

نام و نام خانوادگی:

کلاس ۲۰۱

زمان امتحان: ۴۵ دقیقه

۱- اگر a یک عدد فرد باشد ثابت کنید $a^2 - 1$ مضرب عدد ۸ است. ۱۵ نمره

۲- اگر $\sqrt{7}$ یک عدد گنگ باشد نشان دهید عدد $(5 - \sqrt{7})$ هم یک عدد گنگ است. ۱۵ نمره

۳- ثابت کنید $\forall x, y \in \mathbb{R}: x^2 - xy \geq x + y - y^2 - 1$ ۱۵ نمره

۴- اگر باقیمانده تقسیم عددهای a بر ۱۵ برتریب ۲ باشد باقیمانده تقسیم عدد $A = 2a - 7b$

در تقسیم بر ۱۵ را پیدا کنید ۱۵ نمره

۵- نشان دهید ۲ عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اول هستند. ۱۵ نمره

۶- اگر $a|b$ و $c|d$ ثابت کنید: $ac|bd$ ۱۵ نمره

۷- فرض کنید k یک عدد صحیح دلخواه باشد و $5|2k+1$ ثابت کنید: $25|4k^2 - 4k - 29$ ۱۵ نمره

۱۴۰۱/۸/۱۵
میرزا...
شماره...

$$\alpha = 2k+1 \xrightarrow{a^2-1} (2k+1)^2 - 1 = \sum k^2 + \sum k + 1 - 1 = \sum k^2 + \sum k$$

$$= 2k(k+1) = 2q$$

ضرب اعداد متوالی
2q

(1)

$$\sqrt{v} \in \mathbb{Q}^c \xrightarrow{\text{فرض P}} (\delta - \sqrt{v}) \in \mathbb{Q}^c$$

حکم q

برعکس خلف:

(2)

$$\sim q: (\delta - \sqrt{v}) \notin \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{فرض خلف}} \delta - \sqrt{v} \in \mathbb{Q} \rightarrow \delta - \sqrt{v} = \frac{a}{b} \rightarrow \sqrt{v} = \delta - \frac{a}{b}$$

$$a, b \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0$$

$$\sqrt{v} = \frac{\delta b - a}{b} \rightarrow \in \mathbb{Z}$$

این نتیجه با فرض تناقض دارد پس فرض خلف باطل و حکم درست است

$$\Rightarrow \sqrt{v} \in \mathbb{Q} : \sim P$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 - xy \geq x + y - y^2 - 1 \iff$$

(3)

$$2x^2 - 2xy \geq 2x + 2y - 2y^2 - 2 \iff$$

$$2x^2 - 2xy - 2x - 2y + 2y^2 + 2 \geq 0 \iff$$

$$x^2 + y^2 - 2xy - x - y + 1 + 1 \geq 0 \iff$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x - y)^2 \geq 0 \iff$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

چون جمله هر کدام بازرگ است نیز است پس حکم درست است

$$\frac{a}{4} \Big| \frac{15}{9} \rightarrow a = 15q + 4$$

$$\frac{b}{v} \Big| \frac{15}{9'} \rightarrow b = 15q' + v$$

$$A = 15a - vb$$

$$= 15 \cdot 9 + 12 - 15 \cdot 9q' - 4q$$

$$= 15 \cdot 9 - 15 \cdot 9q' - 4v$$

$$= 15(9 - 9q') - 4v = 15k - 4v - v$$

K

$$= 15(k-1) - v + 15$$

$$= 15k' + 1$$

r=1

(4)

اعدد متوالی $n+1, n$

(5)

فرض: $(n+1, n) = d \rightarrow \begin{matrix} d | n+1 \\ d | n \end{matrix} \xrightarrow{\ominus} d | n+1 - n \rightarrow d | 1 \rightarrow d = 1$

بنابراین $(n+1, n) = 1$ یعنی نسبت هم اول هستند.

$a | b \rightarrow b = aq$

$c | d \rightarrow d = cq'$

$\xrightarrow{x} bd = acqq' \rightarrow bd = kac$
 \xleftrightarrow{k}

\downarrow
 $ac | bd$

(4)

$\omega | 2k+1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 2\omega | \underbrace{\Sigma k^2 + \Sigma k + 1}_x$

$\xrightarrow{x\omega} 2\omega | \underbrace{10k + \omega}_y$

$\xrightarrow{x\omega} 2\omega | \underbrace{-2\omega}_z$

$\rightarrow 2\omega | x - y + z$

$2\omega | \Sigma k^2 - 7k - 29$

(3)

