25} = \frac{7}{5} = 1/4 \ \text{cm/mon}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

آهنگ لحظه‌ای $= \lim\limits_{x\to 25} \frac{f(x)-f(25)}{x-25} = \lim\limits_{x\to 25} \frac{7\sqrt{x}+50-85}{x-25} = \lim\limits_{x\to 25} \frac{7(\sqrt{x}-5)}{x-25} = \lim\limits_{x\to 25} \frac{7}{\sqrt{x}+5} = 0/7 \ \text{cm/mon}$

ادامه در پایین صفحه

پ) اگر قد علی در ۱۶ ماهگی، ۸۰ سانتی‌متر و در ۳۶ ماهگی، ۹۵ سانتی‌متر باشد، آهنگ متوسط تغییر رشد او را در این فاصله حساب کنید و با نمودار بالا مقایسه کنید.

آهنگ تغییر متوسط : $\frac{f(36)-f(16)}{36-16} = \frac{95-80}{20} = \frac{3}{4} = 0/75 \ \text{cm/mon}$

آهنگ لحظه‌ای : $\lim\limits_{x\to 49} \frac{f(x)-f(49)}{x-49} = \lim\limits_{x\to 49} \frac{7\sqrt{x}+50-99}{x-49} = \lim\limits_{x\to 49} \frac{7(\sqrt{x}-7)}{x-49} = \lim\limits_{x\to 49} \frac{7}{\sqrt{x}+7} = 0/5 \ \text{cm/mon}$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در ۲۵ ماهگی > آهنگ لحظه‌ای تغییر در ۴۹ ماهگی

نرخ باروری : نمودار زیر روند رو به کاهش نرخ باروری در کشورمان را در طی نیم‌قرن نمایش می‌دهد. آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۸۹ , ۱۳۳۹] در مدت ۵۰ سال برابر است با :

$$\frac{۱/۶-۷}{۱۳۸۹-۱۳۳۹}=\frac{-۵/۴}{۵۰}=-۰/۱۰۸$$

آهنگ متوسط تغییر باروری در بازه زمانی [۱۳۷۹ , ۱۳۶۴] را به‌دست آورید. (با استفاده از مقادیر تقریبی روی نمودار) بازه زمانی را مشخص کنید که در آن آهنگ متوسط تغییر باروری مثبت باشد.

$$\frac{f(۱۳۷۹)-f(۱۳۶۴)}{۱۳۷۹-۱۳۶۴}=\frac{۲,۲-۶,۲}{۱۵}=\frac{-۴}{۱۵}\simeq -۰,۲۷$$

میانگین تعداد فرزندان متولد شده به ازای هر مادر ایرانی

خواندنی

نرخ باروری در ایران در سال‌های ۱۳۶۰ تا ۱۳۶۵ به حدود ۶/۵ فرزند رسید. با توجه به اینکه کشورمان امکانات لازم برای چنین رشد جمعیت بالایی را دارا نبود، سیاست‌های کاهش جمعیت و عوامل دیگر باعث شد که نرخ باروری تا سال ۱۳۸۵ به ۱/۹ کاهش یابد. بررسی‌ها نشان می‌دهند که کاهش باروری در ایران بزرگ‌ترین و سریع‌ترین کاهش باروری ثبت شده بود. کارشناسان معتقدند که باید سیاست‌های کاهش رشد جمعیت پس از کاهش نرخ باروری به حدود ۲/۵ فرزند متوقف می‌شد. کاهش رشد جمعیت مشکلات فراوانی نظیر کاهش نیروی کار و بحران سالمندی را در پی خواهد داشت. با ابلاغ سیاست‌های کلی «جمعیت» توسط رهبر معظم انقلاب اسلامی در سال ۱۳۹۳، و تغییر برنامه‌های وزارت بهداشت، براساس نتایج سرشماری عمومی نفوس و مسکن سال ۱۳۹۵، نرخ باروری به حدود ۲/۰۱ افزایش یافته است. با این حال نگرانی‌های مربوط به احتمال کاهش بیش از حد رشد جمعیت در سال‌های ۱۴۲۵ تا ۱۴۳۰ تأکید می‌کند که این سیاست‌ها تا دست‌یابی کامل به اهداف تعیین شده باید دنبال شود.

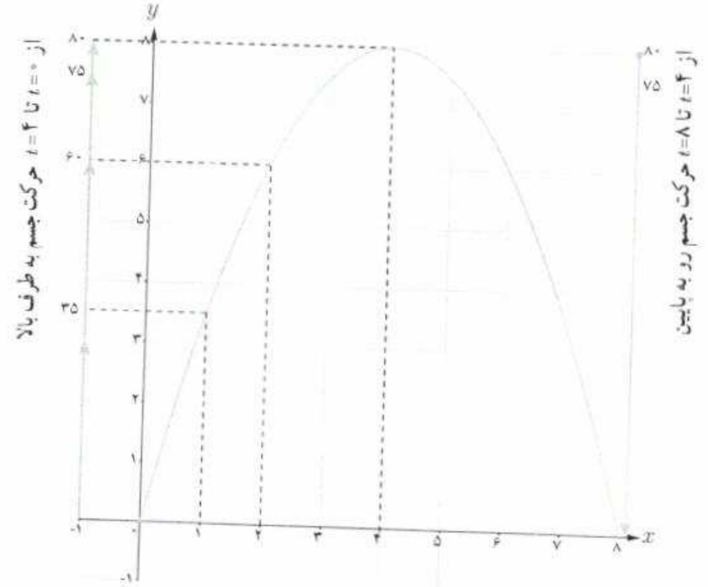
تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

مثال : جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-۵t^۲+۴۰t$ به‌دست می‌آید. به‌طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان ــ زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.



اگر سرعت متوسط این جسم در بازه‌های زمانی [۰,۲] , [۱,۲] , [۲,۳] و [۳,۴] را به ترتیب با $v_۱$, $v_۲$, $v_۳$ و $v_۴$ نمایش دهیم، داریم :

$$v_۱=\frac{h(۲)-h(۰)}{۲-۰}=\frac{۶۰}{۲}=۳۰\,\text{m/s} \qquad v_۲=\frac{h(۲)-h(۱)}{۲-۱}=۲۵\,\text{m/s}$$

$$v_۳=\frac{h(۳)-h(۲)}{۳-۲}=\frac{۷۵-۶۰}{۱}=۱۵\,\text{m/s} \qquad v_۴=\frac{h(۴)-h(۳)}{۴-۳}=\frac{۸۰-۷۵}{۱}=۵\,\text{m/s}$$

سرعت لحظه‌ای در زمان‌های $t=۱$ ، $t=۲$ ، $t=۳$ و $t=۴$ با استفاده از مشتق تابع h چنین به‌دست می‌آید :

$$h(t)=-۵t^۲+۴۰t \Longrightarrow h'(t)=-۱۰t+۴۰$$

$$h'(۱)=۳۰\,\text{m/s} \quad , \quad h'(۲)=۲۰\,\text{m/s} \quad , \quad h'(۳)=۱۰\,\text{m/s} \quad , \quad h'(۴)=۰\,\text{m/s}$$

در $t=۴$ جسم به بالاترین ارتفاع خود از سطح زمین (۸۰ متر) می‌رسد و در این لحظه سرعت آن برابر صفر (متر بر ثانیه) می‌شود. سپس جسم شروع به حرکت به طرف زمین می‌کند. سرعت متوسط در بازه [۴,۵] برابر $\frac{h(۵)-h(۴)}{۵-۴}=\frac{۷۵-۸۰}{۱}=-۵\,\text{m/s}$ و سرعت لحظه‌ای در $t=۵$ برابر $h'(۵)=-۱۰\,\text{m/s}$ است. علامت منفی نشان می‌دهد که حرکت جسم رو به پایین است.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

کار در کلاس

با توجه به مثال قبل :

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به‌دست آورید.

هنگام پرتاب: $t=0 \to h'(0)=40\ m/s$

هنگام برخورد به زمین: $t=8 \to h'(8)=-40\ m/s$

ب) سرعت متوسط جسم را در بازه زمانی $[5,8]$ به‌دست آورید.

سرعت متوسط: $\frac{h(8)-h(5)}{8-5}=\frac{0-75}{3}=-25\ m/s$

پ) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم ۳۵ m/s و ۳۵- m/s است.

سرعت لحظه‌ای: $h'(t)=-10t+40 \xrightarrow{\text{سرعت}=35\ m/s} 35=-10t+40 \Rightarrow t=0/5\,s$

$\xrightarrow{\text{سرعت}=-35\ m/s} -35=-10t+40 \Rightarrow t=7/5\,s$

تمرین

۱ جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به‌دست آورید.

الف) آهنگ تغییر متوسط: $\frac{T(12)-T(8)}{12-8}=\frac{19-11}{4}=2\ c/h$

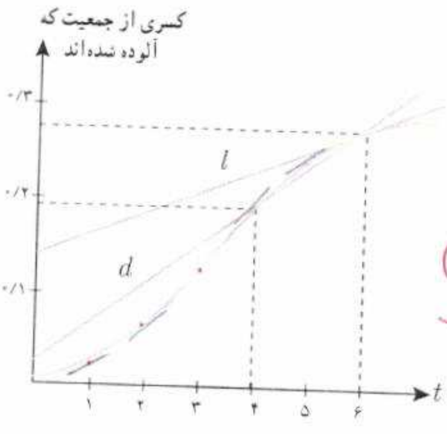
ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید.

ب) آهنگ تغییر متوسط: $\frac{T(18)-T(12)}{18-12}=\frac{9-19}{6}=-\frac{5}{3}\ c/h$

پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید. در بازه زمانی ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ ظهر، درجه حرارت با آهنگ ۲ درجه سانتی‌گراد در ساعت در حال افزایش است اما در بازه زمانی ساعت ۱۲ ظهر تا ساعت ۱۸، درجه حرارت با آهنگ $-\frac{5}{3}$ درجه سانتی‌گراد در ساعت در حال کاهش است

ادامه در پایین

۲ کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.



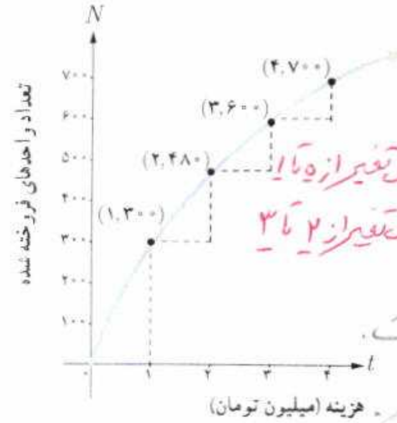
الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=1$ ، $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟ در $t=3$

پ) قسمت ب را برای $t=4$ ، $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید. در $t=4$

الف) شیب خط l، آهنگ تغییر لحظه‌ای کسری از جمعیت آلوده شده در لحظه $t=6$ (هفته ششم) نشان میدهد. شیب خط d، آهنگ تغییر متوسط، کسری از جمعیت آلوده شده در فاصله زمانی $t=4$ تا $t=6$ (هفته چهارم تا هفته ششم) نشان میدهد.

جواب ① پ) به عبارت دیگر به طور متوسط در هر ساعت، ۲ درجه به درجه حرارت (در فاصله زمانی ۸ تا ۱۲) اضافه می‌شود اما به طور متوسط در هر ساعت، $\frac{5}{3}$ درجه از درجه حرارت (در فاصله زمانی ۱۲ تا ۱۸) کاسته می‌شود.



۳ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

آهنگ تغییر از ۰ تا ۱: $\frac{300-0}{1-0}=300$ ، آهنگ تغییر از ۱ تا ۲: $\frac{480-300}{2-1}=180$

آهنگ تغییر از ۲ تا ۳: $\frac{600-480}{3-2}=120$ ، آهنگ تغییر از ۳ تا ۴: $\frac{700-600}{4-3}=100$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

زیرا با افزایش t (هزینه) رشد تعداد کالاهای فروخته شده کمتر شده است.
شاید به نوعی با افزایش هزینه تبلیغ، قیمت کالا بیشتر و لذا خریداران کمتر می‌شوند.

۴ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازه زمانی [۰ , ۵] (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی [۰ , ۵] با هم برابرند؟

سرعت متوسط $=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}=\frac{30-10}{5}=4$ ، سرعت لحظه‌ای $=2t-1$

$\Rightarrow 2t-1=4 \rightarrow t=2.5\,s$

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است.

t	ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$	متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

بر اساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

الف) ۱/۲۳m/s ب) ۱۴/۹۱m/s پ) ۱۱/۵m/s ت) ۱۶/۰۳m/s

$\frac{f(0.4)-f(0.3)}{0.1}=12\,m/s$

$\frac{f(0.5)-f(0.4)}{0.1}=11\,m/s$

$f'(0.4)=11.5\,m/s$

۶ با توجه به مقادیر تابع f در جدول روبه‌رو، f' را برای نقاط داده شده تخمین بزنید. به‌طور مثال $f'(0)=-6$. بقیه جدول را کامل کنید.

x	۰	۵	۱۰	۱۵	۳۰
$f(x)$	۱۰۰	۷۰	۵۵	۴۶	۴۰
مقدار تقریبی $f'(x)$	۶-	۳-	۱/۸-	۰/۴-	?

۷ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است :

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه [۰,۱] همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است. نادرست

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است. نادرست نمونه تمرین (۳) در بالا

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f(a)=0$ و هم $f'(a)=0$. نادرست مثال $f(x)=(x-1)^2$ در $x=1$

۸ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3\le t\le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟ به‌طور متوسط

$\frac{m(4)-m(3)}{4-3}=\frac{130-\sqrt{3}-54}{1}\simeq 74.3\,g$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+6t^2 \rightarrow m'(3)\simeq 54.3\,g$

۹ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ به‌دست آید :

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی [۰,۱] چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه [۰,۱۰۰] می‌شود؟

الف) $\frac{V(1)-V(0)}{1-0}=39.204-40=-0.796\,Li$

ب) $\frac{V(100)-V(0)}{100-0}=-0.4$ آهنگ تغییر متوسط

آهنگ تغییر لحظه‌ای $=V'(t)=-0.8(1-\frac{t}{100})$

$\rightarrow -0.8(1-\frac{t}{100})=-0.4 \Rightarrow 1-\frac{t}{100}=\frac{1}{2} \rightarrow t=50\,s$