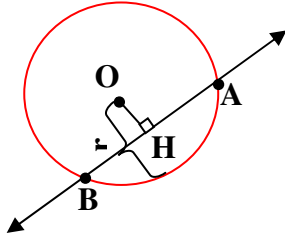


فصل ۹
دایره ها

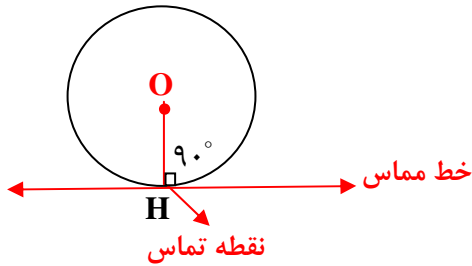
* خط و دایره

یک خط و یک دایره دارای سه حالت زیر می باشند :

۱. خط، دایره را در دو نقطه قطع کند. (شعاع $(OH < r)$)

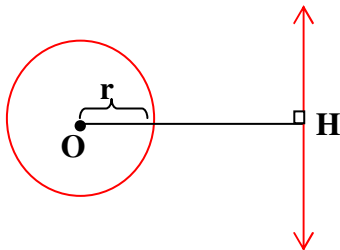


۲. خط دایره را در یک نقطه قطع کند. ($OH = r$)



نکته : شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

۳. خط دایره را قطع نکند. ($OH > r$)

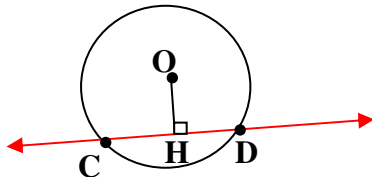


◀ مثال «۱» : فاصله ی خطی تا مرکز دایره $\frac{2}{3}$ شعاع دایره است. وضع خط و دایره را با رسم

شکل توضیح دهید.

پاسخ : چون فاصله خط تا مرکز دایره از شعاع کوچک تر است پس خط دایره را در دو نقطه قطع

می کند یعنی : $OH < r$



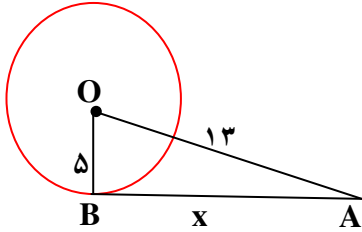
◀ **مثال «۲»:** در شکل زیر \overline{AB} بر دایره مماس است. مقدار x را به دست آورید.

پاسخ: مثلث AOB قائم الزویه است $\Rightarrow OB \perp AB$

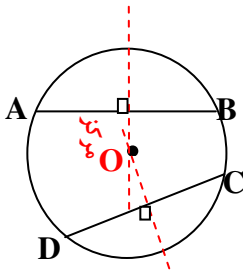
$$13^2 = x^2 + 5^2$$

$$169 = x^2 + 25$$

$$x^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow x = \sqrt{144} = 12$$

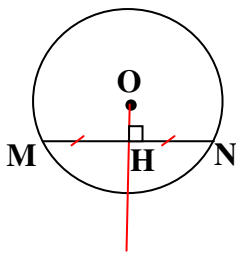


* **پیدا کردن مرکز دایره:** در هر دایره عمود منصف هر وتر، قطر دایره می باشد بنابراین با رسم دو وتر دلخواه (غیرموازی) و رسم عمود منصف های آن ها، محل برخورد عمود منصف ها (قطرها) مرکز دایره را مشخص می کند.



نکته: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود، آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند و برعکس خطی که از وسط وتر و مرکز دایره می گذرد، بر وتر عمود است.

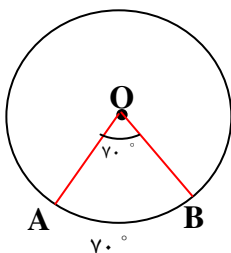
◀ **مثال:** در شکل مقابل O مرکز دایره و $\widehat{MH} = \widehat{HN}$, $\hat{H} = 90^\circ$



* **زاویه مرکزی:** هر زاویه که رأس آن روی مرکز دایره و ضلع های آن شعاع های دایره باشند، زاویه مرکزی نامیده می شود.

* اندازه ی هر زاویه مرکزی با اندازه ی کمان مقابل آن مساوی است.

$$\hat{O} = \widehat{AB} = 70^\circ$$



نکته ۱) محیط دایره ۳۶۰ درجه است.

نکته ۲) در هر دایره، اگر دو کمان باهم مساوی باشند، وترهای نظیر آن ها نیز باهم مساوی اند.

نکته ۳) در هر دایره، اگر دو وتر باهم مساوی باشند، کمان های نظیر آن ها نیز باهم مساوی اند.

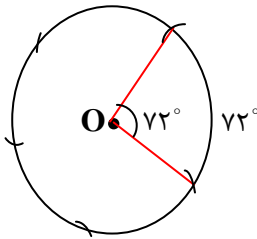
نکته ۴) کمان های کم تر از ۱۸۰ درجه با دو حرف و کمان های بزرگ تر از ۱۸۰ درجه را با سه حرف نمایش می دهند.

*** تقسیم دایره به کمان های مساوی :**

الف) چهار کمان مساوی : دو قطر عمود برهم دایره را به چهار کمان مساوی تقسیم می کند.
 ب) شش کمان مساوی : دهانه ی پرگار را به اندازه ی شعاع دایره باز کرده و سپس از یک نقطه روی محیط دایره به طور متوالی کمان می زنیم.
 ج) حالت کلی تقسیمات دایره : ابتدا یکی از شعاع های دایره را به دلخواه رسم می کنیم. سپس محیط دایره (۳۶۰ درجه) را بر تعداد تقسیمات خواسته شده، تقسیم کرده و به وسیله نقاله زاویه ای به همان اندازه رسم می کنیم. دهانه ی پرگار را به اندازه وتر ایجاد شده باز کرده، سوزن پرگار را روی یکی از نقاط دو سر پاره خط قرار داده و پی در پی کمان های مساوی می زنیم.

◀ مثال : دایره مقابل را به ۵ کمان مساوی تقسیم کنید.

$$\text{زاویه مرکز و کمان مقابل به آن } 360 \div 5 = 72$$

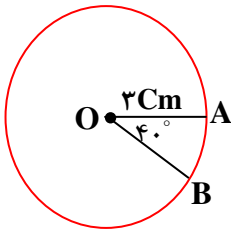


*** محاسبه طول کمانی از دایره :**

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان}}{360}$$

به عبارت دیگر : نسبت زاویه موردنظر را به ۳۶۰ درجه به دست آورده و آن کسر را در محیط دایره ضرب می کنیم.

◀ مثال : محمد می داند زاویه $\hat{AOB} = 40^\circ$ و شعاع دایره ۳cm است. او می خواهد طول کمان AB را به دست آورد. او را راهنمایی کنید.



$$360 \div 40 = 9$$

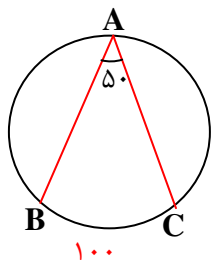
عدد پی × قطر = محیط دایره

$$\text{محیط دایره} = 6 \times 3.14 = 18.84$$

$$\widehat{AB} \text{ طول کمان } = \frac{1}{9} \times 18.84 \approx 2.1$$

* **زاویه محاطی**: زاویه محاطی زاویه ای است که رأس آن روی محیط دایره و ضلع های آن وترهای دایره باشند.

* اندازه ی هر زاویه محاطی با نصف کمان مقابل آن برابر است.

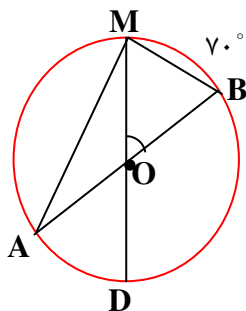


$$\hat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{100}{2} = 50^\circ$$

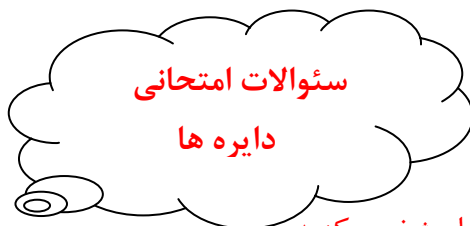
نکته (۱): زاویه های محاطی رو به رو به یک کمان باهم مساوی اند.

نکته (۲): اندازه ی زاویه محاطی رو به رو به قطر دایره ۹۰ درجه (قائم) است.

◀ **مثال**: در شکل زیر O مرکز دایره و \overline{AB} قطر دایره است. اندازه ی زاویه ها و کمان های خواسته شده را بنویسید.



مرکزی	$\widehat{MOB} = \widehat{MB} = 70^\circ$
محاطی	$\hat{A} = \frac{\widehat{MB}}{2} = \frac{70}{2} = 35^\circ$
	$\widehat{AM} = 180 - 70 = 110$
	$\widehat{AMB} = \frac{180}{2} = 90^\circ$
	$\widehat{OMB} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{110}{2} = 55^\circ$



۱. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.
- الف) هر زاویه که رأس آن روی محیط دایره باشد، زاویه محاطی نامیده می شود.
- ب) زاویه مرکز نصف کمان مقابل آن است.
- ج) اگر فاصله ی خطی تا مرکز دایره ای نصف شعاع دایره باشد، خط و دایره دو نقطه مشترک دارند.
- د) در هر دایره، زاویه های محاطی رو به رو به یک کمان باهم مساوی اند.
- ه) برای تقسیم دایره به ۶ کمان مساوی، دهانه ی پرگار را به اندازه ی قطر دایره باز می کنیم.
- و) خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود، آن وتر را نصف می کند.
۲. جملات زیر را کامل کنید.
- الف) شعاع دایره در نقطه ی تماس بر خط مماس است.
- ب) برای تقسیم دایره به ۸ کمان مساوی از زاویه ی درجه ی مرکزی استفاده می کنیم.
- ج) اگر فاصله ی خطی تا مرکز دایره با شعاع دایره مساوی باشد، خط بر دایره می باشد.
- د) زاویه ی محاطی رو به رو به کمان ۱۲۴ درجه مساوی درجه است.
- ه) پاره خطی که مرکز دایره را به وتر وصل می کند، بر آن وتر عمود است.
- و) در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، خط بر دایره است.
- ز) زاویه محاطی رو به رو به قطر دایره مساوی درجه است.
۳. هر یک از سئوالات سمت راست را به پاسخ های مناسب در سمت چپ وصل کنید.

سمت چپ	سمت راست
* ۱۳۰°	* کمان مقابل به زاویه ی مرکزی ۶۵°
* ۶۵°	* کمان مقابل به زاویه ی محاطی ۶۰°
* $OH > r$	* زاویه ی لازم برای تقسیم دایره به ۱۰ کمان مساوی
* ۳۶°	* وقتی خط و دایره نقطه مشترکی ندارند
* $OH < r$	* وقتی خط و دایره دو نقطه مشترک دارند

۴. گزینه ی صحیح را علامت بزنید.

- یک ۸ ضلعی منتظم، دایره را به ۸ کمان چند درجه ای تقسیم می کند؟

- (۱) ۹۰° (۲) ۴۵° (۳) ۲۲/۵° (۴) ۶۰°

ایستگاه ریاضی ۸

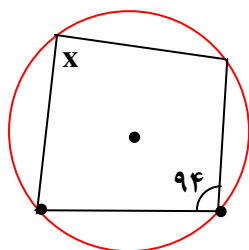
۴- اگر فاصله‌ی خطی تا مرکز دایره، مساوی قطر دایره باشد، خط دایره را در چند نقطه قطع می‌کند؟

- ۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۵- در دایره‌ای به شعاع ۲cm زاویه مرکزی ۴۵ درجه ساخته ایم. طول کمان رو به روی این زاویه تقریباً چند سانتی متر است؟

- ۱) ۲/۵cm ۲) ۱/۵cm ۳) ۳cm ۴) ۴cm

۶- در شکل مقابل X چند درجه است؟



- ۱) ۷۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۸۶ ۴) ۹۴

۷- اگر فاصله‌ی خطی تا مرکز دایره ربع شعاع دایره باشد، وضعیت خط و دایره را با رسم شکل و نوشتن رابطه مشخص کنید.

۸- شکلی رسم کنید که مطابق اطلاعات زیر باشد :

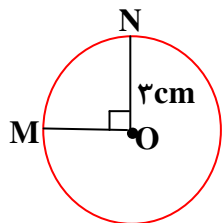
الف) O مرکز دایره و \overline{OH} فاصله‌ی خط تا مرکز دایره باشد.

ب) $\overline{OH} = r$ (شعاع دایره است)

۹- به کمک خط کش، نقاله و پرگار یک ۸ ضلعی منتظم رسم کنید.

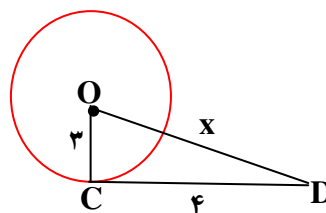
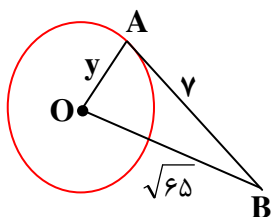
۱۰- الف) $\frac{1}{6}$ محیط دایره مساوی چند درجه است؟

ب) هر ۱۲ ضلعی منتظم دایره را به کمان‌های چند درجه تقسیم می‌کند.

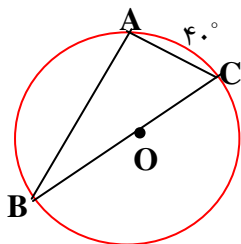


۹- در شکل مقابل طول کمان MN تقریباً چند سانتی متر است؟

۱۰- در شکل‌های زیر مقدار مجهول را به دست آورید (O مرکز دایره است)



۱۱. در شکل های زیر، اندازه ی کمان ها و زاویه های خواسته شده را بنویسید. (O مرکز دایره است).

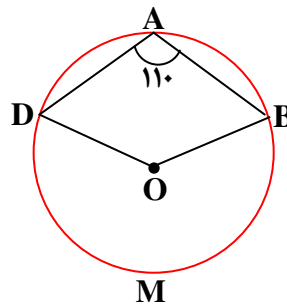


$$\widehat{AB} = \dots\dots$$

$$\hat{A} = \dots\dots$$

$$\hat{B} = \dots\dots$$

$$\hat{C} = \dots\dots$$



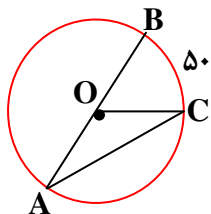
$$\widehat{DMB} = \dots\dots$$

$$\widehat{DAB} = \dots\dots$$

$$\hat{O} = \dots\dots$$

۱۲. اگر فاصله ی خطی تا مرکز دایره ۱/۵ برابر شعاع دایره باشد، وضعیت خط و دایره را با رسم شکل و نوشتن رابطه مشخص کنید.

۱۳. در شکل زیر O مرکز دایره و $\widehat{BC} = 50^\circ$ است. اندازه ی زاویه ها و کمان های خواسته شده را بنویسید.

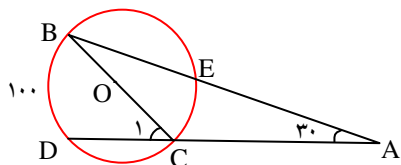


$$\hat{A} =$$

$$\widehat{AC} =$$

$$\widehat{BOC} =$$

۱۴. باتوجه به شکل، اندازه های خواسته شده را بنویسید.

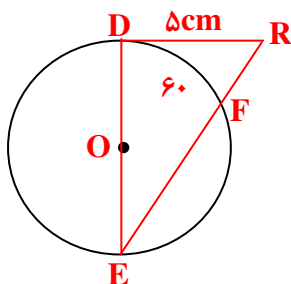


$$\hat{C}_1 = \dots\dots$$

$$\widehat{CE} = \dots\dots$$

$$\hat{B} = \dots\dots$$

$$\widehat{DC} = \dots\dots$$



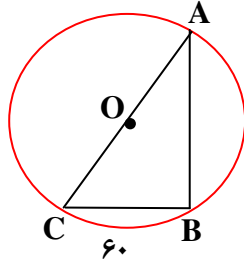
۱۵. در شکل زیر $\overline{DR} = 5\text{cm}$ مماس بر دایره $\widehat{DF} = 60^\circ$ است.

الف) اندازه ی زاویه ها و کمان های خواسته شده را بنویسید.

$\hat{D} = \dots$, $\hat{R} = \dots$, $\hat{E} = \dots$, $\widehat{FE} = \dots$

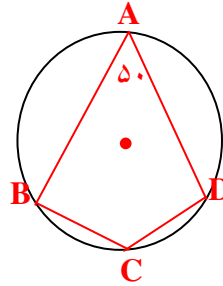
ب) شعاع دایره را به دست آورید. (راهنمایی: ضلع روبروی زاویه ۳۰ درجه مساوی نصف وتر است).
 ۱۶. با توجه به اندازه‌ی روی شکل، اندازه‌ی زوایای مثلث ABC را به دست آورید.
 (AC قطر دایره است).

$\hat{A} = \dots$
 $\hat{B} = \dots$
 $\hat{C} = \dots$



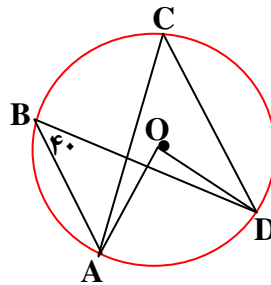
۱۷. با توجه به شکل، اندازه‌ی زاویه‌ها و کمان‌های خواسته شده را به دست آورید. ($\hat{A} = 50^\circ$)

$\widehat{BCD} = \dots$
 $\widehat{BAD} = \dots$
 $\hat{C} = \dots$

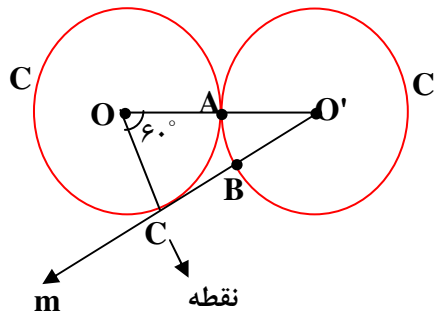


۱۸. در شکل‌های زیر، اندازه‌ی زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید.

$\widehat{AD} = \dots$
 $\hat{AOD} = \dots$
 $\hat{C} = \dots$



$\hat{O}' = \dots$
 $\widehat{AB} = \dots$
 $\widehat{AC} = \dots$



جدول سودوکو

دست ورزی



شما با حل این سودوکو، با تعاریف زاویه‌های مرکزی و محاطی در دایره آشنا شده و روش محاسبه‌ی آن‌ها را یاد می‌گیرید.

۲۰	۱۰	۹۰	۸۰			۷۰	۶۰	۳۰
۸۰			۲۰	۳۰	۱۰			
	۴۰		۹۰	۷۰		۲۰		۸۰
۱۰		۸۰		۲۰			۹۰	۶۰
۹۰	۶۰	۲۰	۴۰		۳۰		۷۰	۵۰
۷۰	۵۰		۶۰	۹۰	۸۰	۳۰		۱۰
۳۰		۱۰		۸۰	۷۰		۴۰	
	۲۰		۳۰	۴۰	۹۰			۷۰
۴۰	۸۰	۷۰	۱۰			۵۰	۳۰	۹۰

با استفاده از اعداد ۱۰ و ۲۰ و ۳۰ و ۴۰ و ۵۰ و ۶۰ و ۷۰ و ۸۰ و ۹۰، جدول سودوکو را کامل کنید؛ به نحوی که در هر یک از سطرها و هر یک از ستون‌ها و خانه‌های ۳×۳ جدول، اعداد گفته شده فقط یک بار مورد استفاده قرار گیرند. سپس، سه عدد به‌دست آمده برای هر یک از سطرها افقی خانه‌های ۳×۳ را در نظر بگیرید. عدد وسطی را خط بزنید و کنار بگذارید. شما ۲۷ گروه عدد دوتایی خواهید داشت.

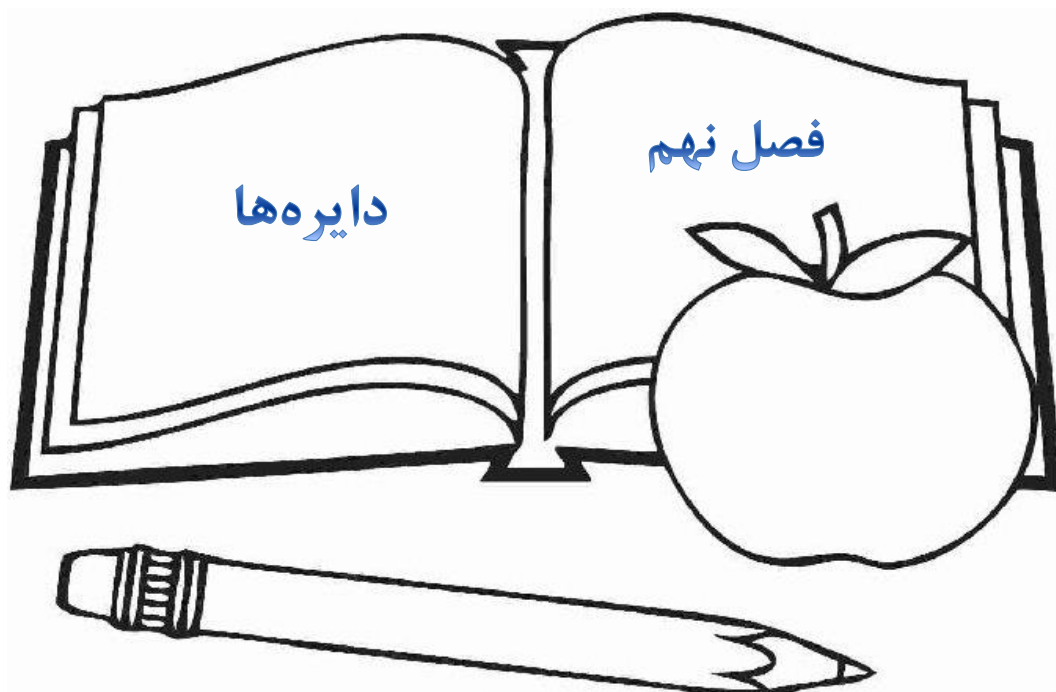
اگر عدد سمت چپ اندازه‌ی یک زاویه‌ی مرکزی در دایره باشد؛ در کدام‌یک از حالات، عدد سمت راست اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی روبه‌روی همان کمان خواهد بود؟ شکل‌های متناسب با هر حالت را هم رسم کنید.



- کامل کردن جدول دقیقه
- حل مسئله‌ی ریاضی دقیقه
- تا چه حد از نتیجه‌ی کارتان راضی هستید؟
 کم متوسط زیاد

جدول سودوکو را کامل کنید.

جدول سودوکو را کامل کنید. مدت زمانی را که برای یافتن اعداد خانه‌های خالی جدول صرف کردید در محل خود ارزیابی درج کنید.



@riazicafe



پاسخنامه سوالات امتحانی

۱) الف) نادرست (تعریف ناقص است) ب) درست ج) درست د) درست هـ) نادرست
و) درست

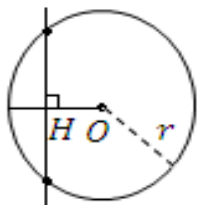
۲) الف) عمود ب) ۴۵ ج) مماس د) ۶۲ هـ) مماس و) ۹۰

سمت راست	سمت چپ
کمان مقابل به زاویه مرکزی 65°	130°
کمان مقابل به زاویه محاطی 65°	65°
زاویه لازم برای تقسیم دایره به ۱۰ کمان مساوی	$OH > r$
وقتی خط و دایره نقطه مشترکی ندارند	36°
وقتی خط و دایره نقطه مشترک دارند	$OH < r$

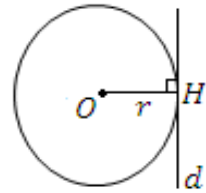
۳

۴) - گزینه‌ی ۲ - گزینه‌ی ۴

گزینه‌ی ۲ (راه‌حل: $1/5$) \Rightarrow طول کمان = $\frac{45 \times 4\pi}{360}$ طول کمان = $\frac{45}{360}$



۵) خط و دایره دو نقطه‌ی مشترک دارند. $OH < r$



(۶)

(۷) ابتدا با پرگار دایره‌ای رسم می‌کنیم. با نقاله زاویه‌های ۴۵ درجه مرکزی ($360 \div 8 = 45$) به صورت متوالی رسم می‌کنیم تا دایره به ۸ قسمت مساوی تقسیم شود. سپس نقاط ایجاد شده روی محیط دایره را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم.

(۸) الف) ۳۶۰ درجه ب) هر کمان ۳۰ درجه $360 \div 12 = 30$

$$\frac{90}{360} = \frac{\widehat{MN}}{6\pi} \Rightarrow \widehat{MN} \text{ طول کمان} = \frac{90 \times 6\pi}{360} \approx 4.71 \quad (۹)$$

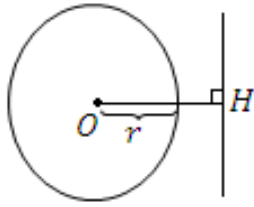
$$(\sqrt{65})^2 = 7^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 65 - 49 = 16 \Rightarrow y = \sqrt{16} = 4 \quad (۱۰)$$

$$x^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$$

$$\widehat{AB} = 140^\circ, \hat{A} = \frac{180}{2} = 90, \hat{B} = \frac{40}{2} = 20, \hat{C} = \frac{140}{2} = 70 \quad (۱۱)$$

$$\widehat{DMB} = 2 \times 110 = 220, \widehat{DAB} = 360 - 220 = 140, \hat{O} = 140$$

(۱۲) خط و دایره نقطه مشترکی ندارند. $OH > r$



$$\hat{A} = 50 \div 2 = 25^\circ \quad \widehat{AC} = 180 - 50 = 130^\circ \quad \widehat{BOC} = 50^\circ \quad (13)$$

$$\hat{C}_1 = 50^\circ \quad \hat{B} = 20^\circ \quad \hat{C}_r = 130^\circ \quad (14)$$

$$\widehat{CE} = 40^\circ \quad \widehat{DC} = 80^\circ \quad \hat{D} = \hat{C}_1 = 50^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 80^\circ$$

$$\hat{D} = 90^\circ \quad \hat{R} = 60^\circ \quad \hat{E} = 30^\circ \quad \widehat{FE} = 180 - 60 = 120^\circ \quad (15) \text{ الف}$$

$$\overline{DR} = 5 \text{ cm}, \overline{ER} = 10 \text{ cm} \Rightarrow \overline{DE}^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \quad (ب)$$

$$\Rightarrow \overline{DE} = \sqrt{75} \approx 8$$

$$\hat{A} = 30^\circ \quad \hat{B} = 90^\circ \quad \hat{C} = 60^\circ \quad (16)$$

$$\widehat{BCD} = 2 \times 50 = 100 \quad \widehat{BAD} = 360 - 100 = 260 \quad \hat{C} = 260 \div 2 = 130 \quad (17)$$

$$\widehat{AD} = 80 \quad \widehat{AOD} = 80 \quad \hat{C} = 40 \quad (18)$$

$$\hat{O}' = 180 - (90 + 60) = 30 \quad \widehat{AB} = 30 \quad \widehat{AC} = 60$$