

دایره

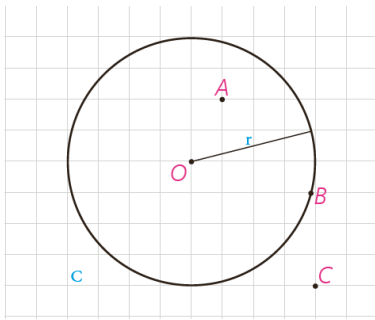


■ **هندسه در ساخت استحکامات دفاعی، قلعه‌ها و برج و باروها از دیرباز کاربردهای بسیاری داشته است. یک قضیه بنیادی در هندسه موسوم به «قضیه هم‌پیرامونی» می‌گوید در بین همه شکل‌های هندسی بسته با محیط ثابت دایره دارای بیشترین مساحت است. این موضوع در طراحی دایره‌ای شکل قلعه‌ها اهمیت بسیاری دارد. قلعه فلک‌الافلاک (شاپور خواست) که از دوره ساسانیان در شهرستان خرم‌آباد به‌جای مانده است نمونه گویایی از همین کاربردهاست.**

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره یکی از شکل‌های مهم در هندسه است که در پایه‌های قبل با تعریف و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شده‌اید. در ادامه با استفاده از شکل دایره، برخی موارد یادآوری شده‌است که از قبل با آنها آشنایی دارید.

همان‌طور که می‌دانید تمام نقاطی که روی دایره واقع‌اند از مرکز دایره به یک فاصله ثابت (اندازه شعاع دایره) هستند. معمولاً دایره $C(O,r)$ به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به شکل دایره به سادگی می‌توان نشان داد که:



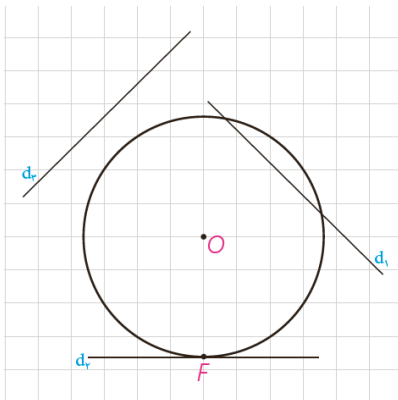
الف) اگر نقطه‌ای مانند B روی دایره $C(O,r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره **برابر** است. شعاع دایره است.

ب) اگر نقطه‌ای مانند C بیرون دایره $C(O,r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره **بزرگ‌تر** از شعاع دایره است.

پ) اگر نقطه‌ای مانند A درون دایره $C(O,r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره **کوچک‌تر** از شعاع دایره است.

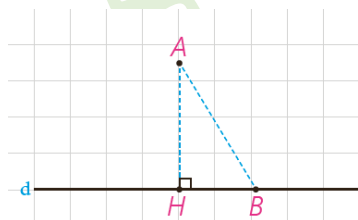
■ اوضاع نسبی خط و دایره

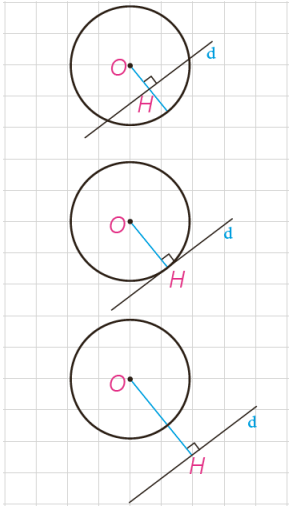
در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطه اشتراک داشته، و یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند. در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است و در حالتی که خط و دایره دو نقطه اشتراک داشته باشند، خط و دایره را متقاطع می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم.



یادآوری

اگر خط d و نقطه A غیر واقع بر d داده شده، و نقطه H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازه پاره خط AH همان فاصله نقطه A از خط d است و فاصله نقطه A از دیگر نقاط خط d از این مقدار بزرگ‌تر است ($AB > AH$).





اگر d یک خط و $C(O, r)$ یک دایره و نقطه H پای عمودی باشد که از نقطه O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد ($OH < r$)، خط و دایره ... در دو ... نقطه اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند

ب) اگر فاصله خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد ($OH = r$)، خط و دایره ... در یک ... نقطه اشتراک دارند؛ یعنی مماسند.

پ) اگر فاصله خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد ($OH > r$)، خط و دایره نقطه اشتراک ندارند.

فعالیت

۱- فرض کنیم خط d بر دایره C در نقطه F مماس است.

الف) نزدیک‌ترین نقطه خط d به نقطه O کدام است؟ چرا؟

نزدیک‌ترین نقطه خط d به نقطه O نقطه F است. می‌دانیم طول $OF = R$ و هر نقطه دیگر از خط d خارج دایره است و با توجه به قسمت (پ) مطالب فوق فاصله ی آن‌ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره است.

ب) از O به d عمود کنید. این خط عمود، خط d را در کدام نقطه قطع می‌کند؟ چرا؟

در نقطه F قطع می‌کند. اگر فرض کنیم که در F قطع نکنند پس نقطه ی دیگری مانند M وجود دارد که OM بر خط d عمود است. و M پای عمود است. نقطه ی دیگری مانند N روی خط d هست که M بین N و F قرار دارد و $FM = MN$ در نتیجه :

$$\left. \begin{array}{l} FM = MN \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \\ OM = OM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OMN \cong \triangle OMF \Rightarrow ON = OF = R$$

بنا براین نقطه ی N نیز روی دایره است و این با فرض مماس بودن خط d بر دایره تناقض دارد. پس خط مماس در نقطه F بر OF عمود است.

پ) نتیجه : اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F بر هم عمودند.

ت) با توجه به قسمت (پ) اگر نقطه‌ای مانند F روی دایره داده شده باشد، چگونه می‌توانید خط مماس بر دایره در نقطه F را رسم کنید؟ با توجه به مطلب فوق کافی است خطی را که در نقطه F بر OF عمود می‌شود رسم کنیم. این خط مماس بر دایره می‌باشد.

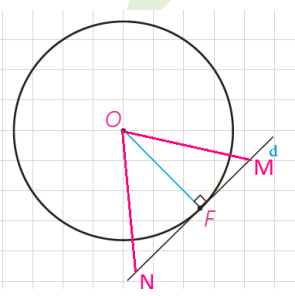
۲- خط d در نقطه F به شعاع OF عمود است. با تعیین وضعیت همه نقاط خط d نسبت به دایره C نشان دهید این خط با دایره فقط یک نقطه تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

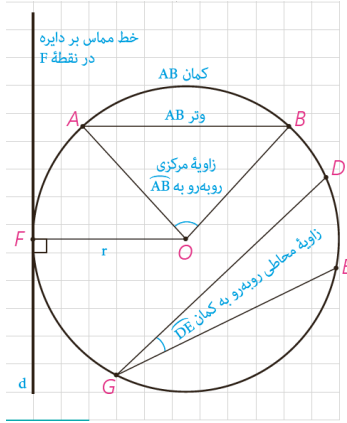
فرض کنیم M نقطه دیگری غیر از F روی خط d باشد چون $OM > OF$ در نتیجه

نقطه M برون دایره C است. بنا براین خط d با دایره C فقط یک نقطه مشترک دارد.

در نتیجه خط d بر دایره مماس است.

بنابراین : در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

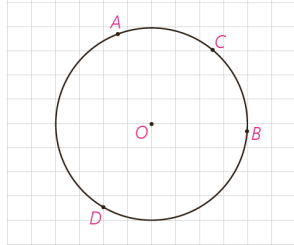




زاویای مرکزی، محاطی و ظلی

با تعاریف زاویای مرکزی و محاطی و کمان یک دایره در پایه‌های قبل آشنا شده‌اید. در اینجا به یادآوری برخی مفاهیم می‌پردازیم.

- ۱- شعاع دایره: پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.
- ۲- وتر دایره: پاره خطی که دو سر آن روی دایره باشد.
- ۳- قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.
- ۴- زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع باشد.
- ۵- زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند.



۶- کمان: کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است؛ به این ترتیب هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان \widehat{AB} را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آنها می‌توان از نقطه‌ای دیگر روی هر کمان استفاده کرد؛ مثلاً در شکل مقابل نقاط A و B دو کمان \widehat{ACB} و \widehat{ADB} را مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از \widehat{AB} کمان کوچک‌تر مشخص شده توسط A و B است.

۷- اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

۸- با توجه به شکل به سادگی دیده می‌شود که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.

کاردکلاس

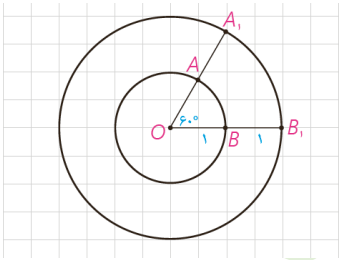
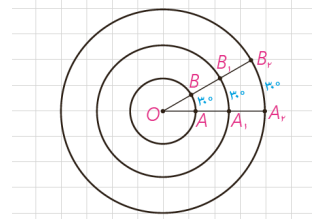
۱- با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان به اندازه 36° است، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{اندازه کمان } AB}{36^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

۲- با توجه به شکل، اندازه کمان‌های زیر را بنویسید.

$$\widehat{AB} = 60^\circ \quad \text{طول } \widehat{AB} = \frac{\pi}{3}$$

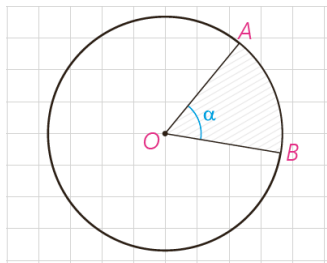
$$\widehat{A_1B_1} = 60^\circ \quad \text{طول } \widehat{A_1B_1} = \frac{2\pi}{3}$$



$$\frac{60}{360} = \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{2\pi \times 1} \Rightarrow \text{طول } \widehat{AB} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{60}{360} = \frac{\text{طول } \widehat{A_1B_1}}{2\pi \times 2} \Rightarrow \text{طول } \widehat{A_1B_1} = \frac{2\pi}{3}$$

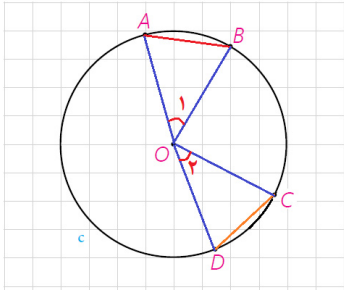
۳- ناحیه‌ای از درون و روی دایره را، که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ درجه مساوی α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر است با: $L = \frac{\pi R}{180} \alpha$ و مساحت قطاع برابر است با: $S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha$



طول کمان قطاع یک درجه $\frac{1}{360}$ محیط دایره است یعنی $\frac{2\pi R}{360}$. در نتیجه طول کمان نظیر قطاع α درجه $L = \frac{\pi R}{180} \alpha$ است

مساحت قطاع یک درجه $\frac{1}{360}$ مساحت دایره است یعنی $\frac{\pi R^2}{360}$. در نتیجه مساحت قطاع α درجه $A = \frac{\pi R^2}{360} \alpha$ است.

فعالیت



۱- فرض کنید اندازه‌های کمان‌های AB و CD از دایره C(O,r) باهم برابرند. با تشکیل مثلث‌های AOB و COD نشان دهید وترهای AB و CD نیز باهم برابرند.

فرض: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ حکم: $AB = CD$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} AB = CD$$

۲- فرض کنید دو وتر AB و CD از یک دایره باهم برابرند. ثابت کنید اندازه‌های

کمان‌های AB و CD نیز باهم برابرند.

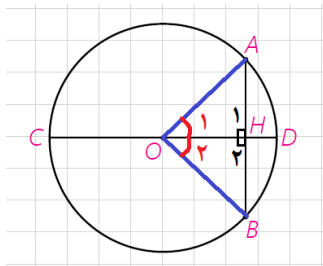
$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle OCD \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD}$$

فرض: $AB = CD$ حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

۳- وتر AB و قطری از دایره که بر وتر AB عمود است مانند شکل مقابل داده

شده‌اند. با تشکیل مثلث‌های AOH و BOH ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می‌کند.

فرض: $CD \perp AB$ حکم: $AH = BH$, $\widehat{AD} = \widehat{BD}$



$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \left\{ \begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{array} \right.$$

۴- این بار فرض کنید قطر CD وتر AB را نصف کرده است و نشان دهید CD بر

AB عمود است و کمان AB را نصف می‌کند.

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ AH = BH \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_2 = 90^\circ \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \widehat{AD} = \widehat{BD} \end{array} \right. \quad \text{فرض: } AH = BH \text{ حکم: } CD \perp AB \text{ و } \widehat{AD} = \widehat{BD}$$

۵- حال فرض کنید قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید CD بر

AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

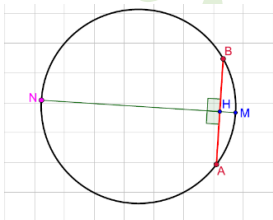
فرض: $\widehat{AD} = \widehat{BD}$ حکم: $CD \perp AB$ و $AH = BH$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB = R \\ \widehat{AD} = \widehat{BD} \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle OAH \cong \triangle OBH \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array} \right.$$

نتیجه: عمودمنصف وتر دایره از مرکز دایره می‌گذرد.

۶- اگر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر

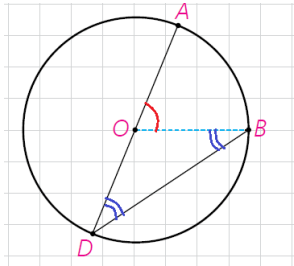
عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟



اگر وسط کمان را M و وسط وتر را H بنامیم کافی است این دو نقطه را به هم وصل کنیم

و از سمت H امتداد دهیم تا در نقطه N قطع کند. با توجه به ۴ و ۵ قطر عمود بر این وتر است.

فعالیت



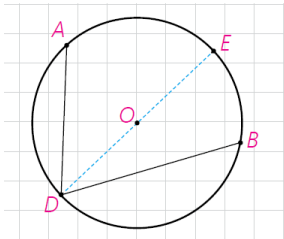
۱- در شکل مقابل \widehat{ADB} یک زاویه محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.

۲- اگر از B به O وصل کنیم، زاویه \widehat{AOB} یک زاویه خارجی برای مثلث متساوی الساقین OBD است.

$$\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \widehat{OBD} = 2\widehat{ODB}$$

و از آن نتیجه می‌شود:

$$\widehat{ODB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$



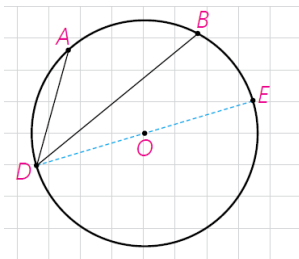
۲- در این شکل \widehat{ADB} یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ADE} &= \frac{1}{2}\widehat{AE} \\ \widehat{EDB} &= \frac{1}{2}\widehat{BE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AE} + \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

اگر قطر DE را رسم کنیم طبق قسمت ۱ داریم:

۳- در این شکل \widehat{ADB} یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.

۴- اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم:

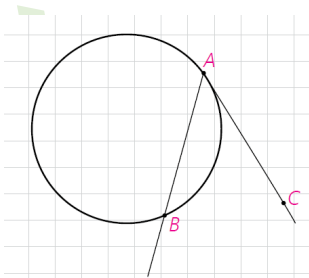


$$\left. \begin{aligned} \widehat{ADE} &= \frac{1}{2}\widehat{AE} \\ \widehat{BDE} &= \frac{1}{2}\widehat{BE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AE} - \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

بنابراین:

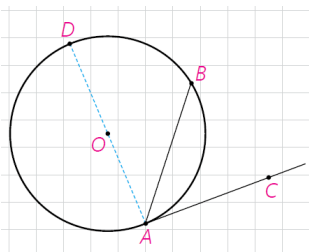
قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

زاویه ظلی



نوع دیگری از زاویه که در دایره مطرح است زاویه ظلی می‌باشد. زاویه ظلی زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد. در شکل مقابل \widehat{BAC} یک زاویه ظلی است.

فعالیت



الف) $\widehat{DAC} = 90^\circ$ و بنابراین: $\widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{AD}$

ب) زاویه \widehat{DAB} یک زاویه محاطی است.

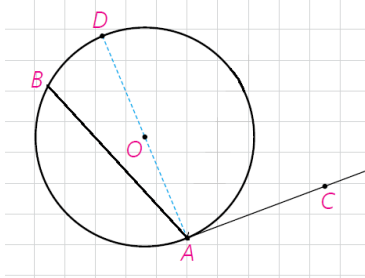
بنابراین: $\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DB}$

$$\widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{DA} - \widehat{DB})$$

(پ) از (الف) و (ب) داریم:

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

و بنابراین



(ت) نشان دهید نتیجه قسمت (پ) برای یک زاویه ظلی منفرجه نیز برقرار است.

$$\widehat{DAC} = 90^\circ \dots \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{AD}$$

(الف)

(ب) زاویه DAB یک زاویه محاطی است.

$$\widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DB}$$

بنابراین

$$\widehat{DAC} + \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{DA} + \widehat{DB})$$

(پ) از (الف) و (ب) داریم:

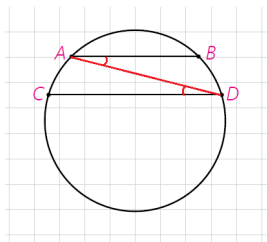
$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

و بنابراین

بنابراین:

قضیه: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با ... نصف ... کمان روبه‌رو به آن زاویه.

کاردکلاس



۱- در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند.

(الف) از A به D وصل کنید. زوایای BAD و ADC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ این دو زاویه بنا بر قضیه خطوط موازی با هم برابر هستند.

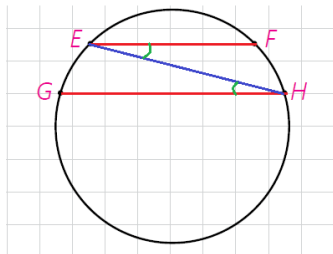
(ب) کمان‌های BD و AC نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

این دو کمان روبه‌رو به زوایای محاطی برابر هستند، پس بایکدیگر برابرند.

۲- در شکل مقابل کمان‌های EG و FH هم‌اندازه‌اند.

(الف) وترهای EF و GH و پاره‌خط EH را رسم کنید.

(ب) زوایای FEH و EHG نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



$$\widehat{EG} = \widehat{FH} \Rightarrow \frac{\widehat{EG}}{2} = \frac{\widehat{FH}}{2} \xrightarrow{\text{زاویه محاطی}} \widehat{EHG} = \widehat{FEH}$$

(پ) خطوط EF و GH نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

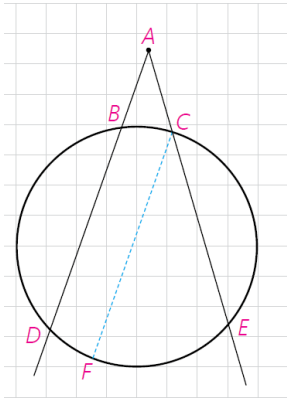
باهم موازی هستند بنا بر عکس قضیه خطوط موازی

نتیجه

دو وتر از یک دایره موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد.

تاکنون زاویه‌هایی که رأس آنها بر روی دایره باشند را بررسی کردیم و رابطه اندازه این زاویه‌ها با اندازه کمان‌های ایجاد شده توسط آنها را مشخص کردیم. حال به بررسی این موضوع برای زاویه‌هایی که رأس آنها درون یا بیرون دایره است و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند می‌پردازیم.

فعالیت



۱- فرض کنید رأس زاویه DAE مانند شکل مقابل بیرون دایره واقع شده باشد و کمان‌های DE و BC توسط اضلاع زاویه مورد نظر مشخص شده باشند.

– از نقطه C خطی موازی خط BD رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هر کدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE} = \widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{DF}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$$

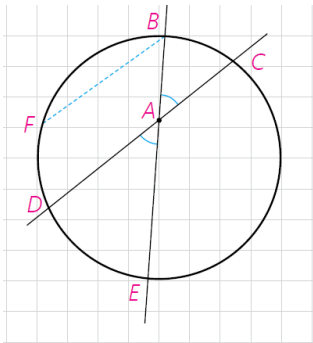
AD و CF موازی و AE مورب بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{DAE} = \widehat{FCE}$

زاویه \widehat{FCE} محاطی است پس نصف کمان مقابل است یعنی $\widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE}$.

باتوجه به شکل $\widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$

بنا بر فعالیت قبل بند (۱) می‌دانیم $\widehat{BC} = \widehat{DF}$

پس داریم: $\widehat{DAE} = \widehat{FCE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$



۲- رأس زاویه DAE مانند شکل مقابل در درون دایره می‌باشد و اضلاع این زاویه کمان‌های BC و DE را مشخص کرده‌اند.

– از نقطه B خطی موازی خط DC رسم کنید تا دایره را در نقطه‌ای مانند F قطع کند. علت هر کدام از تساوی‌های زیر را مشخص کنید.

$$\widehat{DAE} = \widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$$

AD و BF موازی و BE مورب بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{DAE} = \widehat{FBE}$

زاویه \widehat{FBE} محاطی است پس نصف کمان مقابل است یعنی $\widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE}$.

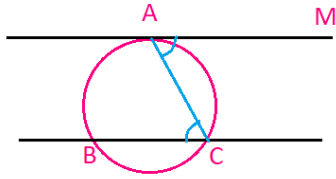
باتوجه به شکل: $\widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE})$

بنا بر فعالیت قبل بند (۱) می‌دانیم: $\widehat{BC} = \widehat{DF}$

پس داریم: $\widehat{DAE} = \widehat{FBE} = \frac{1}{2}\widehat{FE} = \frac{1}{2}(\widehat{FD} + \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$

۱- در شکل‌های زیر ثابت کنید :

راهنمایی: از نقطه B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید.



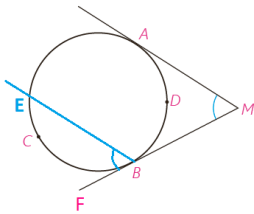
ثابت می شود که کمان های محصور بین یک مماس و وتر موازی در یک دایره باهم برابرند.

در شکل مقابل بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{MAC} = \widehat{BCA}$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ظلی} \quad \widehat{MAC} = \frac{1}{2} \widehat{AC} \\ \text{محاطی} \quad \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AB} \end{array} \right\} \xrightarrow{\widehat{MAC} = \widehat{ACB}} \frac{1}{2} \widehat{AC} = \frac{1}{2} \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{AB}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2} \quad (\text{الف})$$

راه اول: بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{AMB} = \widehat{EBF}$



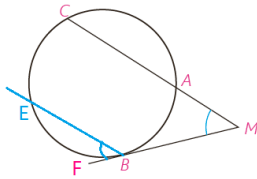
$$\widehat{AMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{EB}}{2} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{AE}}{2} \xrightarrow{\widehat{AE} = \widehat{ADB}} \widehat{AMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{ACB} - \widehat{ADB}}{2}$$

راه دوم: از نقطه ی A به B وصل می کنیم. در مثلث \widehat{AMB} زاویه \widehat{EBA} خارجی است پس:

$$\widehat{EBA} = \widehat{MAB} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \widehat{EBA} - \widehat{MAB} \Rightarrow \hat{M} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} - \frac{1}{2} \widehat{ADB} \Rightarrow \hat{M} = \frac{(\widehat{ACB} - \widehat{ADB})}{2}$$

$$\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2} \quad (\text{ب})$$

راه اول: بنا بر قضیه خطوط موازی $\widehat{CMB} = \widehat{EBF}$



$$\widehat{CMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{EB}}{2} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{CE}}{2} \xrightarrow{\widehat{CE} = \widehat{AB}} \widehat{CMB} = \widehat{EBF} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

راه دوم: از نقطه ی A به B وصل می کنیم. در مثلث \widehat{AMB} زاویه \widehat{BAC} خارجی است پس:

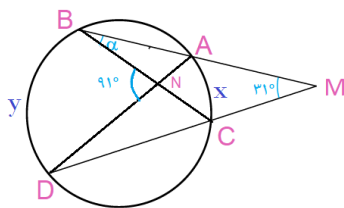
$$\widehat{BAC} = \widehat{MBA} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \widehat{BAC} - \widehat{MBA} \Rightarrow \hat{M} = \frac{1}{2} \widehat{BC} - \frac{1}{2} \widehat{AB} \Rightarrow \hat{M} = \frac{(\widehat{BC} - \widehat{AB})}{2}$$

۲- در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.

$$\hat{M} = \frac{y-x}{2} \Rightarrow 2 \times 31^\circ = y-x$$

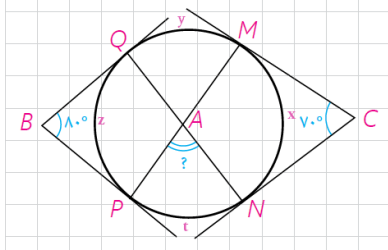
$$\hat{N} = \frac{y+x}{2} \Rightarrow 2 \times 91^\circ = y+x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-x=62^\circ \\ y+x=182^\circ \end{cases} \Rightarrow 2y=244^\circ \Rightarrow y=122^\circ \Rightarrow x=60^\circ$$



۳- در شکل اضلاع زاویه های B و C بر دایره مماس اند. اندازه زاویه \hat{A} چند درجه

است؟



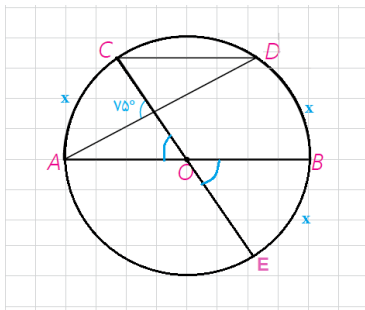
$$70^\circ = \frac{(y+z+t)-x}{2} \Rightarrow 140^\circ = (y+z+t)-x$$

$$180^\circ = \frac{(y+x+t)-z}{2} \Rightarrow 180^\circ = (y+x+t)-z$$

$$\begin{cases} 140^\circ = y+z+t-x \\ 180^\circ = y+x+t-z \end{cases} \Rightarrow 300^\circ = 2(y+t) \Rightarrow y+t = 150^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{y+t}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

۴- در شکل، O مرکز نیم دایره است و $CD \parallel AB$ اندازه کمان CD را به دست آورید.

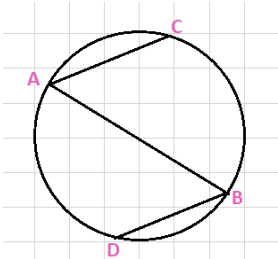


$$75^\circ = \frac{(x+x)+x}{2} \Rightarrow 150^\circ = 3x \Rightarrow x = 50^\circ$$

$$\widehat{CD} = 180^\circ - 2x \Rightarrow \widehat{CD} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

۵- در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی اند.

ثابت کنید: $AC = BD$



$$AC \parallel BD \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$$

$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 180^\circ$$

$$\widehat{ACB} - \widehat{BC} = \widehat{ADB} - \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD} \Rightarrow AC = BD$$

۶- دایره $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم

کرده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA = R$: نشان دهید: $\beta = 3\alpha$

با توجه به فرض مسئله، مثلث های OAB و OAM متساوی الساقین هستند.

$$\text{در مثلث } OBM \text{ داریم: } \beta = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$$

۷- در دایره $C(O,R)$ ، $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ فاصله O از وتر AB را به دست

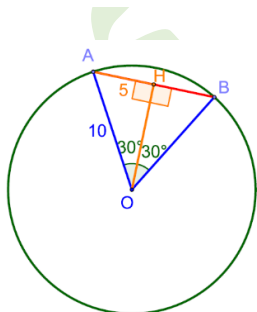
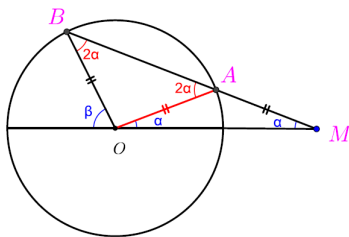
آورید.

می دانیم که مثلث OAB متساوی الاضلاع است. و برای پیدا کردن فاصله ی وتر از مرکز باید

نقطه ی O بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره خط OH را به دست آوریم. قطر عمود بر وتر

وتر را نصف می کند بنا بر این $AH = 5$ پس در مثلث قائم الزاویه OAH داریم:

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} \Rightarrow OH = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$



۸- در دایره C(O,R) نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$
 (OH و OH' فاصله O از دو وتر AB و CD هستند).
 راهنمایی: از O به B و C وصل، و از قضیه فیثاغورس استفاده کنید.

فرض: $AB > CD$ حکم: $OH < OH'$

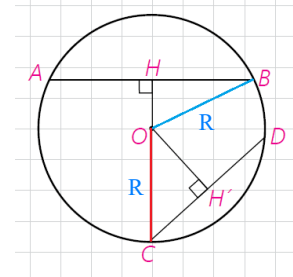
$$OB = OC = R, \quad BH = \frac{AB}{2}, \quad CH' = \frac{CD}{2} \quad (1)$$

$$\triangle OBH: H = 90^\circ \Rightarrow BH^2 = R^2 - OH^2$$

$$\triangle OCH': H' = 90^\circ \Rightarrow CH'^2 = R^2 - OH'^2$$

$$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \xrightarrow{(1)} BH > CH' \Rightarrow BH^2 > CH'^2$$

$$\Rightarrow R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow -OH^2 > -OH'^2 \xrightarrow{\times(-1)} OH^2 < OH'^2 \xrightarrow{\frac{OH^2 > 0}{OH'^2 > 0}} OH < OH'$$



فرض: $OH < OH'$ حکم: $AB > CD$

$$OB = OC = R, \quad 2BH = AB, \quad 2CH' = CD \quad (1)$$

$$\triangle OBH: H = 90^\circ \Rightarrow OH^2 = R^2 - BH^2$$

$$\triangle OCH': H' = 90^\circ \Rightarrow OH'^2 = R^2 - CH'^2$$

$$OH < OH' \Rightarrow R^2 - BH^2 < R^2 - CH'^2$$

$$\Rightarrow -BH^2 < -CH'^2 \xrightarrow{\times(-1)} BH^2 > CH'^2 \xrightarrow{\frac{BH^2 > 0}{CH'^2 > 0}} BH > CH' \xrightarrow{(1)} AB > CD$$

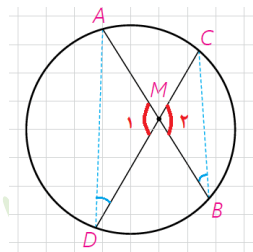


رابطه‌های طولی در دایره

اگر دو وتر از یک دایره با هم موازی نباشند، یکدیگر را برون یا روی یا درون دایره قطع می‌کنند. در هر حالت به بررسی روابط بین اندازه پاره‌های حاصل می‌پردازیم.

فعالیت

۱- دو وتر AB و CD در نقطه M در داخل دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.
 الف) از A به D و از C به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MBC متشابه‌اند.

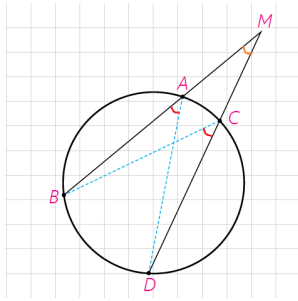


$$\left. \begin{aligned} \hat{M}_1 &= \hat{M}_2 \\ \hat{D} &= \hat{B} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle AMD \cong \triangle CMB$$

این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

ب) با توجه به تشابه دو مثلث مذکور داریم: $\frac{AM}{CM} = \frac{DM}{BM}$

و در نتیجه: $AM \cdot BM = CM \cdot DM$



۲- دو وتر AB و CD در نقطه M در خارج دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند.
الف) نقطه A را به D و نقطه C را به B وصل کنید و نشان دهید دو مثلث MAD و MCB باهم متشابه‌اند.

این دو مثلث بر قضیه ۱ تشابه برابری دو زاویه متشابه هستند.

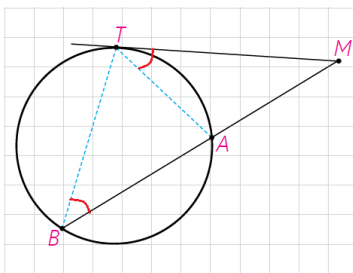
$$\left. \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{A} = \hat{C} = \frac{\widehat{BD}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAD \cong \triangle MCB$$

ب) با توجه به تشابه فوق داریم: $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$

۲ و در نتیجه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$

نتیجه ۲۹۱

هرگاه وترهای AB و CD در نقطه‌ای مانند M (درون یا بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند. آن‌گاه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$



۳- فرض کنیم از نقطه M (خارج دایره) مانند شکل یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم.

الف) T را به A و B وصل نمایید و مشخص کنید چرا $\hat{MTA} = \hat{TBM}$ ؟

$$\left. \begin{array}{l} \hat{MTA} = \frac{\widehat{AT}}{2} \text{ ظلی} \\ \hat{TBM} = \frac{\widehat{AT}}{2} \text{ محاطی} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{MTA} = \hat{TBM}$$

ب) علت تشابه دو مثلث MAT و MTB را مشخص کنید و با توجه به این تشابه رابطه زیر را کامل نمایید.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{MTA} = \hat{TBM} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAT \cong \triangle MTB$$

$$\frac{MA}{MT} = \frac{MT}{MB}$$

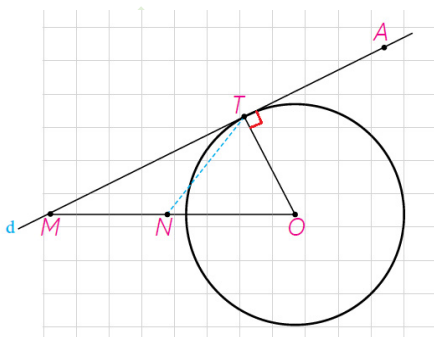
و در نتیجه: $MT^2 = MA \cdot MB$

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

اگر خط d در نقطه T بر دایره مماس باشد و A و M دو نقطه بر خط d در دو طرف نقطه T باشند، هرکدام از پاره‌های MT و AT بر دایره مماس‌اند.

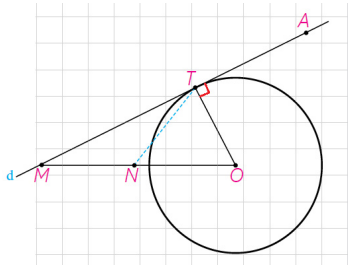
اگر O مرکز دایره باشد، $\triangle OMT$ در رأس T قائم‌الزاویه است. چرا؟

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.



با توجه به کادر فوق چون طبق فرض خط d در نقطه T بر دایره مماس است پس $OT \perp d$ در نتیجه مثلث OMT در رأس T قائم الزویه است .

اگر N وسط پاره خط OM باشد در نتیجه TN میانه ی مثلث قائم الزویه OMT است . « در هر مثلث قائم الزویه اندازه میانه وارد بر وتر نصف اندازه وتر است.» (صفحه ۶۰ کتاب هندسه دهم) . بنا براین $MN = NO = TN$.

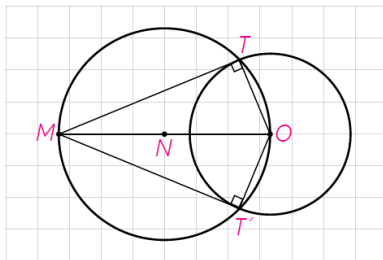


بنابراین دایره به مرکز N و قطر OM از نقطه T می گذرد.

از این ویژگی می توانیم در رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره بر آن استفاده کنیم.

اگر فاصله M تا O (مرکز دایره) d باشد، $MT = \sqrt{d^2 - R^2}$ چرا؟

$$\Delta MTO: \hat{T} = 90^\circ \Rightarrow MT^2 = OM^2 - OT^2 \Rightarrow MT = \sqrt{d^2 - R^2}$$



اکنون برای رسم مماس بر دایره از نقطه M خارج دایره، ابتدا دایره ای به قطر OM (مرکز O) دایره رسم می کنیم.

این دایره، دایره مفروض را در دو نقطه T و T' قطع می کند. خط های MT و MT' بر دایره مماس اند چرا؟

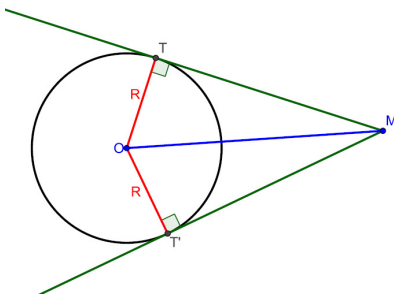
زاویه های $M\hat{T}O$ و $M\hat{T}'O$ محاطی رویه رو به قطر هستند بنا براین اندازه ی هر کدام

90° است . پس شعاع نقطه تماس بر پاره خط های MT و MT' عمود است .

در نتیجه MT و MT' بر دایره مماس هستند.

در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

کاردرکلاس



هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O,R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم T و T' نقاط تماس باشند، ثابت کنید :

الف) اندازه های دو مماس برابرند.

دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم همنهشت

هستند. و بنا بر اجزای متناظر $MT = MT'$.

ب) نیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

راه اول : دو مثلث OMT و OMT' به حالت وتر و یک ضلع زاویه قائمه باهم همنهشت هستند. و بنا بر اجزای متناظر

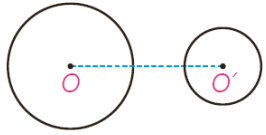
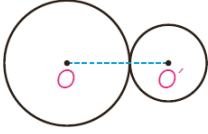
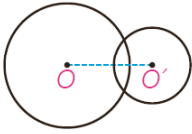



$$OMT = OMT'$$

راه دوم : فاصله نقطه O از دو ضلع زاویه TMT' به یک فاصله است پس بنا بر خاصیت نیمساز زاویه نقطه O روی نیمساز

این زاویه است. یعنی نیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.

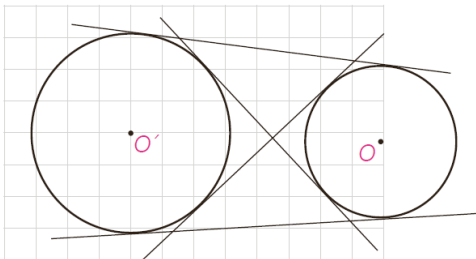
■ حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها

دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند به صورت زیر است:

	$d > R + R'$	دو دایره برون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس برون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره‌های هم‌مرکز

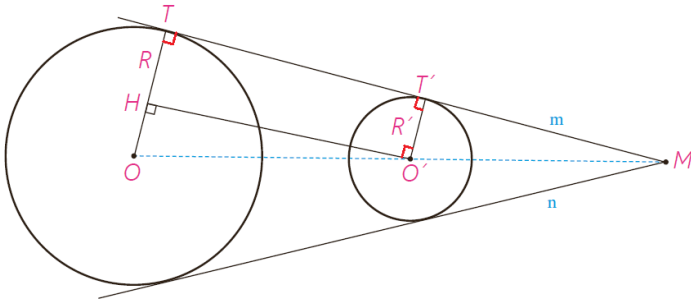
هر خطی یا پاره‌خطی را که بر هر دو دایره مماس باشد، مماس مشترک دو

دایره می‌نامند.



فعالیت

۱- فرض کنیم مانند شکل خط m در نقاط T و T' بر دو دایره مماس است و شعاع‌های OT و $O'T'$ رسم شده است. فرض کنیم فاصله بین مرکزهای دو دایره برابر d باشد؛ از O' خطی موازی خط m رسم می‌کنیم تا شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع کند.



شعاع‌های OT و $O'T'$ بر خط m در نقاط T و T' عمودند. و چون $O'H$ موازی خط m است پس بنا بر

$$\hat{T} = \hat{H} = 90^\circ \text{ و } \hat{T}' = \hat{O}' = 90^\circ$$

بنا بر این چهار ضلعی $TT'O'H$ چهار زاویه قائمه دارد پس مستطیل است.

(ب) با توجه به قضیه فیثاغورس در مثلث $O'HO$ ، تساوی زیر را توجیه کنید.

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

$OO' = d$ و $OT = R$ و $O'T' = R'$ و با توجه به بند الف $O'H = TT'$

$$\triangle OO'H: \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow O'H^2 + OH^2 = OO'^2 \Rightarrow O'H^2 = OO'^2 - OH^2$$

$$\Rightarrow O'H = \sqrt{d^2 - (OT - O'T')^2} \xrightarrow[OT=R, O'T'=R']{O'H=TT'} TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

(پ) با توجه به کار در کلاس قبل بگویید چرا اگر دو مماس مشترک m و n متقاطع

باشند، نقطه تقاطع آنها روی خط OO' خواهد بود؟

فرض کنیم این دو مماس مشترک در نقطه M یکدیگر را قطع کنند. با توجه به بند (ب) کار در کلاس قبل OM نیمساز

زاویه M است. همچنین OM هم نیمساز زاویه M است و چون هر زاویه یک نیمساز دارد در نتیجه OM و OM بر هم

منطبق هستند در نتیجه نقطه تقاطع مماس‌ها روی خط OO' قرار دارد.

(ت) به مرکز O و به شعاع $R - R'$ دایره‌ای رسم کنید. پاره خط $O'H$ برای دایره رسم

شده چگونه خطی است؟

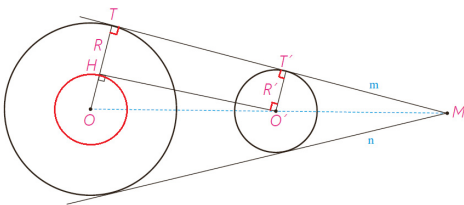
پاره خط $O'H$ بر این دایره مماس است.

(ث) فرض کنید دو دایره داده شده، و رسم مماس مشترک خواسته شده باشد.

از آنجا که مرکزها و شعاع‌های دو دایره معلوم است، می‌توان دایره مطرح شده در

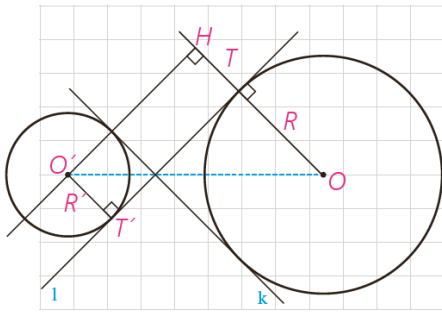
قسمت (ت) را رسم کرد و سپس مماس $O'H$ را بر آن رسم کرد؛ در این صورت چگونه

می‌توانید مماس TT' را رسم کنید؟



از نقطه O به H وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره (C) را در نقطه T قطع کند. سپس از این نقطه خطی موازی

$O'H$ رسم می‌کنیم. این خط در نقطه T' بر دایره (C') مماس می‌شود.

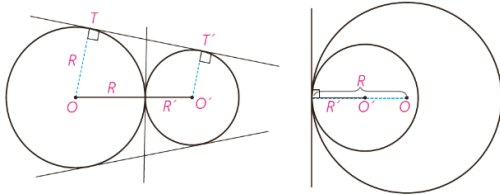


۲- دو مماس مشترک l و k نیز بر دو دایره متخارج مطابق شکل رسم شده است
 مرکزهای دو دایره در دوطرف مماس مشترک اند. با به کار بردن قضیه فیثاغورس در
 $\Delta O'OH$ مانند قبلی نشان دهید:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

با توجه به شکل چهارضلعی $THO'T'$ مستطیل است پس $TT' = OH$. همچنین
 در نتیجه: $OH = R + R'$ و $TH = O'T' = R'$

$$\Delta O'OH: H = 90^\circ \Rightarrow O'H^2 = OO'^2 - OH^2 \xrightarrow[\substack{OH=R+R', OO'=d}]{TT'=O'H} TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$



مماس خارج اند؛
سه مماس مشترک دارند.
 $OO' = R + R'$

مماس داخل اند؛
فقط یک مماس مشترک دارند.
 $OO' = |R - R'|$

۳- دو دایره مماس. دو دایره را که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، مماس
 می نامند. در این نقطه مشترک یک خط بر هر دو مماس است. اگر مرکزهای دو دایره
 در دوطرف این مماس باشند، آن دو دایره، مماس برونی است و اگر هر دو مرکز در یک
 طرف این مماس باشند، آنها را مماس درونی می نامند.

با استفاده از دستور محاسبه طول مماس مشترک خارجی، نشان دهید در دو دایره

$$TT' = 2\sqrt{RR'}$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \xrightarrow{d=R+R'} TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2}$$

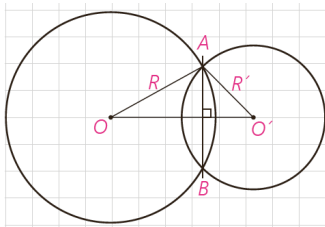
$$\Rightarrow TT' = \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - (R^2 + R'^2 - 2RR')} = \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - R^2 - R'^2 + 2RR'}$$

$$\Rightarrow TT' = \sqrt{4RR'} \Rightarrow TT' = 2\sqrt{RR'}$$

۴- دو دایره متقاطع. دو دایره را که فقط دو نقطه مشترک داشته باشند، متقاطع

می نامند. در این حالت دو دایره، فقط دو مماس مشترک دارند.

$$\text{و } |R - R'| < OO' < R + R' \text{؛ چرا؟}$$



$$OO' < R + R' \quad (1)$$

با توجه به نامساوی مثلث در مثلث AOO' داریم:

$$\left. \begin{aligned} R' < OO' + R &\Rightarrow -OO' < R - R' \\ R < OO' + R' &\Rightarrow R - R' < OO' \end{aligned} \right\} \Rightarrow -OO' < R - R' < OO' \Rightarrow |R - R'| < OO' \quad (2)$$

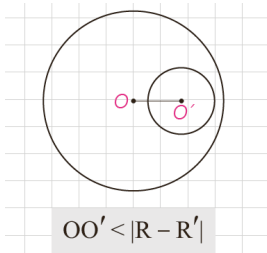
$$\xrightarrow{(1), (2)} |R - R'| < OO' < R + R'$$

پاره خط AB، که دوسر آن روی هر دو دایره است، وتر مشترک دو دایره متقاطع

است. چرا پاره خط OO' عمودمنصف وتر مشترک AB است؟

$OA = OB = R$ و $O'A = O'B = R'$ بنا بر خاصیت عمودمنصف نقاط O و O' روی عمود منصف AB قرار دارد و چون

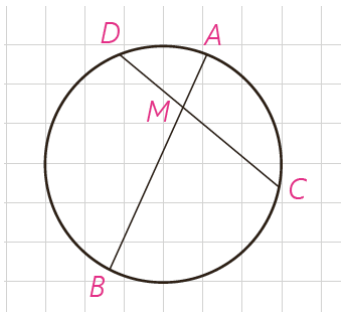
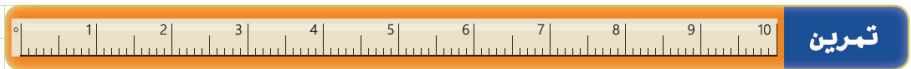
عمود منصف هر پاره خط یکتا است در نتیجه پاره خط OO' عمود منصف وتر مشترک AB است.



$$OO' < |R - R'|$$

۵- دو دایره متداخل. دو دایره را که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد، متداخل

می نامیم. دو دایره متداخل هیچ مماس مشترک ندارند و در آنها $OO' < |R - R'|$



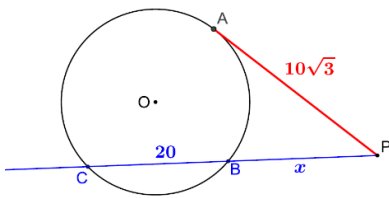
۱- در دایره $C(O,R)$ وتر AB و وتر CD به طول ۹ سانتی متر را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB = 11 \text{ cm}$ ، آن گاه وتر CD و وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند؟

$$\frac{DM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DM}{DC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DM}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = 3 \Rightarrow MC = 6$$

$$DM \cdot MC = AM \cdot BM \xrightarrow{AM=x} 3 \times 6 = x(11-x) \Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (x-9)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 9 \text{ ، با توجه به شکل غ ق ق}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{2}{9}$$

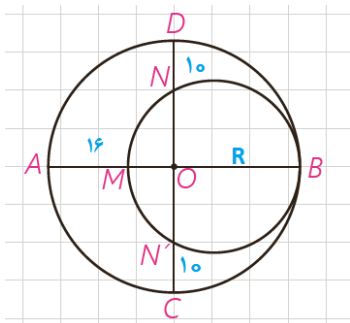


۲- از نقطه P در خارج دایره ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 20$. طول های PB و PC را به دست آورید.

$$PA^2 = PB \cdot PC \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x(x+20) \Rightarrow x^2 + 20x - 300 = 0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x+30) = 0 \Rightarrow x = 10, x = -30 \text{ غ ق ق}$$

$$\Rightarrow PB = 10, PC = 30$$



۳- در شکل مقابل، دو دایره برهم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ تر برهم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$ ، شعاع های دو دایره را پیدا کنید.

$$OB \cdot OM = ON \cdot ON' \Rightarrow R(R-16) = (R-10)(R-10)$$

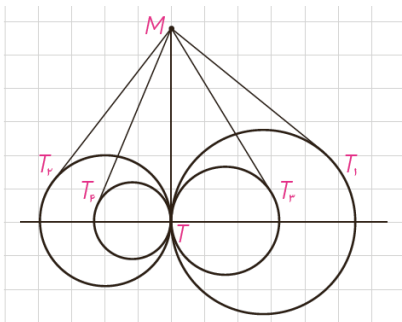
$$\Rightarrow R^2 - 16R = R^2 - 20R + 100 \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

$$R' = \frac{MB}{2} \Rightarrow R' = \frac{2R-16}{2} \Rightarrow R' = \frac{50-16}{2} = 17$$

۴- مطابق شکل مقابل، تمام دایره ها در نقطه T برهم مماس اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره ها مماس رسم کرده ایم؛ ثابت کنید

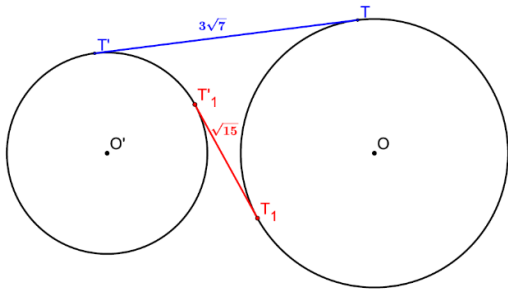
$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4 = \dots$$

با توجه به کار در کلاس ص ۱۲ می دانیم که از هر نقطه خارج دایره طول مماس های رسم شده باهم برابرند. بنابراین داریم :



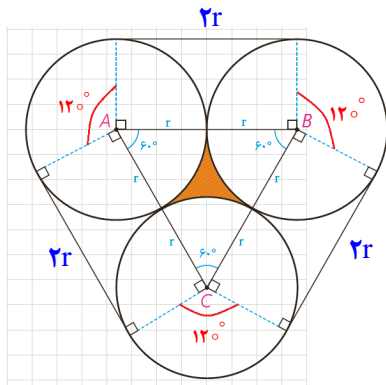
$$\left. \begin{array}{l} MT = MT_2 \\ MT = MT_4 \\ MT = MT_1 \\ MT = MT_3 \end{array} \right\} \Rightarrow MT = MT_1 = MT_2 = MT_3 = MT_4$$

۵- طول شعاع‌های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $3\sqrt{7}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{15}$ و طول خط‌المركزين آنها مساوی ۸ واحد است.



$$\begin{cases} TT'^2 = d^2 - (R - R')^2 \\ TT'^2 = d^2 - (R + R')^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 63 = 64 - (R - R')^2 \\ 15 = 64 - (R + R')^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R - R' = 1 \\ R + R' = 7 \end{cases} \Rightarrow 2R = 8 \Rightarrow R = 4 \Rightarrow R' = 3$$



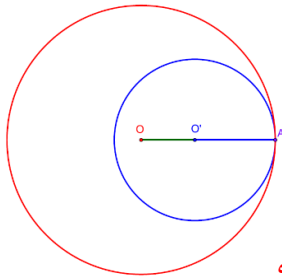
۶- سه دایره به شعاع‌های برابر r دو به دو برهم مماس اند. مطابق شکل مقابل این سه دایره به وسیله نخ بسته شده اند. نشان دهید طول این نخ برابر $6r + 2\pi r$. همچنین نشان دهید مساحت ناحیه به سه دایره برابر $r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ محدود است.

مجموع سه قطاع با زاویه 120° درجه تشکیل یک دایره کامل می دهد بنا براین داریم:
 $6r + 2\pi r =$ محیط یک دایره $+ 2r + 2r + 2r =$ طول نخ
 مجموع سه قطاع با زاویه 60° درجه تشکیل یک نیم دایره می دهد بنا بر این داریم:

مساحت نیم دایره - مساحت مثلث $ABC =$ مساحت ناحیه هاشور خورده

$$\text{مساحت ناحیه هاشور خورده} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2r)^2 - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{4} r^2 - \frac{\pi r^2}{2} = r^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})$$

۷- طول خط‌المركزين دو دایره مماس درونی ۲ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 16π سانتی مترمربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.



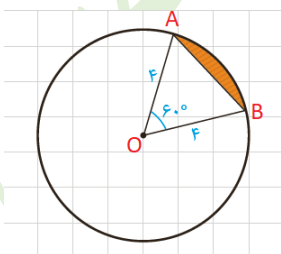
با توجه به شکل $OA = R$ و $O'A = R'$ در نتیجه:

$$\pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \Rightarrow (R - R')(R + R') = 16$$

$$\underline{OO' = R - R' = 2} \rightarrow 2(R + R') = 16 \Rightarrow R + R' = 8$$

$$\begin{cases} R + R' = 8 \\ R - R' = 2 \end{cases} \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow R = 5, R' = 3$$

۸- مطابق شکل دایره به شعاع ۴، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.



مثلث OAB متساوی الساقین است که و $\hat{O} = 60^\circ$ پس این مثلث متساوی الاضلاع است.

مساحت مثلث OAB - مساحت قطاع 60° درجه = مساحت قسمت رنگی (A)

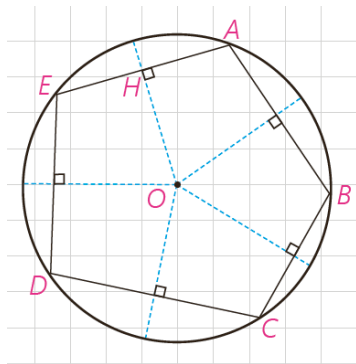
$$A = \frac{\pi r^2}{360} \alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} \times r^2 \Rightarrow A = \frac{16\pi}{360} \times 60 - 4\sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$$

چند ضلعی‌های محاطی و محیطی

چند ضلعی را محاطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس آن بگذرد؛ در این صورت دایره را دایره محیطی آن چند ضلعی می‌نامیم.

به‌طور مثال ABCDE یک پنج ضلعی محاطی است.

می‌دانیم برای اینکه دایره‌ای از دو نقطه بگذرد، باید مرکز آن روی عمود منصف پاره خطی باشد که آن دو نقطه دو سر آن است؛ بنابراین:



یک چند ضلعی، محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رأس باشند.

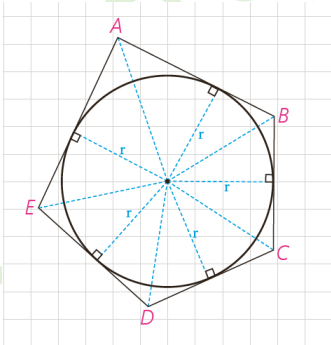
چرا؟ این نقطه مرکز دایره محیطی چند ضلعی است.

فرض: چند ضلعی محاطی است. **حکم:** عمود منصف‌های همه ی ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رسند.

باتوجه به تعریف چند ضلعی محاطی و فرض واضح است که فاصله ی همه ی رأس‌های چند ضلعی تا مرکز دایره به یک اندازه است (شعاع دایره) در نتیجه بنا بر خاصیت عمود منصف فاصله مرکز دایره از دوسر هر ضلع به یک فاصله (شعاع دایره) است، پس مرکز دایره روی عمود منصف این اضلاع قرار دارد. در نتیجه عمود منصف‌های همه ی ضلع‌های آن در یک نقطه (مرکز دایره) هم‌رسند.

فرض: عمود منصف‌های همه ی ضلع‌های چند ضلعی در یک نقطه هم‌رسند. **حکم:** چند ضلعی محاطی است.

باتوجه به فرض و خاصیت عمود منصف همه ی رأس‌های چند ضلعی از نقطه ی هم‌رسی عمود منصف‌ها به یک فاصله اند و در نتیجه این نقاط بنا بر تعریف دایره، روی دایره‌ای به شعاع این فاصله ی ثابت قرار دارند و بنا بر تعریف چند ضلعی محاطی این چند ضلعی محاطی است.

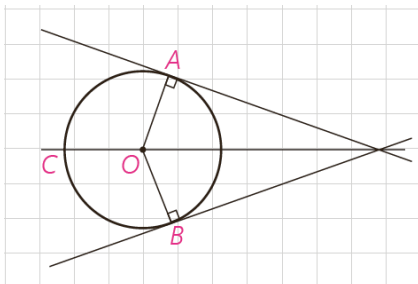


چند ضلعی را محیطی می‌گوییم اگر و فقط اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد؛ در این صورت دایره را دایره محیطی این چند ضلعی می‌نامیم.

فعالیت

فرض کنید دایره C بر دو ضلع زاویه‌ای مانند شکل مماس باشد.
(الف)

۱- پاره خط‌هایی که مرکز دایره را به نقاط تماس اضلاع با دایره وصل می‌کند، رسم کنید و آنها را OA و OB بنامید.



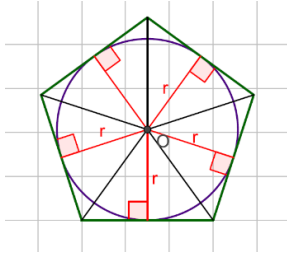
۲- پاره خط‌های OA و OB برای دایره چه نوع پاره خطی است؟

شعاع‌های دایره اند.

۳- فاصله نقطه O (مرکز دایره) تا ضلع‌های زاویه مفروض با طول پاره خط‌های

رسم شده (OA و OB) چه رابطه‌ای دارد؟

باهم برابرند. زیرا شعاع نقطه تماس بر خط مماس عمود است.



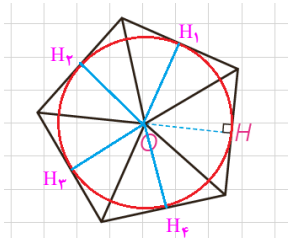
۴- با توجه به (۲) و (۳) فاصله مرکز دایره از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و

بنابراین نقطه O روی نیمساز زاویه است.

۵- فرض کنید مانند شکل مقابل، دایره در یک چند ضلعی محاط شده باشد. چرا

مرکز دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی چند ضلعی است؟

بنا به تعریف چند ضلعی محاطی، اضلاع چند ضلعی بر دایره مماس هستند و می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است، پس این شعاع‌ها همان فاصله‌ی مرکز دایره از اضلاع چند ضلعی هستند و همگی با هم برابرند. بنا بر خاصیت نیمساز مرکز این دایره روی نیمساز هر یک از زاویه‌های داخلی چند ضلعی است به عبارتی مرکز دایره محل برخورد نیمسازهای داخلی چند ضلعی است.



(ب) فرض کنید یک چند ضلعی مانند شکل مقابل به گونه‌ای باشد که نیمسازهای

زاویه‌های داخلی آن در نقطه O یکدیگر را قطع کرده باشند و OH پاره خط عمود به یک

ضلع چند ضلعی باشد. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH برای چند ضلعی مفروض چه

نوع دایره‌ای است؟ چرا؟

نقطه O روی نیمساز زاویه‌های داخلی است پس بنا بر خاصیت نیمسازها: $OH = OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4$

همچنین OH_1 و OH_2 و OH_3 و OH_4 همگی بر اضلاع عمود هستند. در نتیجه وقتی دایره‌ای به شعاع OH رسم می‌کنیم شعاع‌ها بر اضلاع عمود هستند پس اضلاع بر دایره در نقطه تماسشان عمودند یعنی دایره بر اضلاع چند ضلعی مماس است در

نتیجه بنا به تعریف دایره محاطی است.

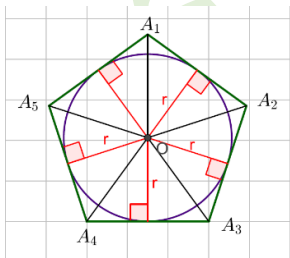
بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

کارد کلاس

اگر در یک n ضلعی محیطی با مساحت S و محیط ۲P شعاع دایره محاطی برابر

r باشد، نشان دهید $S = rp$.

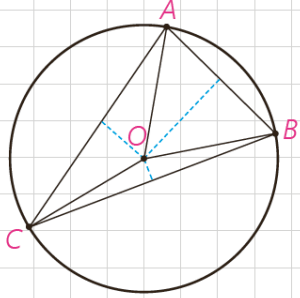
راهنمایی: کافی است مساحت n مثلث را محاسبه، و با هم جمع کنید.



$$S = \frac{1}{2}r \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}r \cdot A_2A_3 + \frac{1}{2}r \cdot A_3A_4 + \frac{1}{2}r \cdot A_4A_5 + \dots + \frac{1}{2}r \cdot A_{n-1}A_n$$

$$= \frac{1}{2}r(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n) = \frac{1}{2}r \times 2P \Rightarrow S = rp$$

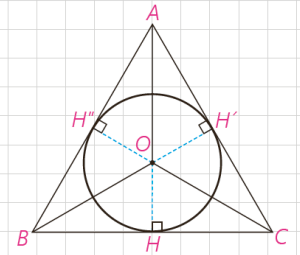
دایره‌های محیطی و محاطی مثلث



$$OA=OB=OC=r$$

قبلاً هم‌رسی سه عمود منصف یک مثلث را ثابت کرده‌ایم؛ بنابراین نقطه هم‌رسی سه عمود منصف مثلث، تنها نقطه‌ای است که از سه رأس یک مثلث به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز نقطه تلاقی سه عمود منصف و به شعاع فاصله این نقطه تا یک رأس رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث می‌گذرد؛ یعنی دایره محیطی مثلث است. در نتیجه مثلث همواره محاطی است.

همچنین ثابت کرده‌ایم سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث در نقطه‌ای درون مثلث هم‌رس‌اند. در نتیجه مثلث، محیطی نیز هست. بنابر ویژگی نیمساز، این نقطه از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



$$OH=OH'=OH''=r$$

پس مرکز دایره محاطی مثلث نقطه هم‌رسی سه نیمساز است و شعاع این دایره، که آن را با r نشان می‌دهیم، فاصله این نقطه از هر یک از سه ضلع است. بنابر آنچه در مورد n ضلعی‌های محیطی نشان دادیم در مثلث نیز $S=pr$ که S مساحت و P نصف محیط مثلث است.

اگر نیمساز زاویه A از ΔABC را رسم کنیم، نیمساز زاویه خارجی C را در نقطه‌ای مانند O قطع می‌کند. این نقطه از خط BC و خط‌های AC و AB به یک فاصله است؛ چرا؟

نقطه O روی نیمساز زاویه A است پس $OT = OT'$ (۱)

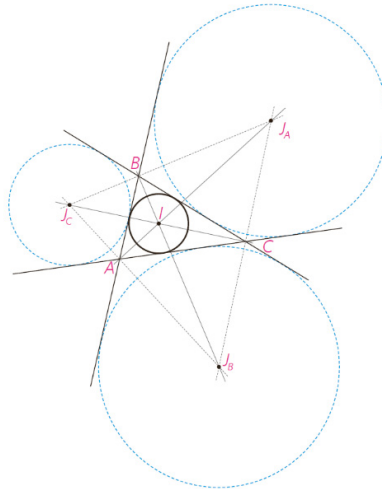
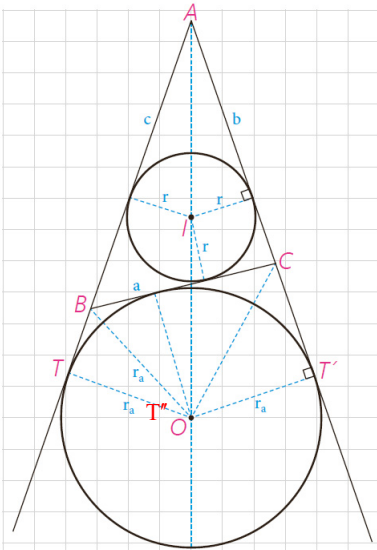
نقطه O روی نیمساز زاویه خارجی C است پس $OT'' = OT'$ (۲)

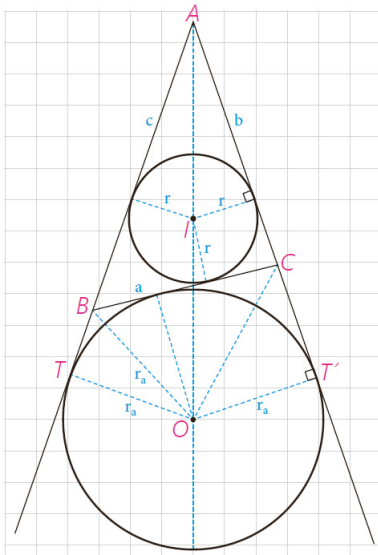
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که: $OT'' = OT$ پس نقطه O روی نیمساز زاویه خارجی B نیز هست. به عبارتی این نقطه از خط BC و خط‌های AC و AB به یک فاصله است.

بنابراین O نیز مرکز دایره‌ای است که بر ضلع BC و خط‌های شامل دو ضلع دیگر مماس است. این دایره را دایره محاطی خارجی نظیر رأس A می‌نامند.

شعاع این دایره را با r_a نشان می‌دهند؛ به همین ترتیب دو دایره محاطی خارجی دیگر

نظیر دو رأس B و C وجود دارد.





اکنون در فعالیت زیر محاسبه شعاع دایره محاطی خارجی را بررسی می‌کنیم.

در شکل داریم: $S(ABC) = S(OAC) + S(OAB) - S(OBC)$ اگر مساحت

ΔABC را به S نشان دهیم، $S = \frac{1}{2} r_a (b + c - a)$. اگر محیط مثلث را با $2p$

نشان دهیم، داریم، $2p = a + b + c$ ؛ پس $2p - 2a = a + b + c - 2a = b + c - a$

در نتیجه $S = r_a(P - a)$ و بنابراین $r_a = \frac{S}{p - a}$ به طور مشابه برای اضلاع دیگر داریم:

$$r_b = \frac{S}{p - b} \quad r_c = \frac{S}{p - c}$$

برخلاف مثلث، همه چند ضلعی‌های دیگر، لزوماً محاطی یا محیطی نیستند. در بخش

بعد به شرایط محاطی یا محیطی بودن یک چهار ضلعی می‌پردازیم.

■ چهار ضلعی‌های محاطی و محیطی

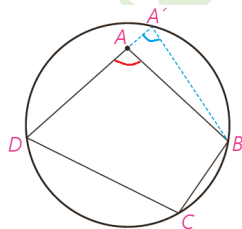
قضیه: یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

اثبات

۱- فرض کنیم چهار ضلعی ABCD محاطی باشد؛ مجموع اندازه‌های \hat{A} ، \hat{C} ، نصف مجموع اندازه‌های کمان‌های DCB و DAB است؛ اما مجموع اندازه‌های این دو کمان 180° است و در نتیجه مجموع اندازه‌های \hat{A} ، \hat{C} برابر 180° است. به همین ترتیب \hat{B} ، \hat{D} مکمل‌اند.

۲- فرض کنیم \hat{A} ، \hat{C} مکمل باشند. با برهان خلف ثابت می‌کنیم چهارضلعی ABCD محاطی است. از سه نقطه B، C و D همواره یک دایره می‌گذرد؛ چرا؟

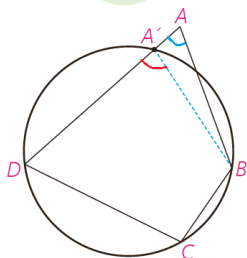
زیرا عمود منصف‌های اضلاع یک مثلث هم‌رسند و مرکز دایره‌ی محیطی هر چندضلعی نقطهٔ هم‌رسی عمود منصف‌های اضلاع است.



اگر این دایره از A نگذرد، خط AD را در نقطه‌ای دیگری مانند A' قطع می‌کند که A' بین A و D یا A بین A' و D است. اکنون چهارضلعی A'BCD محاطی است؛ پس \hat{C} و $\widehat{BA'D}$ مکمل‌اند؛ در نتیجه باید \hat{A} و $\widehat{BA'D}$ هم‌اندازه باشند و این ممکن نیست؛ چرا؟

زیرا در هر مثلث هر زاویه خارجی از زاویه داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است.

در نتیجه A' همان A است.



قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشند.

اساس اثبات بر این است که اگر از نقطه‌ای بیرون دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم دو پاره خط مماس هم اندازه‌اند.

اثبات

۱- اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد،

$$AB+CD=AM+MB+PC+PD=AQ+BN+CN+DQ \\ =AQ+DQ+BN+CN=AD+BC$$

عکس این قضیه نیز با برهان خلف ثابت می‌شود.

۲- فرض کنید: $AB+CD=BC+AD$.

نیمسازهای دوزاویه B و C همدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند. با توجه به ویژگی نیمساز، چرا نقطه I از سه ضلع CD و BC و AB به یک فاصله است؟ ($IM=IN=IP$)

نقطه I روی نیمساز زاویه B است پس $IM=IN$ (۱)

نقطه I روی نیمساز زاویه C است پس $IP=IN$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که: $IP=IN=IM$ پس نقطه I از سه ضلع CD، BC و AB به یک فاصله است.

چرا دایره‌ای به مرکز I و شعاع IM بر AB و BC و CD مماس است؟

زیرا این شعاع‌ها در نقاط اشتراک با دایره بر آن عمود هستند.

حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد، حکم ثابت شده است.

اما اگر این دایره بر AD مماس نباشد از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا خط CD را در نقطه‌ای مانند E قطع کند؛ در این صورت E بین P و D یا D بین E و P واقع می‌شود.

پس، $AB+EC=AE+BC$ ؛ (چرا؟)

چهارضلعی ABCE محیطی است پس بنا بر بند (۱) همین قضیه نتیجه می‌گیریم: $AB+CE=AE+BC$

از این رابطه با استفاده از رابطه فرض چگونه نتیجه می‌گیرید: $AD=DE+AE$ ؟

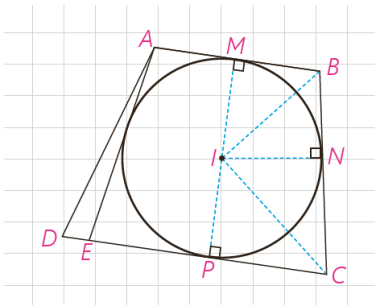
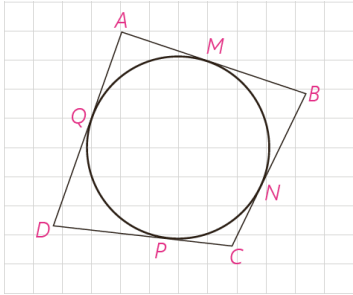
$$\left. \begin{array}{l} AB+CD=AD+BC \\ AB+CE=AE+BC \end{array} \right\} \Rightarrow CD-CE=AD-AE \Rightarrow CD-CE+AE=AD \Rightarrow DE+AE=AD$$

این رابطه امکان ندارد؛ (چرا؟)

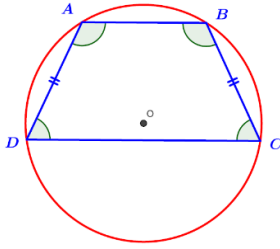
بنا بر نامساوی مثلثی در مثلث ADE داریم: $DE+AE > AD$ پس رابطه‌ی فوق امکان ندارد؛ مگر این که E همان D

باشد.

پس E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.



با توجه به این قضیه‌ها بررسی کنید که چهار ضلعی‌های دوزنقه، کایت، متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع کدام محاطی، و کدام محیطی است. دوزنقه متساوی الساقین چگونه؟

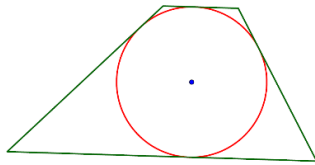


دوزنقه در حالت کلی محاطی نیست زیرا زوایای مقابل آن مکمل نیستند. اما اگر دوزنقه متساوی الساقین باشد داریم:

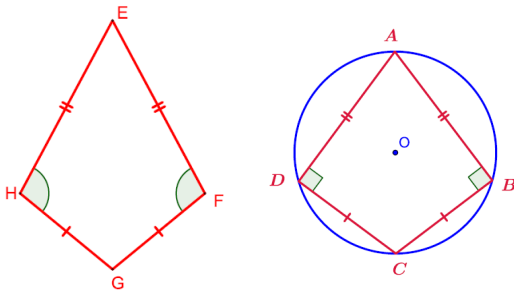
$$\left. \begin{aligned} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ &\xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ &\xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{دوزنقه } ABCD \text{ محاطی است}$$

یک دوزنقه در حالت کلی محیطی نیست اما می‌تواند محیطی باشد به شرط آن که نیمسازهای داخلی هم‌مس باشد.

مانند شکل مقابل:



یک کایت در حالت کلی محاطی نیست ولی اگر دو زاویه مقابل آن قائمه باشند می‌تواند محاطی باشد.

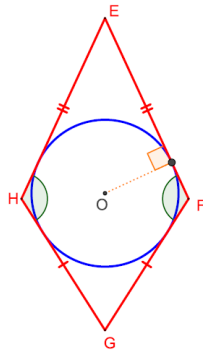


$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \xrightarrow{\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

پس بنا بر قضیه کایت ABCD محاطی است.

یک کایت حتماً محیطی است زیرا مجموع اضلاع مقابل با هم برابرند.

$$\left. \begin{aligned} EF = EH \\ GH = GF \end{aligned} \right\} \Rightarrow EF + GH = EH + GF$$



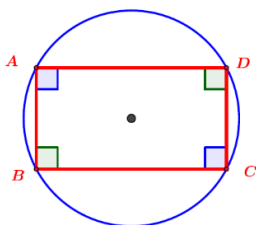
یک متوازی‌الاضلاع در حالت کلی محاطی نیست؛ زیرا:

زاویه‌های مقابل نمی‌توانند مساوی 180° باشند.

$$\hat{A} + \hat{C} < 180^\circ, \hat{B} + \hat{D} > 180^\circ$$

یک متوازی‌الاضلاع در حالت کلی محیطی نیست؛ زیرا اضلاع مقابل دو به دو برابرند و مجموع آن‌ها با هم برابر نیست.

با توجه به شکل فوق: $AB + DC < AD + BC$.



یک مستطیل محاطی است؛ زیرا مجموع زاویه‌های مقابل همیشه برابر با 180° است.



یک مستطیل محیطی نیست زیرا اضلاع مقابل برابرند و مجموع آن ها باهم برابر نیست
 با توجه به شکل: $AB+DC < AD+BC$

یک لوزی محاطی نیست؛ زیرا مجموع زاویه های مقابل 180° نیست.
 یک لوزی محیطی است؛ زیرا مجموع اضلاع مقابل باهم برابر هستند.

یک مربع هم می تواند محیطی و هم محاطی باشد. زیرا هم مجموع زاویه های مقابل 180° است و هم مجموع اضلاع مقابل باهم برابر هستند.

از دیگر چندضلعی های محاطی و محیطی، چند ضلعی های منتظم است.

یک چند ضلعی محدب را منتظم می نامند، هرگاه تمام ضلع های آن هم اندازه و تمام زاویه های آن نیز هم اندازه باشند.

مثلت مساوی الاضلاع سه ضلعی منتظم و مربع چهارضلعی منتظم است.

در فعالیت زیر نشان می دهیم هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است:

فعالیت

فرض کنید اندازه هر زاویه n ضلعی منتظم ABCD...، 2α باشد؛ عمود
 منصف های دو ضلع AB و BC را رسم می کنیم. فرض کنیم در O متقاطع اند. بنابراین
 $OA = OB = OC$

پس $\triangle OAB \cong \triangle OBC$ چرا؟

دو مثلث به حالت (ض ض ض) هم نهشت هستند.

$$\widehat{ABC} = \widehat{OBA} + \widehat{OBC} \xrightarrow{\widehat{OBA} = \widehat{OBC}} 2\alpha = 2\widehat{OBA}$$

$$\Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \alpha$$

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \alpha$$

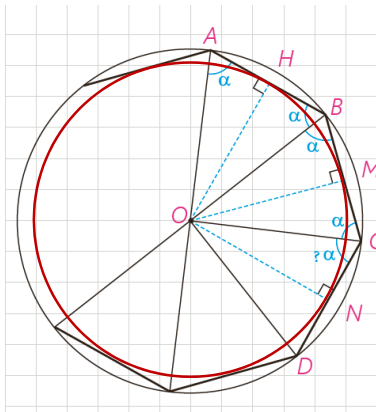
اکنون از D به O وصل می کنیم. چرا اندازه \widehat{OCD} برابر α است؟ چرا

$\triangle OAB \cong \triangle OBC$ و $OA = OB = OC = OD$ ؟

$$\widehat{BCD} = \widehat{OCB} + \widehat{OCD} \Rightarrow 2\alpha = \alpha + \widehat{OCD} \Rightarrow \widehat{OCD} = \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} OC = OC \\ BC = DC \\ \widehat{OCD} = \widehat{OCB} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OCD \cong \triangle OCB \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} OD = OB$$

$$\left. \begin{array}{l} OD = OB \\ OA = OB = OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA = OB = OC = OD$$



با ادامه این روند داریم :

$OA=OB=OC=OD=\dots\dots$ و $OH=ON=OM=\dots\dots$ بنابراین، O از همه

رأس‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که از تمام رأس‌های n ضلعی منتظم می‌گذرد.

به همین ترتیب O از تمام ضلع‌ها به یک فاصله است؛ پس مرکز دایره‌ای است که

بر تمام ضلع‌های n ضلعی منتظم مماس است.



تمرین

۱- ثابت کنید یک دوزنقه، محاطی است، اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد.

فرض : دوزنقه متساوی الساقین است. **حکم :** دوزنقه محاطی است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{C}=\hat{D}} \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}=\hat{B}} \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{دوزنقه } ABCD \text{ محاطی است}$$

فرض : دوزنقه محاطی است. **حکم :** دوزنقه متساوی الساقین است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \xrightarrow{\text{قی خطوط موازی}} \text{مورب } AD, AB \parallel DC \\ \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = \hat{A} + \hat{C} \Rightarrow \hat{D} = \hat{C} \xrightarrow{\text{قی زاویه های مکمل}} \hat{A} = \hat{B}$$

در این دوزنقه زاویه های مجاور به ساق برابرند در نتیجه دوزنقه متساوی الساقین است.

۲- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را به دست آورید که در دایره‌ای به شعاع R

محاط شده باشد.

مرکز دایره ی محیطی نقطه O محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث است و چون مثلث

متساوی الاضلاع است نقطه O محل برخورد میانه هاهم هست. بنا براین :

راه اول :

$$AB = BC = AC = a, \quad BH = CH = \frac{a}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} OH = \frac{OA}{2} \Rightarrow OH = \frac{R}{2} \Rightarrow AH = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R \\ \Delta ACH: H = 90^\circ \Rightarrow AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{2}R \Rightarrow a = \frac{3R}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = R\sqrt{3}$$

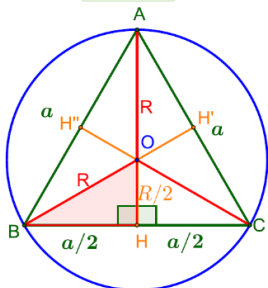
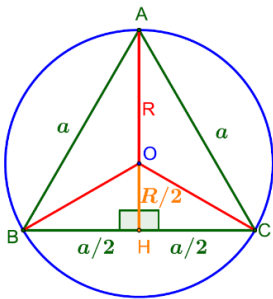
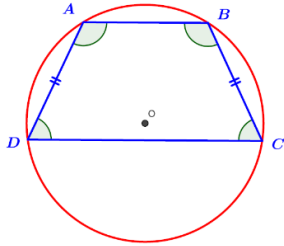
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(R\sqrt{3})^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$

راه دوم: باتوجه به شکل مثلث ABC از شش مثلث همنهشت ساخته شده است. این مثلث های به حالت (ض ض ض)

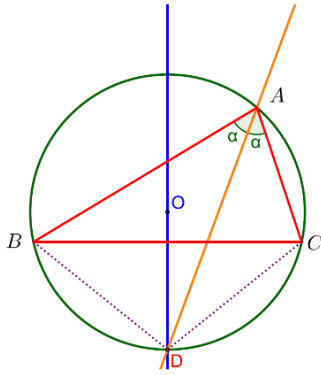
همنهشت هستند.

$$\Delta OBH: H = 90^\circ \Rightarrow BH = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = 6S_{OBH} \Rightarrow S_{ABC} = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{R}{2} \times \frac{R}{2} \sqrt{3} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$$



۳- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند.

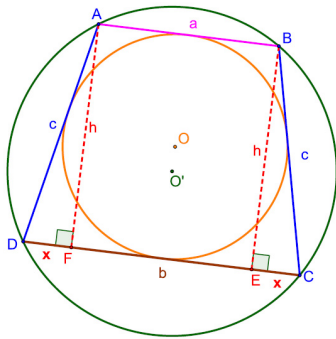


فرض کنیم نیمساز زاویه BAC دایره محیطی را در نقطه D قطع کند:

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \xrightarrow{\text{محاطی}} \widehat{BD} = \widehat{CD} \xrightarrow{\text{ق کمان ها و وترهای مساوی}} BD = CD$$

فاصله نقطه D از دو نقطه B و C به یک اندازه است پس بنا بر خاصیت عمود منصف نقطه D روی عمود منصف پاره خط BC نیز قرار دارد.

۴- یک دوزنقه، هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این دوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها.



چون دوزنقه ABCD محاطی است پس متساوی الساقین است و چون محیطی است

مجموع دو ضلع مقابل با مجموع دو ضلع دیگر برابر است. در نتیجه: $2c = a + b$

و مثلث ADF قائم الزویه است.

$$2c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}, \quad b = 2x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}$$

$$h^2 = c^2 - x^2 \Rightarrow h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4ab}{4} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b) \times h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)\sqrt{ab}$$

۵- اگر r_a, r_b, r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی

داخلی باشد، نشان دهید.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$S = rp \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S}$$

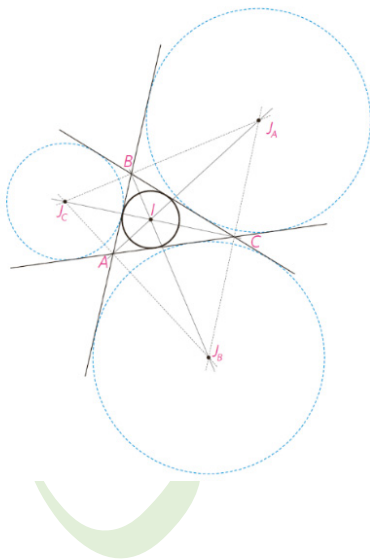
$$r_a = \frac{S}{p-a} \Rightarrow \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} \Rightarrow \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} \Rightarrow \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p - (a+b+c)}{S} = \frac{3p - 2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$



به همین ترتیب اگر h_a, h_b, h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \\ S &= \frac{1}{2} bh_b \Rightarrow h_b = \frac{2S}{b} \Rightarrow \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \\ S &= \frac{1}{2} ch_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S} \end{aligned} \right\} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

۶- اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M و N و P باشند، و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع باشند،

نشان دهید:

$$AM = AN = p - a$$

$$\left. \begin{aligned} AN &= c - BN \\ AM &= b - CM \end{aligned} \right\} \Rightarrow AM + AN = b + c - (BN + CM)$$

$$\xrightarrow[\substack{AM=AN \\ CM=CP, BN=BP}]{\text{}} 2AM = b + c - \underbrace{(BP + CP)}_a = b + c - a$$

$$2AM = 2p - 2a \Rightarrow AM = AN = p - a$$

$$BN = BP = p - b$$

$$\left. \begin{aligned} BN &= c - AN \\ BP &= a - CP \end{aligned} \right\} \Rightarrow BN + BP = a + c - (AN + CP)$$

$$\xrightarrow[\substack{BP=BN \\ AN=AM, CP=CM}]{\text{}} 2BN = a + c - \underbrace{(AM + CM)}_b = a + c - b$$

$$2BN = 2p - 2b \Rightarrow BN = BP = p - b$$

$$CM = CP = p - c$$

$$\left. \begin{aligned} CM &= b - AM \\ CP &= a - BP \end{aligned} \right\} \Rightarrow CM + CP = b + a - (AM + BP)$$

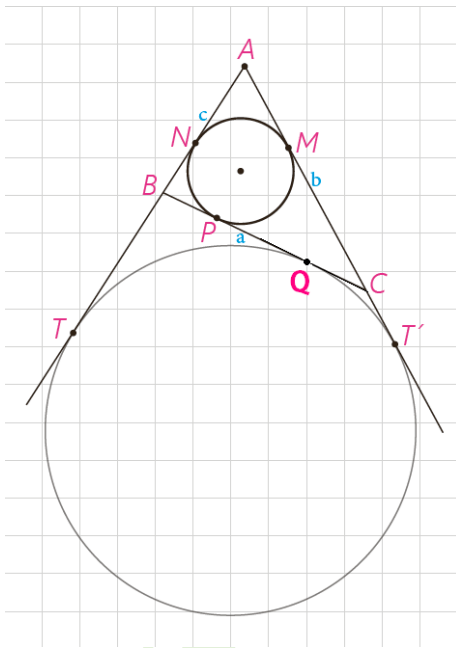
$$\xrightarrow[\substack{CM=CP \\ AN=AM, BP=BN}]{\text{}} 2CM = b + a - \underbrace{(AN + BN)}_c = b + a - c$$

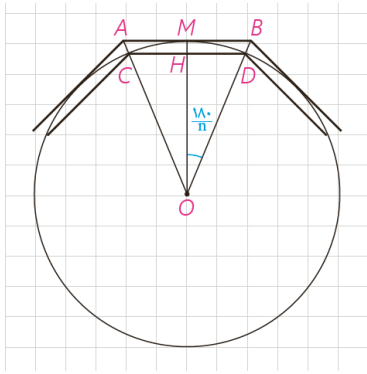
$$2CM = 2p - 2c \Rightarrow CM = CP = p - c$$

$$AT = AT' = p$$

$$AT + AT' = c + BT + b + CT' \xrightarrow[\substack{AT=AT' \\ BT=BQ, CT'=CQ}]{\text{}} 2AT = c + b + \underbrace{BQ + CQ}_a = c + b + a = 2p$$

$$\Rightarrow 2AT = 2p \Rightarrow AT = AT' = p$$





۷- یک دایره به شعاع r و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرد. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلعی‌های n ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آن‌گاه $AB = 2r \tan \frac{18^\circ}{n}$ و $CD = 2r \sin \frac{18^\circ}{n}$.

$$\triangle OHD: \hat{H} = 9^\circ \xrightarrow{OD=r} \sin \frac{18^\circ}{n} = \frac{HD}{r} \xrightarrow{\times 2} 2 \sin \frac{18^\circ}{n} = \frac{2HD}{r}$$

$$\xrightarrow{2HD=CD} CD = 2r \sin \frac{18^\circ}{n}$$

$$\triangle OMB: \hat{M} = 9^\circ \xrightarrow{OM=r} \tan \frac{18^\circ}{n} = \frac{MB}{r} \xrightarrow{\times 2} 2 \tan \frac{18^\circ}{n} = \frac{2MB}{r}$$

$$\xrightarrow{2MB=AB} AB = 2r \tan \frac{18^\circ}{n}$$

۸- شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی.

مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته‌ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی‌الاضلاع است.

اندازه هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم 120° است. بنا بر این زاویه‌های خارجی

60° است. با توجه به شکل و مجموع زوایای داخلی هر مثلث نتیجه می‌گیریم که

$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = 60^\circ \text{ و در نتیجه مثلث } MNP \text{ متساوی الساقین است.}$$

ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

اگر قطرهای شش ضلعی منتظم را رسم کنیم آن را به شش مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم

می‌کنیم و در مثلث MNP ، ۹ مثلث هم‌نهشت ایجاد می‌شود.

$$\frac{S_{\text{شش ضلعی}}}{S_{MNP}} = \frac{6S_{MAB}}{9S_{MAB}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH ، TH' و TH'' را به ترتیب بر

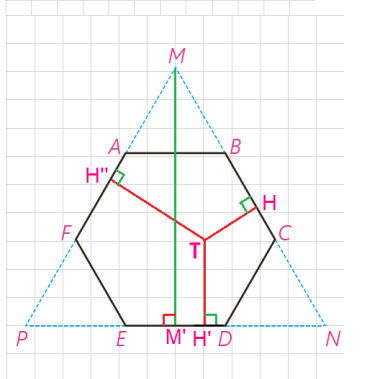
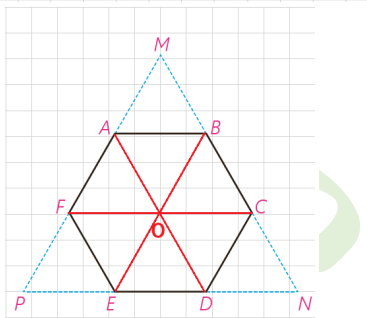
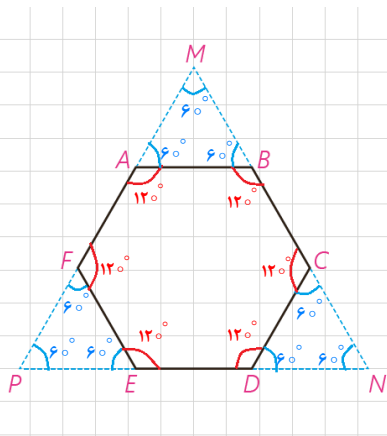
BC ، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه ۱ می‌دانید، مجموع طول‌های

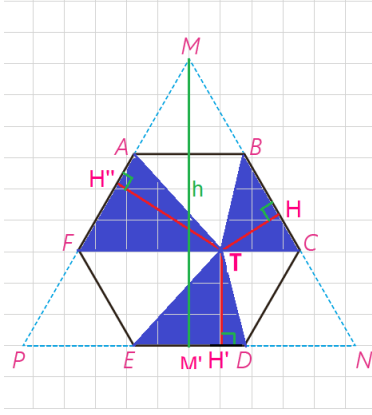
این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع مقداری ثابت است و این مقدار با

طول ارتفاع مثلث برابر است:

$$TH + TH' + TH'' = MM'$$





ت) مجموع مساحت‌های مثلث‌های TBC، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

$$S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{2} AF \cdot TH'' + \frac{1}{2} DE \cdot TH' + \frac{1}{2} BC \cdot TH$$

$$\xrightarrow{AF=ED=BC=a} S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{2} a (TH'' + TH' + TH) = \frac{1}{2} ah$$

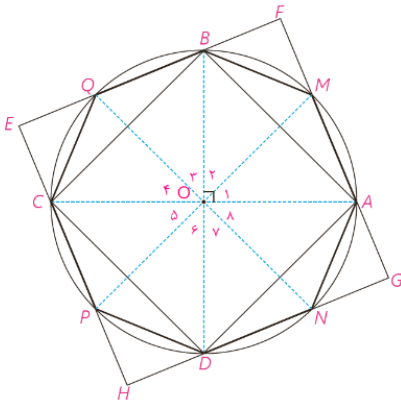
$$\Rightarrow S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC} = \frac{1}{3} ah$$

$$S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2} MN \cdot h \xrightarrow{MN=3a} S_{\triangle MNP} = \frac{3}{2} a \cdot h$$

$$\Rightarrow \frac{S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}}{S_{MNP}} = \frac{\frac{1}{2} ah}{\frac{3}{2} a \cdot h} \Rightarrow \frac{S_{TAF} + S_{TDE} + S_{TBC}}{S_{MNP}} = \frac{1}{3}$$

مساحت مثلث‌های آبی رنگ $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث MNP است و مساحت شش ضلعی $\frac{2}{3}$ مساحت مثلث MNP مساحت مثلث‌های سفید و آبی برابر با مساحت شش ضلعی است پس مساحت مثلث‌های سفید هم برابر با $\frac{1}{3}$ است بنا براین مساحت مثلث‌های آبی با مساحت مثلث‌های سفید برابر است.

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$



۹- دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را رسم می‌کنیم؛ چهارضلعی

ABCD یک مربع است؛ چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم کنید تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی AMBQCPDN منتظم است.

در چهارضلعی ABCD قطر همدیگر را نصف می‌کنند و باهم برابرند پس مستطیل است و چون قطر‌ها برهم عمودند نتیجه می‌گیریم که مربع است.

عمود منصف هر ضلع نیمساز رأس مقابل نیز هست. پس:

$$O_1 = O_2 = O_3 = O_4 = O_5 = O_6 = O_7 = O_8 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MB} = \widehat{BQ} = \widehat{QC} = \widehat{CP} = \widehat{PD} = \widehat{DN} = \widehat{NA}$$

$$\Rightarrow AM = MB = BQ = QC = CP = PD = DN = NA$$