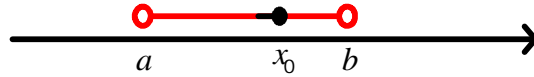


فصل ششم

حد و پیوستگی

همسایگی :

فرض کنید x_0 یک عدد حقیقی باشد. هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می گویند.



به نقطه x_0 نقطه درونی این همسایگی گویند.

بنابراین اگر $x_0 \in (a, b)$ باشد، بازه (a, b) یک همسایگی x_0 گفته و x_0 نقطه درونی این بازه است.

مثال :

بازه های $(-3, 4)$ و $(1/9, 2/1)$ و $(0, 5)$ و $(-1, 3)$ و $(1/9, 2/1)$ همگی همسایگی عدد 2 هستند.

مثال :

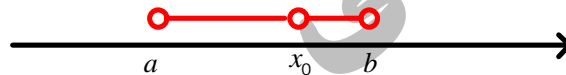
چند همسایگی برای عدد 3 - بنویسید.

مثال :

حدود m را طوری بیابید که بازه $(2m - 2, 4m + 2)$ یک همسایگی عدد 6 باشد.

همسایگی محذوف :

اگر نقطه x_0 را از بازه (a, b) حذف کنیم. به مجموعه $(a, b) - \{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 گویند.



مثال :

بازه $\{4\} - (2, 5)$ یک همسایگی محذوف عدد 4 است.

مثال :

اگر $(3, n - 2m) \cup (4n + 1, 8)$ یک همسایگی محذوف 5 باشد. مقدار m و n را بیابید.

توجه :

1- مجموعه جواب نامعادله $|x - x_0| < k$ یک همسایگی x_0 است.

2- همسایگی های محذوف x_0 را به صورت های زیر نمایش می دهند.

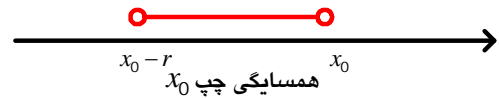
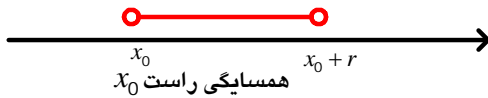
الف) $(a, x_0) \cup (x_0, b)$

ب) $(a, b) - \{x_0\}$

ج) $0 < |x - x_0| < k$

همسایگی راست و همسایگی چپ :

فرض کنید x_0 و $r > 0$ دو عدد حقیقی باشند. در این صورت بازه $(x_0, x_0 + r)$ را همسایگی راست x_0 و بازه $(x_0 - r, x_0)$ را همسایگی چپ x_0 می نامند.



مثال :

نمودار تابعی رسم کنید که در همسایگی چپ $x = 3$ تعریف شده ولی در همسایگی راست $x = 3$ نیز خود $x = 3$ تعریف نشده باشد.

مثال :

نمودار تابعی رسم کنید که در همسایگی راست $x = -1$ و هم در خود $x = -1$ تعریف شده باشد ولی همسایگی چپ تعریف نشده باشد.

مثال :

نمودار تابعی رسم کنید که فقط در همسایگی $x = 2$ و هم در خود $x = 2$ تعریف شده باشد.

مثال :

تابع $f(x) = \frac{x+3}{2x+4}$ در همسایگی چه نقاطی تعریف شده است؟ در چه نقطه ای تعریف نشده است؟

میل کردن (نزدیک شدن) :

فرض کنید که x_0 یک عدد حقیقی و x یک متغیر باشد. منظور از میل کردن یا نزدیک شدن x به x_0 که با علامت $x \rightarrow x_0$ نمایش می دهند. این است که فاصله x از x_0 از هر عدد حقیقی مثبتی کم و کم تر می شود. یا به عبارت $|x - x_0| \rightarrow 0$.

میل کردن از راست :

گوئیم x از سمت راست به x_0 میل می کند و می نویسند $x \rightarrow x_0^+$ ، هرگاه x از سمت مقادیر بیشتر از x_0 به آن میل کند.

میل کردن از چپ :

گوئیم x از سمت چپ به x_0 میل می کند و می نویسند $x \rightarrow x_0^-$ ، هرگاه x از سمت مقادیر کمتر از x_0 به آن میل کند.

مثال :

در هر مورد، دنباله اعداد داده شده به چه عددی نزدیک می شود؟

الف) ... ، 2/0001 ، 2/001 ، 2/01 ، 2/1

ب) ... ، 1/9999 ، 1/999 ، 1/99 ، 1/9

مفهوم حد :

این بحث را با یک مثال آغاز می کنیم .

تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ را در نظر بگیرید. می خواهیم ببینیم وقتی $x \rightarrow 1$ میل می کند. $f(x)$ چه رفتاری دارد یا به عبارت

به چه عددی میل می کند؟

دامنه این تابع $\{1\} - R$ است. می خواهیم رفتار تابع در همسایگی محذوف $x = 1$ ببینیم.

با دادن مقادیر مختلف به عدد $x = 1$ نزدیک و نزدیک تر می شویم و مقادیر تابع $f(x)$ را محاسبه می کنیم.

x	...	0/8	0/9	0/99	0/999	...	1	...	1/001	1/01	1/1
$f(x)$	تعریف نشده	...			

با توجه به این جدول :

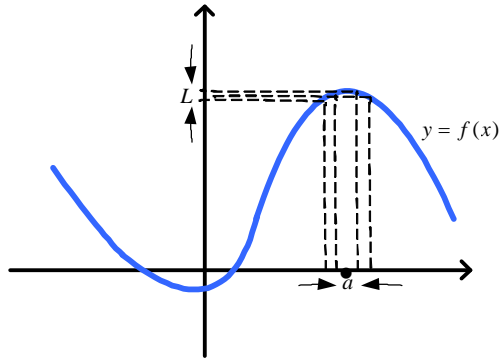
اگر x به عدد یک نزدیک شود $f(x)$ به عدد نزدیک می شود و این یعنی وقتی x به عدد یک نزدیک شود حد تابع $f(x)$

برابر با می باشد و به صورت $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ می نویسند.

تعریف حد :

فرض کنید $y = f(x)$ در همسایگی a (همسایگی راست و همسایگی چپ) یا همسایگی محذوف a تعریف شده باشد .
می گوئیم حد تابع $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می کند برابر عدد حقیقی L است ، هرگاه $x \rightarrow a$ می کند $f(x)$ به
عدد حقیقی L نزدیک و نزدیک تر شود و می نویسند :
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

به L حد تابع f در نقطه x_0 گویند .



مثال :

با تکمیل جدول های زیر ، حد هر تابع را در نقطه ی داده شده به دست آورید .

(الف) $f(x) = 2x - 5$

x	-1/1	-1/01	-1/001	→	-1	←	-0/999	-0/99	-0/9
$f(x)$				→	?	←			

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$$

(ب) $f(x) = x^2 - 1$

x	1/9	1/99	1/999	→	2	←	2/001	2/01	2/1
$f(x)$				→	?	←			

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

(ج) $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$

x	0/9	0/99	0/999	→	1	←	1/001	1/01	1/1
$f(x)$				→	?	←			

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$

مثال:

تابع ثابت $f(x) = 3$ را در نظر بگیرید . حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را با استفاده از جدول زیر محاسبه کنید . چه نتیجه ای می گیرید؟

x	0/9	0/99	0/999	\rightarrow	1	\leftarrow	1/001	1/01	1/1
$f(x)$				\rightarrow	?	\leftarrow			

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$

نتیجه :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$$

فرض کنید $f(x) = C$ ($C \in R$) تابع ثابت باشد. در این صورت

مثال :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

(الف) $\lim_{x \rightarrow 0} 5 =$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1} 10\sqrt{2} =$

(ج) $\lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{5} - 3) =$

مثال :

تابع همانی $f(x) = x$ را در نظر بگیرید . حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را با استفاده از جدول زیر محاسبه کنید . چه نتیجه ای می گیرید؟

x	1/9	1/99	1/999	\rightarrow	2	\leftarrow	2/001	2/01	2/1
$f(x)$				\rightarrow	?	\leftarrow			

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$$

نتیجه :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$$

فرض کنید $f(x) = x$ تابع همانی باشد. در این صورت

مثال :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

(الف) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} x =$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 5} x =$

(ج) $\lim_{x \rightarrow -1} x =$

قضایای حد :

فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ باشد در این صورت :

$$1) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$$

مثال :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

الف) $\lim_{x \rightarrow -3} (x + 5) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(x + \frac{2}{3} \right) =$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$$

مثال :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} (x - 6) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -3} (x - 4) =$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right) = L \times M$$

مثال :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{-1}{2}} (4x + 5) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -3} (6x - 4) =$

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

مثال :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+5}{4x-3} \right)$

5) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = L^n$

مثال :

حاصل حد های زیر را تعیین کنید .

الف) $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} x^4 =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} (2x+3)^3 =$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3} (4x^2 - 5x + 7) =$

نتیجه :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

اگر $f(x)$ یک تابع چند جمله ای باشد . داریم :

مثال :

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2x^3 - x^2 + 3x + 8) =$$

حاصل حد روبر را تعیین کنید .

قسمت های دیگر قضیه را بعد از مبحث حد چپ و حد راست ذکر می کنیم .

حد راست:

فرض کنید تابع $f(x)$ در همسایگی راست a تعریف شده باشد. گوئیم حد راست تابع $f(x)$ در نقطه a برابر با L_1 است

هرگاه با نزدیک شدن x به a از راست، مقادیر $f(x)$ به L_1 نزدیک و نزدیک تر شود و می نویسند:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

حد چپ:

فرض کنید تابع $f(x)$ در همسایگی چپ a تعریف شده باشد. گوئیم حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه a برابر با L_2 است

هرگاه با نزدیک شدن x به a از چپ، مقادیر $f(x)$ به L_2 نزدیک و نزدیک تر شود و می نویسند:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

نکته:

تابع $f(x)$ در نقطه a دارای حد است هرگاه:

- 1- تابع در همسایگی راست و همسایگی چپ a تعریف شده باشد.
- 2- حد چپ و حد راست تابع در a موجود و مساوی باشند.

توجه:

از حدچپ و حدراست در محاسبه حد توابع چند ضابطه ای، توابع شامل قدر مطلق، جزء صحیح، رادیکال ها با فرجه زوج و ... استفاده می شود.

مثال:

آیا $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ موجود است؟ چرا؟

مثال:

حد چپ و حد راست تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x > -1 \\ x^2, & x < -1 \end{cases}$ را در نقطه $x = -1$ محاسبه کنید. آیا تابع در $x = -1$ حد دارد؟

مثال:

آیا تابع $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$ در $x = 0$ دارای حد است؟ چرا؟

مثال:

حد چپ و حد راست تابع $f(x) = \begin{cases} 3x-5, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ محاسبه کنید. آیا تابع در $x=1$ حد دارد؟

مثال:

حد چپ و حد راست تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2, & x < 2 \\ 5x, & x > 2 \end{cases}$ را در نقطه $x=2$ محاسبه کنید. آیا تابع در $x=2$ حد دارد؟

مثال:

در تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2a - 3, & x < -1 \\ 5x + b, & x > -1 \end{cases}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 4$ باشد.

مثال:

به ازای چه مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2a + 6, & x < -1 \\ x^2 + a, & x > -1 \end{cases}$ در $x = -1$ دارای حد است؟

مثال:

به ازای چه مجموعه مقادیری از a تابع $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2, & x \geq -1 \\ 2x+1, & x < -1 \end{cases}$ در $x = -1$ دارای حد است؟

مثال:

به ازای چه مجموعه مقادیری از a تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+2a+3, & x \geq 2 \\ (x+1)^2+2a, & x < 2 \end{cases}$ در $x = 2$ دارای حد است؟

مثال:

اگر تابع $f(x)$ در $x = 1$ دارای حد بوده و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + f(x)}{f(x) - 3x + 1} = \frac{2}{3}$ باشد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را محاسبه کنید.

مثال:

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -5$ باشد. حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} (3f(x) - 4x + g(x))^2 =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - 3g(x)}{3x^2 + 2g(x)} \right) =$

مثال:

نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی $x=1$ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی در $x=1$ تعریف نشده باشد.

مثال:

نمودار تابعی را رسم کنید که در همسایگی $x=1$ و نیز خود $x=1$ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد و مقدار تابع با حد راست آن برابر باشد

اکنون قسمت های دیگر قضیه های حد را ذکر می کنیم.
حد توابع قدرمطلق:

$$6) \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$$

مثال:

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -3} |2x - 4| =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} |4x^2 - 3x - 6| =$

توجه:

در محاسبه حدهایی که $x \rightarrow a$ میل می کند و $x=a$ ریشه عبارت درون قدرمطلق است از راه تعیین علامت، عبارت قدرمطلق را تعیین علامت کرده و علامت قدرمطلق را حذف می کنیم.

در تابع $f(x) = \begin{cases} x + \frac{|x|}{x} & , x \neq 0 \\ 6 & , x = 0 \end{cases}$ حد چپ، حد راست تابع را در $x=0$ محاسبه کنید. آیا تابع در $x=0$ حد دارد؟

حد توابع رادیکالی :

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

توجه :

اگر n فرد باشد . مشکلی پیش نمی آید .اگر n زوج باشد :

اولاً باید تابع در همسایگی محذوف $x = a$ تعریف شده باشد . (برای تشخیص همسایگی محذوف ، کافی است دامنه تابع را به دست آوریم .)

ثانیاً $L \geq 0$ باشد .در غیر این صورت تابع در $x = a$ حد ندارد .

مثال :

حاصل حدهای زیر را در صورت وجود ، محاسبه کنید

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^3 - x^2} =$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^3 - x^2} =$

د) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+9} =$

ه) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{4x^3 - 6x^2 - 3x + 1} =$

و) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{4-x} =$

ز) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x+1}{x-3} \times \frac{\sqrt{x+5}}{2x-1}$

حد توابع مثلثاتی :

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sin(f(x)) = \sin(L) \quad (a \text{ بر حسب رادیان})$$

مثال :

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید .

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2\sin 2x - 1) =$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\frac{2\sin^2 2x - 1}{\sin x} \right) =$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos(f(x)) = \cos(L) \quad (a \text{ بر حسب رادیان})$$

مثال :

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید .

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2\sin 2x - \cos^2 x) =$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{2\sin x}{\sin x + \cos x} \right) =$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow a} \tan(f(x)) = \tan(L) \quad \left(L \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ و } k \in \mathbb{Z} \text{ و } a \text{ بر حسب رادیان} \right)$$

مثال :

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید .

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} (\tan x + \sqrt{2}\sin x) =$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\tan x - 2\cos x) =$$

10) $\lim_{x \rightarrow a} \text{Cot}(f(x)) = \text{Cot}(L)$

($L \neq k\pi$ و $k \in Z$ و a برحسب رادیان)

مثال:

حاصل حد زیر را حساب کنید .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\text{Sin}x + \text{Cos}x}{\tan^2 x + 3\text{Cot}x} =$$

محاسبه حد از روی نمودار تابع :

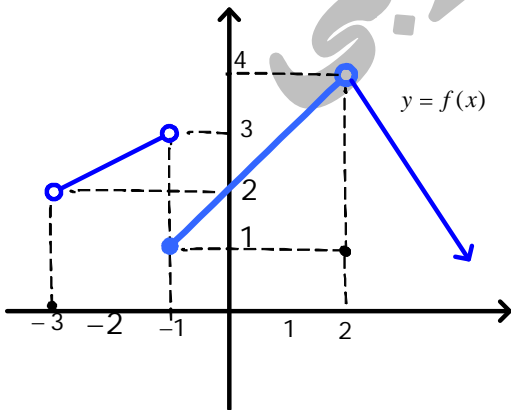
برای محاسبه حد تابع $y = f(x)$ در نقطه به طول $x = a$ از روی نمودار کافی است حد چپ و حد راست را در این نقطه جدا گانه محاسبه کنیم.

برای محاسبه حد راست در $x = a$ ، باید ببینیم عرض تابع وقتی x از سمت راست به a میل می کند ، روی محور y ها به چه عددی نزدیک می شود ؟

و همچنین برای محاسبه حد چپ در $x = a$ ، باید ببینیم عرض تابع وقتی x از سمت چپ به a میل می کند ، روی محور y ها به چه عددی نزدیک می شود ؟

مثال :

با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ پاسخ دهید .



الف) $f(-1) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) =$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) =$

د) $\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) =$

ه) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$

و) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$

ز) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) =$

ی) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(3x - 7) =$

م) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(-\frac{1}{x}\right) =$

حد توابع شامل جزء صحیح:

برای محاسبه حد توابع شامل جزء صحیح، ابتدا تکلیف جزء صحیح را تعیین نموده سپس حد گیری را انجام دهید.

مثال:

تابع $f(x) = [x]$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را در صورت وجود بیابید.

ب) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2/5} f(x)$ را در صورت وجود بیابید.

ج) از «الف» و «ب» چه نتیجه ای می گیرید؟

نتیجه:

فرض کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد. در این صورت:

الف) اگر $L \notin Z$. آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] = [L]$

ب) اگر $L \in Z$ باشد. برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$ باید حد چپ و حد راست را جداگانه حساب کنیم.

مثال:

حاصل حد زیر را در صورت وجود، حساب کنید

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)[x] =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x]}{x+1} =$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[3x^2]}{x} =$

د) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \left[\frac{1}{x+1} \right] =$

ه) $\lim_{x \rightarrow 6} \left(\left[\frac{x}{2} \right] + \left[-\frac{x}{3} \right] \right) =$

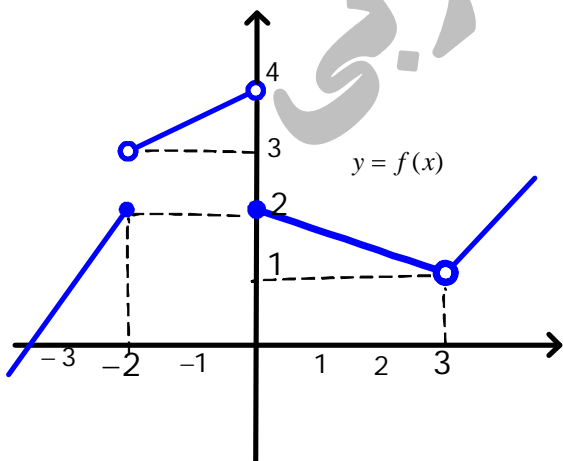
و) $\lim_{x \rightarrow 0} ([x^2] + x - 1) =$

مثال:

در تابع $f(x) = a \left[-\frac{x}{2} + 1 \right] + [2x]$ مقدار a را طوری بیابید که در $x = 2$ حد داشته باشد.

مثال:

با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ پاسخ دهید.



الف) $f(0) =$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) =$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) =$

د) $\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) =$

ه) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

و) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2 - 2) =$

ز) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f([x]) =$

ح) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} [f(x)] =$

م) $[\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)] =$

محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$) مبهم) :

در این قسمت به محاسبه حد کسرهایی می پردازیم که حد صورت و حد مخرج همزمان صفر می شود. ابتدا نکته زیر را یادآوری می کنیم
 « اگر $x = a$ یک صفر تابع چند جمله ای $f(x)$ باشد. در این صورت $f(x)$ بر $x - a$ بخش پذیر است. »
 از این ویژگی برای تجزیه چند جمله ای ها و پیدا کردن عامل صفر شونده استفاده می کنیم.
 در همه این کسرها، ابتدا بادی عبارتهای شامل جزء صحیح و نیز قدرمطلق را ساده نمود. سپس رفع ابهام کرد.

برای رفع ابهام، این کسرها را به چند دسته تقسیم می کنیم که پایه یازدهم فقط با حدهای مبهم توابع گویا آشنا می شویم
1- توابع گویا :

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ و $f(x)$ و $g(x)$ توابعی چند جمله ای هستند.
 ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه نموده و ساده می کنیم، سپس حد گیری را انجام می دهیم.
 برای تجزیه می توان صورت و مخرج را بر $x - a$ تقسیم کرد.

مثال :

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید .

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^3 + 3x + 14} =$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x^2 - x - 2} =$

د) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^4 - 4x + 4}{2x^2 + x - 3} =$

ه) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n} - 1}{x^n - 1} =$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b}{x^2-4} = 3 \quad \text{اگر } a \text{ و } b \text{ را بیابید.}$$

2- توابع رادیکالی:

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ و $f(x)$ یا $g(x)$ یا هر دو توابعی رادیکالی هستند.

ابتدا و مخرج کسر را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب کرده و ساده می کنیم. سپس حد گیری را انجام می دهیم.
(مزدوج عبارت $a-b$ ، عبارت $a+b$ است و برعکس.)

برای مزدوج عبارت ها از اتحادهای زیر استفاده می کنیم:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج:}$$

$$\begin{cases} (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \\ (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \end{cases} \quad \text{اتحاد چاق و لاغر}$$

توجه:

در بعضی از مواقع می توان از تغییر متغیر برای محاسبه حد اینگونه توابع استفاده کرد.

مثال:

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} =$

ج) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x + \sqrt{x+12}} =$

$$د) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3} =$$

$$ه) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{2x - 16} =$$

$$و) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x - 1} =$$

$$ز) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 5\sqrt{x} + 3}{x - 1} =$$

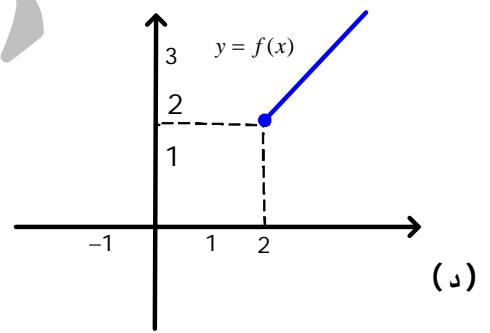
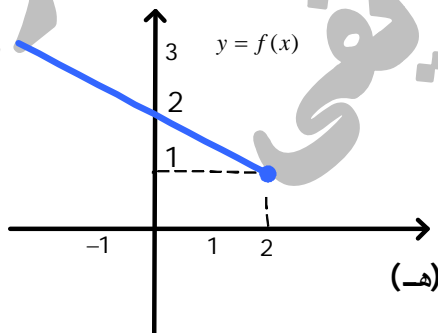
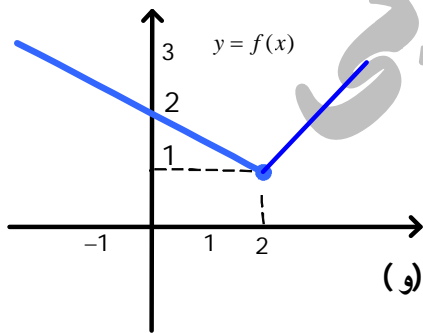
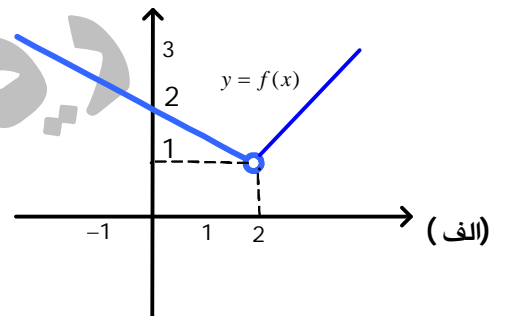
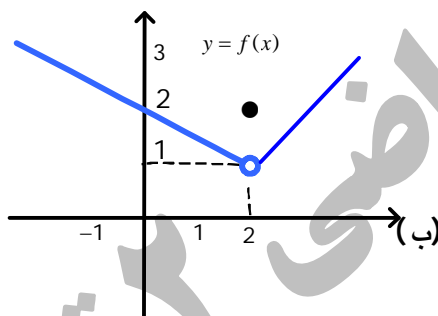
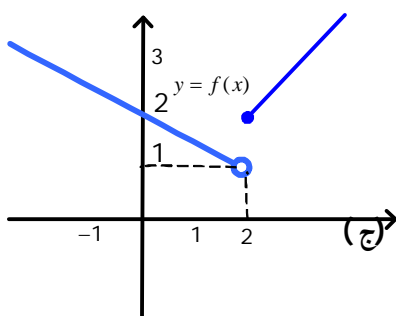
ریاضی ۲ تجربی
شریفی

پیوستگی :

- تابع f را در نقطه $x = a$ پیوسته گویند هرگاه :
- 1- مقدار $f(a)$ موجود باشد .
 - 2- تابع در $x = a$ حدا داشته باشد . (حد چپ و حد راست در $x = a$ موجود و مساوی باشند) .
 - 3- مقدار تابع و حد تابع در این نقطه برابر باشند . به عبارتی : $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

مثال :

در کدام یک از شکل های زیر تابع $y = f(x)$ در $x = 2$ پیوسته است؟



مثال :

پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 1 \\ 5x-1, & x > 1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید .

مثال:

$$\text{پیوستگی تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1 \\ -2, & x = -1 \\ -2x, & x > -1 \end{cases} \text{ را در } x = -1 \text{ بررسی کنید.}$$

مثال:

$$\text{پیوستگی تابع } f(x) = \begin{cases} [x] + 2x, & x > 2 \\ 6, & x = 2 \\ x^2 - 1, & x < 2 \end{cases} \text{ را در } x = 2 \text{ بررسی کنید.}$$

مثال:

$$\text{پیوستگی تابع } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x > -2 \\ -4, & x = -2 \\ 2x, & x < -2 \end{cases} \text{ را در } x = -2 \text{ بررسی کنید.}$$

مثال:

$$\text{پیوستگی تابع } f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \text{ را در } x = 1 \text{ بررسی کنید.}$$

نتیجه :

برای پیوسته بودن تابع f در $x = a$ باید تساوی های زیر برقرار باشند .

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

مثال:

مقدار a را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , x \neq -1 \\ x^2 - 1 & , x = -1 \\ 2a + 1 & , x = -1 \end{cases}$ در $x = -1$ پیوسته باشد.

مثال:

مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12 & , x < 2 \\ x - 2 & , x = 2 \\ ax + 3 & , x = 2 \\ a[-x] + bx & , x > 2 \end{cases}$ در $x = 2$ پیوسته باشد.

پیوستگی راست:

فرض کنید تابع f در همسایگی راست a تعریف شده باشد. تابع f را در $x = a$ از راست پیوسته گویند هرگاه: $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

پیوستگی چپ:

فرض کنید تابع f در همسایگی چپ a تعریف شده باشد. تابع f را در $x = a$ از چپ پیوسته گویند هرگاه: $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

مثال:

پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در $x = 0$ بررسی کنید.

مثال:

پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} & , x \neq 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

مثال:

پیوستگی تابع $f(x) = [x^2] - [x] + 1$ را در $x = -1$ بررسی کنید .

مثال:

پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , x < 2 \\ 3 & , x = 2 \\ \sqrt{2x + 5} & , x > 2 \end{cases}$ را در $x = 2$ بررسی کنید .

مثال:

تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{[x]\sin x}{2x - |x|} & , x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ فقط پیوستگی چپ دارد . مقدار a را به دست آورید .

توجه:

اگر تابع $y = f(x)$ در $x = a$ دارای حد باشد ولی در $x = a$ تعریف نشده باشد ، می توان با اختصاص مقداری به $f(a)$ ، تابع $y = f(x)$ را به یک تابع پیوسته تبدیل کرد که اصطلاحاً می گویند ناپیوستگی قابل رفع شدن است .
که مقدار $f(a)$ باید با $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ برابر باشد ..

مثال:

در تابع $f(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ مقدار $f(1)$ را طوری تعریف کنید که تابع در $x = 1$ پیوسته باشد .

پیوستگی در بازه باز (a, b) :

تابع $y = f(x)$ در بازه (a, b) پیوسته است هرگاه در هر نقطه درون بازه پیوسته باشد .

مثال :

تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه $(-1, 2)$ پیوسته نیست زیرا در $x = 0$ پیوسته نیست و $0 \in (-1, 2)$ است .

مثال :

تابع $f(x) = [x]$ در چه نقاطی از بازه $(-2, 3)$ پیوسته نیست ؟

پیوستگی در بازه بسته $[a, b]$:

تابع $y = f(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه :

1- در بازه (a, b) پیوسته باشد .

2- در $x = a$ از راست پیوسته و در $x = b$ از چپ پیوسته باشد .

تابع $y = f(x)$ ممکن است در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد ولی در تمام نقاط این بازه ، مخصوصا a و b پیوسته نباشد .
به همین شیوه پیوستگی در بازه های $[a, b)$ و $(a, b]$ و $[a, +\infty)$ و $(-\infty, b]$ تعریف می شود .

مثال :

آیا تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در بازه $[0, 9]$ پیوسته است ؟ چرا ؟

فضایای پیوستگی :

1- اگر توابع f و g در $x = a$ پیوسته باشند ، آن گاه $f + g$ و $f - g$ و $f \times g$ و kf و kg ($k \in R$) در $x = a$ پیوسته هستند .

تابع $\frac{f}{g}$ هم به شرطی که $g(a) \neq 0$ باشد در $x = a$ پیوسته است .

2- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد ولی g در $x = a$ پیوسته نباشد ، آن گاه $f + g$ و $f - g$ و $\frac{g}{f}$ در $x = a$ پیوسته نیستند .

توابع $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ ممکن است پیوسته باشند .

مثال:

تابع $f(x) = x - 3$ و $g(x) = [x]$ را در نظر بگیرید.
الف) پیوستگی این توابع را در $x = 3$ بررسی کنید.

ب) پیوستگی تابع $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ را در $x = 3$ بررسی کنید.

توجه:

اگر توابع f و g در $x = a$ پیوسته باشند، در این صورت تابع $h(x) = f(x) \cdot [g(x)]$ ممکن است در $x = a$ پیوسته باشد یا نباشد.

3- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته و تابع g در $f(a)$ باشد آن گاه تابع $g \circ f$ در $x = a$ پیوسته است.
همچنین اگر تابع g در $x = a$ پیوسته و تابع f در $g(a)$ باشد آن گاه تابع $f \circ g$ در $x = a$ پیوسته است.

دامنه پیوستگی:

1- توابع چند جمله ای:

هر تابع چند جمله ای با دامنه R ، روی R پیوسته اند.

2- توابع گویای $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ($f(x)$ و $g(x)$ چند جمله ای هستند)

این توابع در $R - \{x \in R | g(x) = 0\}$ پیوسته و در $\{x \in R | g(x) = 0\}$ ناپیوسته اند.

3- توابع رادیکالی:

هر گاه $f(x)$ تابعی چند جمله ای باشد تابع رادیکالی مانند $y = \sqrt[n]{f(x)}$ در هر $I \subseteq D_y$ پیوسته است.

توجه:

برای n های طبیعی زوج باید $f(x)$ در بازه I نامنفی باشد.

همچنین وقتی n طبیعی زوج است تابع $y = \sqrt[n]{f(x)}$ در تک نقطه ها پیوسته نیست.

4- توابع مثلثاتی:

توابع مثلثاتی $y = \sin(x)$ و $y = \cos(x)$ در R پیوسته هستند و تابع $y = \tan(x)$

در $\left\{x \in R \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ و تابع $y = \cot(x)$ در $\{x \in R | x \neq k\pi\}$ پیوسته اند.

5- پیوستگی توابع چند ضابطه ای مانند $y = \begin{cases} f(x) & , x \geq a \\ g(x) & , x < a \end{cases}$ یا $y = \begin{cases} f(x) & , x = a \\ g(x) & , x \neq a \end{cases}$:

برای بررسی پیوستگی اینگونه توابع در $x = a$ پیوستگی بررسی می شود

یا در نقاطی که هریک از ضابطه ها با توجه به دامنه تعریف خود در آن نقاط ناپیوسته است.

توجه:

برای بررسی پیوستگی تابعی مانند $y = \begin{cases} f(x) & , x \in Z \\ g(x) & , x \notin Z \end{cases}$ ، حد تابع وقتی $x \rightarrow a$ را از ضابطه ای که $x \notin Z$ محاسبه می کنیم ولی محاسبه مقدار تابع ، بستگی به مقدار a داده شده دارد که صحیح است یا غیر صحیح .

برای بررسی پیوستگی تابعی مانند $y = \begin{cases} f(x) & , x \in Q \\ g(x) & , x \notin Q \end{cases}$ ، حد تابع وقتی $x \rightarrow a$ را از هر دو ضابطه ای محاسبه می کنیم این تابع در نقاطی $f(x) = g(x)$ باشد پیوسته است .

مثال: تابع $y = \begin{cases} 2x+4 & , x \in Q \\ x^2-x & , x \notin Q \end{cases}$ در چه نقاطی پیوسته است؟

مثال:

دامنه پیوستگی توابع زیر را بیابید .

الف) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

ب) $g(x) = \sqrt{(x^3 - x^2)(3 - x)}$

ج) $y = \frac{3}{2x-2} + \frac{1}{x}$

د) $y = \frac{4x-1}{2x^2+3x-5}$

هـ) $y = \log^{(2-x)}$

ز) $y = \sin(2x^3 + 1)$

مثال:

تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + 2x + 1 & , x \geq 0 \\ x^2 + 1 & , x < 0 \end{cases}$ در چه نقاطی از بازه $(-4, 10)$ ناپیوسته است؟

مثال :

حدود m را طوری بیابید که تابع $y = \frac{4x}{x^2 + 3x + \frac{1}{2}m - 1}$ در R پیوسته باشد.

مثال :

تابع $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+4}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{x+5}$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟

مثال :

به ازای چه مقادیری از a تابع $y = 2x + \sqrt{ax^2 - 4x - 3}$ روی R پیوسته است؟

مثال :

تابع $y = [x^2]$ در چه نقاطی از بازه $(-1, 3)$ ناپیوسته است؟

تمرین :

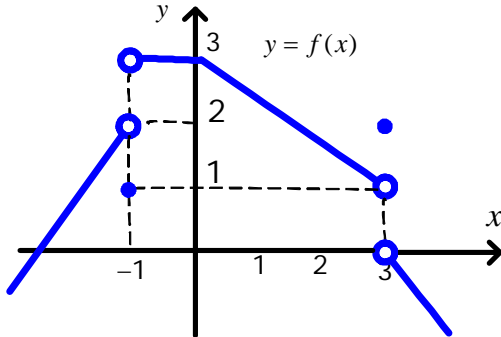
1- اگر بازه $(x-2, 3x-1)$ یک همسایگی محذوف عدد 1 باشد. حدود x را بیابید.

2- تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید.

(الف) دامنه تابع را به دست آورید.

(ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

(ج) آیا تابع در همسایگی $0/9$ تعریف شده است؟ در همسایگی -1 چطور؟ در همسایگی 1 چطور؟



ن) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f([x])$

ش) $\lim_{x \rightarrow 3^+} [f(x)]$

3- با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ پاسخ دهید .

الف) $f(-1) =$

ب) $f(3) =$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

د) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$

هـ) $\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x)$

و) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ز) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ح) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - 1)$

ط) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(f(f(x)))$

م) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x))$

ق) $[\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)]$

ن) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

5- فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$ باشد . حاصل حدهای زیر را به دست آورید .

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{4g(x) - f(x) + x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3f(x) - g(x)}{g(x) - 3} \right)$

6- اگر $f(2x - 3) = \frac{4x - 1}{2x + 5}$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ را حساب کنید .

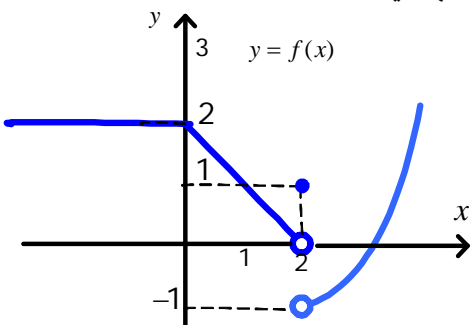
7- اگر $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ باشد . مقدار $f(2)$ و حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را حساب کنید .

8- اگر $xf(x) + f(-x) = 2x - x^3$ باشد . حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ را به دست آورید .

9- اگر تابع f در $x = 2$ حد داشته و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 1}{f(x) - 2} = 5$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 6}{\sqrt{f(x) + 1}}$ را حساب کنید .

10- اگر $f(5 - 3x) = \begin{cases} x^2 + 3 & , x > 1 \\ 1 - x & , x < 1 \end{cases}$ باشد . حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} f(2 - x^2)$ را حساب کنید .

11- نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است . به سئوالات زیر پاسخ دهید .



الف) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(f(x))$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x))$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x^2 - 2x + 3)$

د) $\lim_{x \rightarrow 0} f(2 - x^2)$

12- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Z} \\ 2, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در فاصله $[-4, 4]$ رسم کرده و سپس حاصل حدهای زیر را به دست آورید .

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} f(x)$

13- به ازای چه مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 3, & x > 1 \\ x^3 - 3x + 2a, & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ دارای حد است ؟

14- حاصل حدهای زیر را در صورت وجود دست آورید .

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x} - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}}$ ج) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^3 - 3x + 2}$

د) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) \left[\frac{1}{x+1} \right]$

ه) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x + 1}{2x^2 - 3x + 1}$

و) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{3x^2 - x - 10}$

ز) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2 + 3(x-2)}{x^2 - 4}$

ط) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2}{x+1} \right]$

ی) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x}$

ک) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{x^2+x} - \frac{3x-4}{x^2-2x} \right)$

ل) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{\sqrt[3]{x} - 1}$

م) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

ن) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3-\sqrt{x}} - 1}$

س) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$

15- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + ax - b} = 2$ باشد . مقدار a و b را بیابید.

16- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & [x] > 2 \\ x, & [x] \leq 2 \end{cases}$ در R دارای حد باشد . مقدار a را بیابید .

17- پیوستگی تابع $f(x) = (-1)^{[x]} \sin x \pi$ را در نقاط صحیح بررسی کنید .

18- تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3}, & x < 3 \\ a \log_2^{(x+1)}, & x \geq 3 \end{cases}$ در $x = 3$ پیوسته است . مقدار $f(2)$ را بیابید .