

به نام خدا

حل فعالیت ها کار در عدد ۳ و ۴ و ۵

حسابان! فصل اول درس اول

۹۹, ۲۲

صفحه ۴

کار در کلاس

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه:

۲ مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{a_n}]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

حل سوال ۱!

۱۲, ۱۶, ۲۰, ... , ۹۶

$d=4$

حل سوال ۲!

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 96 = 12 + (n-1)4$$
$$96 = 12 + 4n - 4 \Rightarrow 4n = 88$$

$n=22$

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n] = \frac{22}{2} [12 + 96] = 11 \times 108$$

$= 1188$

مجموعه ۱۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

$$a_1 = \frac{1}{8} \quad r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_n = a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right) \Rightarrow S_{10} = \frac{1}{8} \times \left(\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \right) = \frac{1023}{8}$$

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دو برابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم:

الف) این جایزه چند گرم می شود؟
 ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد.

می دانیم ضریب طرح ۶۴ خانه دارد
 بنا بر این:

الف)

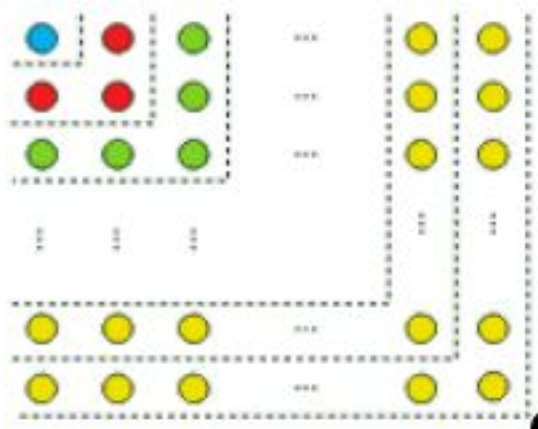
۱, ۲, ۴, ۸, ... ۲^{۶۳} → a₁ = 1
 ↓ ↓ r = 2
 خانه دم خانه آخر

$$S_n = a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right) = 1 \times \left(\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} \right) = 2^{64} - 1$$

۲^{۶۴} - 1 = ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۷۱۵ گرم

ب) $A \div 10000000 = 18,442,744,073,709,551,715$

در متن



۱ الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) =$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

۲ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟

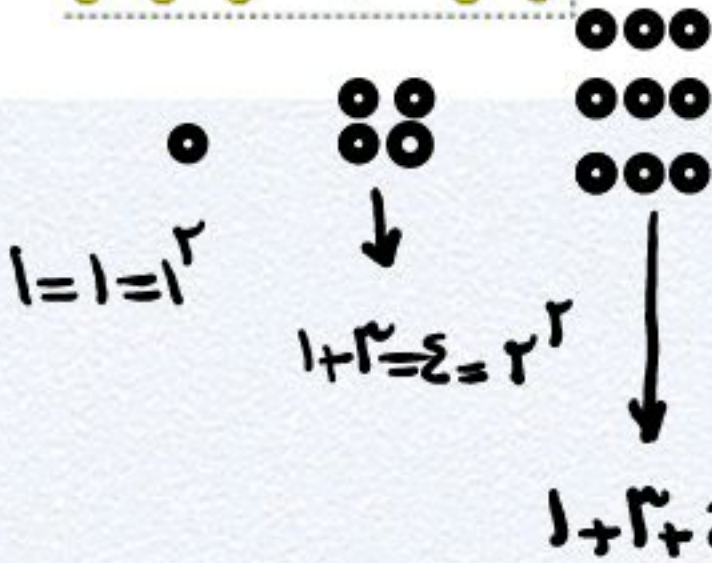
۳ در دنباله حسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم

تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

حل سوال ۱

الف)

$$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$



$$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$= \frac{n}{2} (1 + 2n-1) = n^2$$

۱۰۲, ۱۰۸, ۱۱۴, ..., ۹۹۲ $d=7$

حل سوال ۲

$$a_1 + (n-1)d = a_n \rightarrow 102 + (n-1) \times 7 = 992$$

$$7n - 7 + 102 = 992 \rightarrow 7n = 897 \rightarrow n = 128.14$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{128}{2} (102 + 992) = 64 \times 1094 = 69936$$

حل سوال ۳ $5, 8, 11, \dots$ $d=3$ $a_1=5$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} (2 \times 5 + (n-1) \times 3) = \frac{n}{2} (3n + 7) > 493 \rightarrow$$

$\frac{n(3n+7)}{2} > 493 \Rightarrow$ با جیس را از زیر کج

$n=17 \rightarrow A=987$

$n=18 \rightarrow A=1098 \Rightarrow n \geq 18$ حداقل ۱۸ جمله

۴ در جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۵ جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = 135 \quad \text{حل سوال ۴}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2a_1 + 9(2d)) = 5(2a_1 + 18d) = 135$$

نقطه: تفاوت ۲ جمله قرار سوالی

$$\boxed{2a_1 + 18d = 27}$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2a_2 + 9(2d)) = 5(2a_2 + 18d) = 150$$

$a_1 + d$ $18d$

$$\boxed{2a_1 + 18d = 30}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ 2a_1 + 18d = 30 \end{cases} \xrightarrow{\text{بعد از حل دستگاه}} a_1 = 0, d = \frac{3}{2}$$

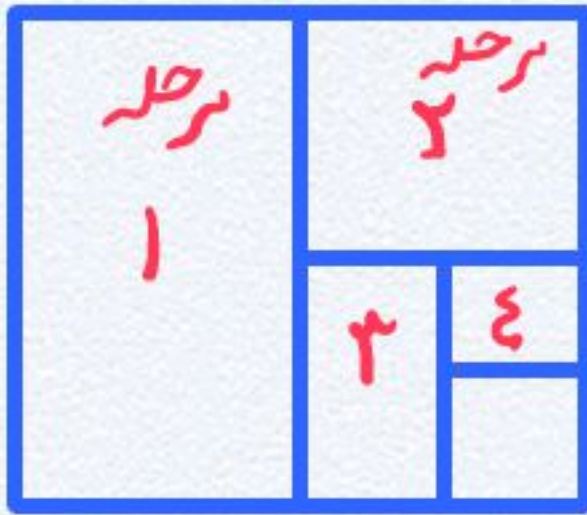
حل سوال ۵: $a_n = 2^{n-1} \rightarrow$ دنباله = ۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ...

$$S_n = 255 \quad n = ? \quad r = 2$$

$$S_n = a \frac{(r^n - 1)}{(r - 1)} \Rightarrow 255 = 1 \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow 2^n - 1 = 255$$

$$\boxed{2^n = 256 \Rightarrow n = 8}$$

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟



$$\Rightarrow S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$S_n = a \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{1}{2} \frac{(\frac{1}{2})^n - 1}{(\frac{1}{2} - 1)}$$

$$S_n = 1 - (\frac{1}{2})^n = 1 - \frac{1}{2^n} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100}$$

$2^n \geq 100 \Rightarrow n \geq 7$ یعنی دست کم ۷ مرحله باید به راه را از راه دست کم

۷ برای عدد حقیقی $a (a \neq 1)$ و عدد طبیعی n :
الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که:

$$r = a, a_1 = 1 \Rightarrow S_n = a_1 \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right) = 1 \left(\frac{a^n - 1}{a - 1} \right) = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$S_n = \frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow a^n - 1 = (a - 1) \times S_n \quad \text{ب)}$$

$$\Rightarrow a^n - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$$

~~۹۹٪~~