

شمارش، بدون شمردن

وَإِنْ تَعُدُّوا نِعْمَةَ اللَّهِ لَا تُحْصُوهَا «سورة ابراهيم آیه ۳۴»
و اگر بخواهید نمی توانید نعمت های خدا را بشمارید.



داشتن حداقل چند رنگ کافی است تا هر نقشه ای را بتوان به گونه ای رنگ آمیزی کرد که هیچ دو ناحیه هم مرزی هم رنگ نباشند؟

نهیبه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

درس اول شمارش

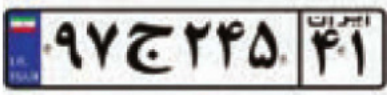
درس دوم جایگشت

درس سوم ترکیب

درس اول: شمارش

تهیه کننده:

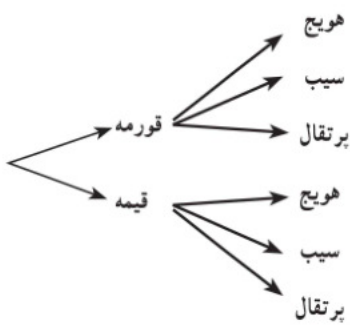
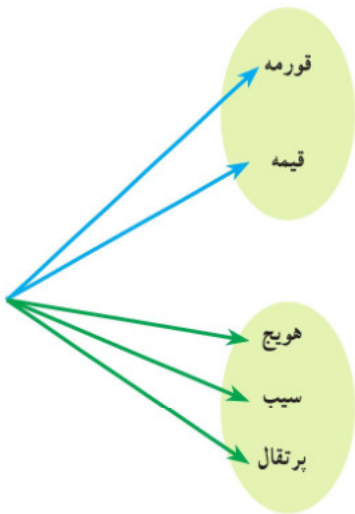
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



شاید شمارش در نظر برخی افراد، یک مهارت با اهمیت ریاضی نباشد و تنها یک عمل ساده باشد؛ اما آیا واقعاً شمردن همیشه آسان است؟
می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره گذاری کرد؟

اصل جمع و اصل ضرب

فعالیت



۱ امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آب‌میوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب‌میوه هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

طبق نمودار روبه‌رو ۵ انتخاب وجود دارد

۲ هفته بعد پوریا قصد دارد به خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آب‌میوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب‌میوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

با توجه به نمودار روبه‌رو ۶ انتخاب خواهد داشت

۳ چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

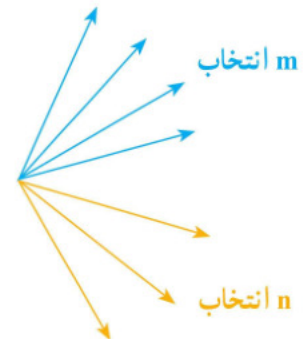
در سؤال اول امین فقط به یکی از دو روش کار را انجام می‌دهد، یا آنکه به رستوران رفته و یکی از دو غذا را انتخاب می‌کند و یا آنکه به آب‌میوه‌فروشی رفته و یکی از سه نوع آب‌میوه را انتخاب خواهد کرد. ولی در سؤال دوم پوریا هر دو مکان را خواهد رفت که در اول ۲ انتخاب و در دوم ۴ انتخاب دارد.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۴ در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آب‌میوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

در سؤال اول $2+3=5$ حالت وجود داشت چون فقط یک نفر از دو مکان را انتخاب می‌کرد، ولی در سؤال دوم $2 \times 3 = 6$ حالت، چون هر دو مکان را خواهد رفت که در مقابل هر انتخاب در مکان اول، ۳ انتخاب در مکان دوم دارد.



اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m+n$ روش وجود دارد.

«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار مورد نظر فقط با یکی از شیوه‌ها انجام شود. مثلاً در قسمت اول فعالیت قبل، امین فقط یکی از کارهای «دعوت به رستوران یا دعوت به آب‌میوه‌فروشی» را انجام می‌دهد.»

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش k ام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ روش وجود دارد.

تهیه کننده:

گروه ریاضی منطع دوم متوسطه، استان خوزستان

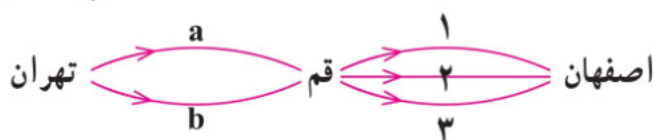
اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

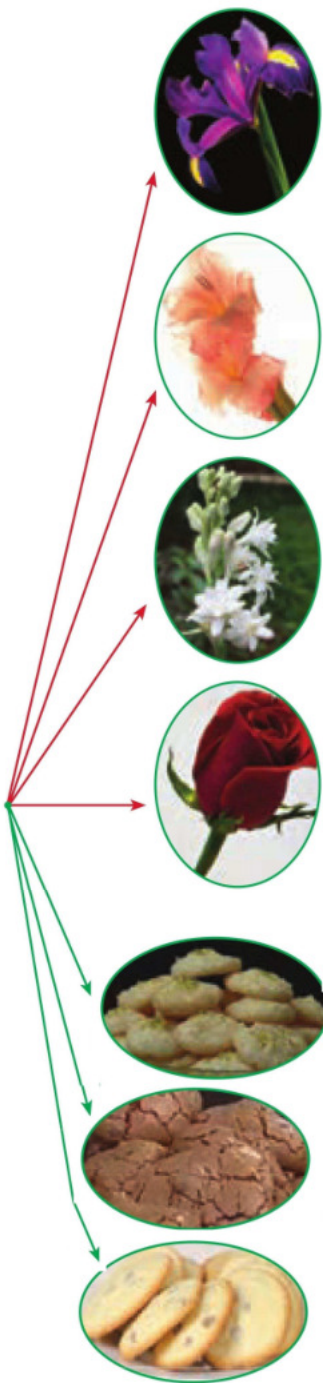
«توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم دعوت به رستوران که مرحله اول است انجام می‌گیرد و هم دعوت به آب‌میوه‌فروشی که مرحله دوم است، صورت می‌پذیرد.»

مثال

فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر 1 و 2 و 3 وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟
 حل: طبق اصل ضرب تعداد حالاتها $2 \times 3 = 6$ است که عبارت‌اند از:

- $a, 1$ $a, 2$ $a, 3$
- $b, 1$ $b, 2$ $b, 3$





تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد؛ به طوری که برای انجام مرحله اول m_1 روش، برای انجام مرحله دوم m_2 روش، ... و برای انجام مرحله k ام m_k روش وجود داشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار مورد نظر با $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش قابل انجام است.

کار در کلاس

۱. پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: مریم، گلاب، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌اند از: گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟ $4+3=7$ بنابراین ۷ انتخاب دارد.

۲. هفته بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانه جدید یکی از دوستانش برود. او این بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید. $4 \times 3 = 12$ بنابراین ۱۲ انتخاب دارد.

{(مریم و گردویی) و (مریم و نارگیلی) و (مریم و کشمشی) و (گلاب و گردویی) و (گلاب و نارگیلی) و (گلاب و کشمشی) و

(زنبق و گردویی) و (زنبق و نارگیلی) و (زنبق و کشمشی) و (رُز و گردویی) و (رُز و نارگیلی) و (رُز و کشمشی)}

۳. در هر یک از قسمت‌های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

در سوال (۱) پژمان می‌تواند یکی از دو روش را انتخاب کند که یکی ۴ و دیگری ۳ حالت دارد، لذا طبق اصل جمع $4+3=7$ انتخاب دارد و در سوال (۲) پژمان می‌خواهد هر دو کار را انجام دهد، هم انتخاب گل و هم انتخاب شیرینی که طبق اصل ضرب $4 \times 3 = 12$ انتخاب دارد. دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

اصل جمع: کتابخانه مدرسه ۴۰ کتاب در زمینه ریاضه و ۵۰ کتاب در زمینه ادبیات دارد. اگر یک دانش‌آموز بخواهد یکی از کتاب‌ها را کتابخانه را در زمینه ریاضه یا ادبیات

انتخاب کند به چند راه می‌تواند این کار را انجام دهد؟ $40+50=90$ بنابراین ۹۰ راه وجود دارد.

اصل ضرب: از بیم ۴ نوع غذای مختلف و ۵ نوع سالاد در یک رستوران به چند طریق می‌توان غذای سه همراه سالاد سفارش داد؟ $4 \times 5 = 20$ بنابراین ۲۰ نوع سفارش مختلف داریم در برخی مسائل لازم است از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود.

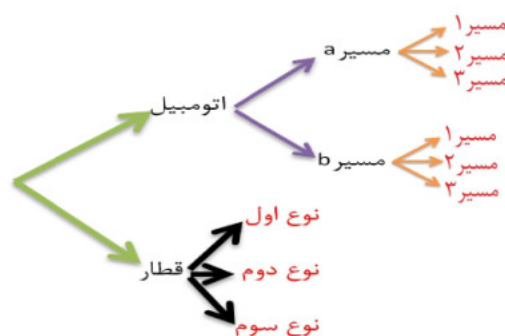
مثال

فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد با اتوبوس خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتوبوس خود به این سفر برود، مسیرها و انتخاب‌های او مانند مثال قبل است و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود، سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند

انتخاب دارد؟

حل: اگر با اتوبوس برود، طبق اصل ضرب

به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق. لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد. با رسم یک شکل این پاسخ را توجیه کنید.



مثال: رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

حل:

حالت اول: اگر گزینه سمت چپ حرف فارسی باشد: $32 \times 26 \times 32 = 26624$

حالت دوم: اگر گزینه سمت چپ حرف انگلیسی باشد: $26 \times 32 \times 26 = 21632$

تعداد حالات ممکن: $26624 + 21632 = 48256$

کار در کلاس

الف) با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ به طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می توان نوشتن عدد سه رقمی را به صورت پرکردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور در نظر گرفت.



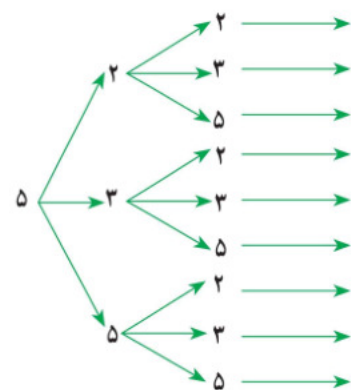
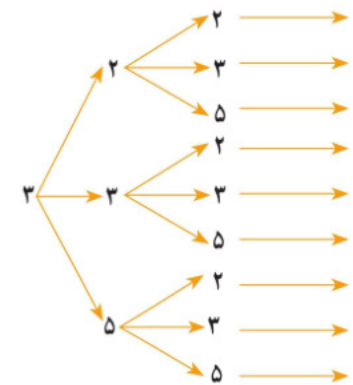
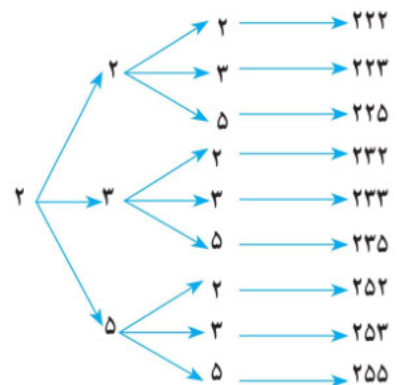
پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحله آن باید انجام شود، برای به دست آوردن جواب، تعداد راه های پرکردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب در هم ضرب شود.

هر جایگاه را به سه حالت می توان پر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

۲۶۳۵ ۲۶۳۵ ۲۶۳۵

تعداد حالت ها $3 \times 3 \times 3 = 27$

با نمودار درختی در سال های پیش آشنا شده اید. از این نمودار نیز می توان برای به دست آوردن تعداد اعداد مورد نظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده شده در حاشیه صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.



ب) با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱- برای پرکردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟



تعداد حالت ها \rightarrow ۳ حالت

۲- حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته ایم. برای پرکردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟



تعداد حالت ها \rightarrow ۲ حالت

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

درس اول: شمارش



۳- برای پرکردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟
 لذا $6 \dots = \dots 1 \dots \times \dots 2 \dots \times \dots 3 \dots$ عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیرتکراری وجود دارد.

ب) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود، به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟ در این جایگاه فقط عدد ۲ می تواند قرار بگیرد، لذا ۱ حالت وجود دارد.
 ۲- دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می توانند، پر شوند؟ در جایگاه ها ردیف هر کدام از سه عدد می توانند قرار گیرند، پس هر کدام لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با $9 \dots = \dots 1 \dots \times \dots 3 \dots \times \dots 3 \dots$.
 در هر سه حالت است.

ت) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟
 ۲- پس از پرکردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می تواند پر شود؟ در جایگاه سمت چپ فقط یک عدد از ۳ یا ۵ می توانند باشند پس ۲ حالت داریم.
 ۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می تواند پر شود؟ با قرار گرفتن یک عدد از ۳ یا ۵ در جایگاه سمت چپ، فقط یک عدد بر جایگاه وسط باقی می ماند، لذا در این جایگاه فقط ۱ حالت داریم.
 ۴- لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با $2 \dots = \dots 1 \dots \times \dots 1 \dots$.

مثال

- با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰
 الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟
 ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟
 پ) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟
 ت) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

حل:

الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی تواند باشد؛ بنابراین تعداد حالت ها مطابق شکل مقابل است.
 لذا ۴۸ عدد سه رقمی با ارقام مذکور می توان نوشت.



$$3 \times 4 \times 4 = 48$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی‌تواند بیاید و ارقام نباید تکراری باشند؛ لذا تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل است؛ بنابراین ۱۸ عدد می‌توان نوشت.

$$3 \times 3 \times 2 = 18$$

پ) با توجه به اینکه رقم سمت راست باید ۳ یا ۷ باشد و رقم صفر هم نمی‌تواند رقم سمت چپ باشد؛ لذا تعداد حالت‌ها به صورت مقابل است.

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

ت) چون عدد مورد نظر باید زوج باشد؛ لذا رقم سمت راست باید ۰ یا ۲ باشد و چون در حالتی که رقم ۲ سمت راست باشد، رقم ۰ سمت چپ هم نمی‌تواند باشد، لذا باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.

حالت اول: اگر رقم سمت راست ۲ باشد؛ یعنی رقم سمت راست یک حالت می‌تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها به صورت مقابل است.

$$2 \times 2 \times 1 = 4$$

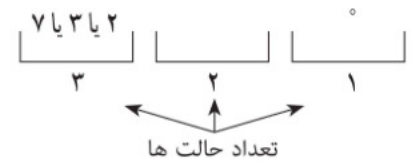
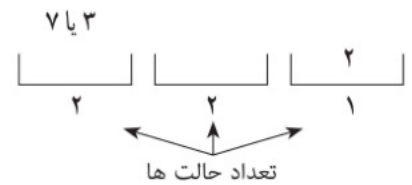
حالت دوم: اگر رقم سمت راست ۰ باشد، حالت‌های جایگاه‌ها به صورت مقابل است.

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

لذا در کل ۱۰ عدد می‌توان نوشت.

راه حل دوم: با توجه به صورت سؤال‌های (ب)، (پ) و (ت) می‌توان به صورت زیر جواب را حساب کرد:

$$10 - 8 = 2 = \text{جواب قسمت (ب)} - \text{جواب قسمت (ت)}$$



تمرین

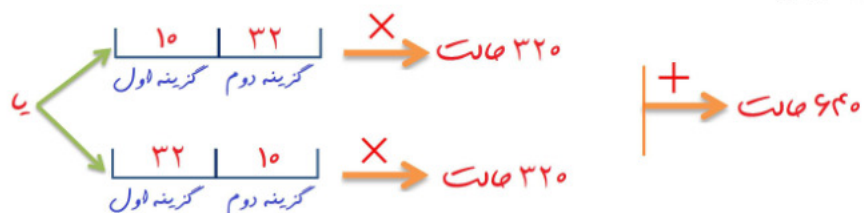
۱) تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به دست آورید.
 مشخص کنید برای این کار از اصل جمع استفاده می‌شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.
 الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.
رمز یک رقمی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۰۰۰ و یا یک رقمی از ۲۲ حرف الفبای فارسی خواهد بود
 بنابراین $10 + 22 = 32 = 32$ حالت داریم.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه اول یک عدد و گزینه دوم یک حرف الفبای فارسی است.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 10 & 22 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{X} 320$$

گزینه اول گزینه دوم

پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینه دیگر یک حرف الفبای فارسی است.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی اند.

یا $10 \times 10 = 100$: هر دو عدد باشند \rightarrow 776 \rightarrow +

یا $26 \times 26 = 676$: هر دو حرف باشند

ث) این رمز از 4 گزینه تشکیل شده است که دو گزینه اول اعداد غیر تکراری و دو گزینه دوم

حروف انگلیسی غیر تکراری اند. 58500 حالت \rightarrow \times $\frac{10}{10} \frac{9}{9} \frac{26}{26} \frac{25}{25}$ \rightarrow حروف اعداد

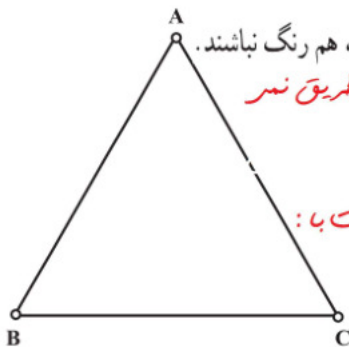
2) در یک شهرک صنعتی 5 بلوار اصلی و در هر بلوار، بین 8 تا 10 خیابان، و در هر خیابان بین 10 تا 12 کوچه و در هر کوچه بین 20 تا 30 کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد

کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تا است؟

$5 \times 10 \times 12 \times 30 = 18000$: حداکثر $\quad 5 \times 8 \times 10 \times 20 = 8000$: حداقل

3) می خواهیم رأس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟ برابر آنکه **رأس A رنگ متفاوت با رئوس B و C داشته باشد** 2 حالت داریم (A به رنگ آبی و دو رأس دیگر قرمز باشند و برعکس) به همین ترتیب برابر متفاوت بودن رئوس B و C نیز هر کدام دو حالت داریم. پس طبق اصل جمع $2 + 2 + 2 = 6$ طریق این کار امکان پذیر است.



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که رأس هایی که به هم وصل اند، هم رنگ نباشند. با توجه به اینکه هر رأس دو رأس دیگر وصل است، این ضوابط غیر ممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نسر تولید این کار را انجام داد.

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می کنیم، بررسی کنید.

حالت الف: با توجه به این که مجبور به استفاده از هر سه رنگ هستیم تعداد انتضاب ها برابر است با:

$3 \times 2 \times 1 = 6$

حالت ب: جواب همان جواب قسمت (الف) یعنی 6 می باشد زیرا با وجود سه رأس و 3

رنگ متمایز، خود به خود رئوس هم رنگ نخواهند بود.

4) با پلاک هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعه A انتخاب

شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C

انتخاب شود، چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد؟

پلاک: $\frac{22}{12} \text{ب} 325$

$9 \times 9 \quad 13 \quad 9 \times 9 \times 9 \quad 9$

$\times \rightarrow 13 \times 9^6 = 6908733$

$A = \{11, 22, \dots, 99\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$C = \{ي, ه, و, ن, م, ل, ق, ط, ص, د, ج, ب\}$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

5) در یک کشور نوعی اتومبیل در 5 مدل، 10 رنگ، 3 حجم موتور مختلف و 2 نوع دنده

(اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

$5 \times 10 \times 3 \times 2 = 300$

دنده حجم موتور رنگ مدل

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکلی باشد، چند نوع از این

اتومبیل با رنگ مشکلی تولید می شود؟

$5 \times 1 \times 3 \times 2 = 30$

دنده حجم موتور رنگ مدل

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکلی دنده اتوماتیک تولید می شود؟

$5 \times 1 \times 3 \times 1 = 15$

دنده حجم موتور رنگ مدل



۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:
الف) اگر مجبور باشد به همه سؤال‌ها جواب دهد؟

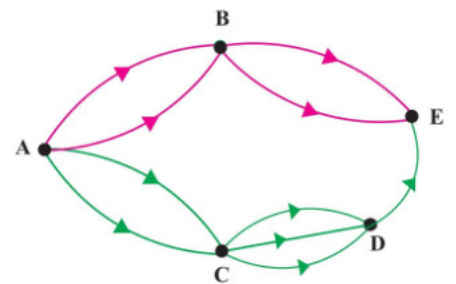
$$\underbrace{4 \times 4 \times \dots \times 4}_{\text{سؤالات دو گزینه‌ای ۱۰ بار}} \times \underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_{\text{سؤالات چهارگزینه‌ای ۵ بار}} = 2^{25}$$

ب) بتواند سؤال‌ها را بدون جواب هم بگذارد؟

$$\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{\text{سؤالات دو گزینه‌ای ۱۰ بار}} \times \underbrace{3 \times 3 \times \dots \times 3}_{\text{سؤالات چهارگزینه‌ای ۵ بار}} = 5^{10} \times 3^5$$

۷ اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟

$$\left. \begin{array}{l} \text{مسیر } ABE: 2 \times 2 = 4 \\ \text{مسیر } ACDE: 2 \times 3 \times 1 = 6 \end{array} \right\} + \rightarrow 10$$



۸ مسئله زیر را به گونه‌ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

مسئله: چند عدد دورقمی زوج می‌توان نوشت؛ به طوری که.....؟

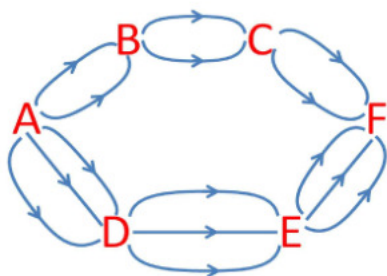
برابر نقطه چین دو پیشینه‌دار دارم:

(۱) رقم دهگان هیچ نیز زوج باشد (۲) رقم دهگان هیچ عدد اول باشد

حل: تعداد راه‌های نوشتن یکان برابر ۵ تا است و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تا است. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۹ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هر دوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

$$2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 = 35$$



مسئله برابر سوال ۹: اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده‌ها در بین

شهرها A, B, C, D, E, F باشد و همه جاده‌ها یک طرفه فرزند شوند،

به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر F رفت؟

نهیته کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a



درس دوم: جایگشت

جایگشت

سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به درگاه مخصوص به خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟ بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟

فعالیت

۱ فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را در مربع‌های زیر بنویسید.

۲ آیا در سه مربع به هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟ **خیر**

۳ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به دست آورد؟

$$6 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 2 \times 1 = 12$$

درگاه سوم درگاه دوم درگاه اول

فعالیت

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟ می‌خواهیم مسئله قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به صورت مقابل وجود دارد که پر کردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پر کردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.

«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آنها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.»

۱ اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پر شود؟ ۴

– پس از پر شدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟ ۳

– حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ ۳ سومین و چهارمین مربع را چگونه؟

سومین مربع به ۲ روش و چهارمین مربع به ۱ روش

– حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

تهیه کننده:

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت است از حاصل ضرب

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots$$

۲ به نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ (به ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتا است؟ $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

۳ تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتا است؟ (بدون تکرار حروف)

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$$

۴ با استفاده از ارقام ۱ تا ۹ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$$

۵ تعداد جایگشت‌های 10 شیء متمایز چندتا است؟

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$$

۶ اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل ضرب نشان دهید.

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور مثال $1! = 1$ ، $2! = 1 \times 2$ ، $3! = 1 \times 2 \times 3$ و الی آخر قرار داد: $0! = 1$.

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$.

کار در کلاس

۱ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5!$

ب) $8! = 8 \times 7!$

پ) $10! = 10 \times 9!$

ت) $n! = n \times (n-1)!$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times \underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 1}_{4!}}{4!} = 5$

ب) $\frac{10!}{9!} = \frac{10 \times 9!}{9!} = 10$

پ) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

ت) $\frac{8!}{6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 56$

ث) $\frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 90$

ج) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$

ج) $\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$

ح) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$

خ) $\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$

د) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$

ز) $\frac{n!}{(n-5)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

ر) $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)$

@Faragiri10
ghadam.com

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳ حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $9 \times 8 = \frac{9!}{7!}$ ب) $9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9!}{5!}$

پ) $11 \times 10 \times 9 = \frac{11!}{8!}$ ت) $8 = \frac{8!}{7!}$

ث) $n(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!}$ ج) $n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n!}{(n-4)!}$

فعالیت

۱ تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a, b, d, e, f, s, t می‌توان

نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با $7!$

۲ حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز را که با

همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به دست آوریم.

- برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمه سه حرفی چند انتخاب داریم؟ 7
- برای انتخاب دومین و سومین حرف چگونه؟
- بنابراین تعداد کلمات سه حرفی مورد نظر برابر است با $7 \times 6 \times 5$
- برابر دومین حرف 6 انتخاب و برابر سومین 5 انتخاب داریم.

در واقع آنچه به دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های سه تایی از هفت شیء متمایز است.

۳ تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به دست آورید. $9 \times 8 \times 7 \times 6$

۴ اعداد به دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

مرصه دوم: $7 \times 6 \times 5 = \frac{7!}{4!}$ مرصه سوم: $9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9!}{5!}$

۵ تعداد جایگشت‌های سه تایی از n شیء متمایز را به دست آورید و آنرا با استفاده از

فاکتوریل بنویسید. $\frac{n!}{(n-3)!}$

۶ تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز ($0 \leq r \leq n$) را به دست آورید و آنرا با

استفاده از فاکتوریل بنویسید. $\frac{n!}{(n-r)!}$

نهیة کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با $p(n,r)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال

با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف :

- الف) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می شود؟
- ب) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟
- پ) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می شوند؟
- ت) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» چهار حرف اول باشند؟
- ث) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟
- ج) چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حل :

الف) برای نوشتن تمام کلمات ۸ حرفی بدون حروف تکراری با این ۸ حرف کافی است تعداد جایگشت های ۸ شیء متمایز را به دست آوریم؛ لذا جواب برابر ۸! است. در حالتی که حرف آخر «ی» باشد، کافی است تعداد جایگشت ها روی هفت حرف دیگر را به دست آوریم؛ لذا در این حالت جواب برابر ۷! است.

ب) حروف «د» و «ی» به دو حالت «دی» و «ید» می توانند کنار هم بیایند. برای پیدا کردن تعداد کلماتی که در آنها این دو حرف به صورت «دی» در کنار هم آمده اند، کافی است این دو حرف را یک حرف در نظر بگیریم؛ لذا کافی است تعداد جایگشت های هفت شیء متمایز را به دست آوریم که برابر است با ۷!. چون همین تعداد هم برای حالت «ید» وجود دارد پس جواب کلی برابر است با $2 \times 7!$.

پ) تعداد کلمات شش حرفی برابر است با تعداد جایگشت های شش تایی از هشت شیء متمایز یعنی $P(8, 6) = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!}$ در حالتی که کلمه بخواد به «گردی» ختم شود، با توجه به اینکه چهار حرف آخر مشخص اند؛ لذا فقط باید تعداد حالت های نوشتن دو حرف اول توسط حروف کلمه «جهان» را به دست آورد که برابر است با تعداد جایگشت های دوتایی از چهار

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = 12 \text{ یعنی:}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ت) چهار حرف اول، حروف کلمه «جهان» هستند که به $4!$ حالت می‌توانند بیانند. حال حرف آخر را باید با 4 حرف باقی‌مانده (گ ر د ی) نوشت که این کار را هم به $4!$ روش می‌توان انجام شود. بنابراین طبق اصل ضرب، نوشتن کلمه مورد نظر به $4! \times 4!$ روش می‌تواند انجام شود.

ث) تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمه «جهان» در کنار هم برابر است با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی $4!$. حال هر کدام از این جایگشت‌ها را که در نظر بگیریم، برای نوشتن کلمه 8 حرفی کافی است این چهار حرف کنار هم قرار گرفته (چهار حرف کلمه «جهان») را یک حرف حساب کنیم؛ بنابراین کافی است تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز را حساب کنیم که برابر است با $5!$. پس طبق اصل ضرب جواب برابر است با: $4! \times 5!$.
ج) حروف اول باید یکی از سه حرف «ج»، «ن» و «ی» باشد. پس 3 انتخاب برای حرف اول داریم. حال با انتخاب هر کدام از این 3 حرف برای چپش 7 حرف دیگر $7!$ وجود دارد بنابراین جواب برابر است با: $3 \times 7!$.

کار در کلاس

۱) یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

$$P(6, 4) = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 360$$

۲) با عددهای 5 و 3 و 2 و 1 چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

$$P(4, 3) = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$$

تمرین

۱) در یک لیگ فوتبال 18 تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

$$P(18, 3) = \frac{18!}{15!} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15!} = 4896$$

۲) از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار 210 تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تا است؟

$$P(n, 3) = \frac{n!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2) = 7 \times 6 \times 5 \Rightarrow n = 7$$

۳) کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$6! = 3! + 3!$ نادرست

$6! = 6 \times 5!$ درست

$8! = 4! \times 2!$ نادرست

$2 \times 3! = 6!$ نادرست

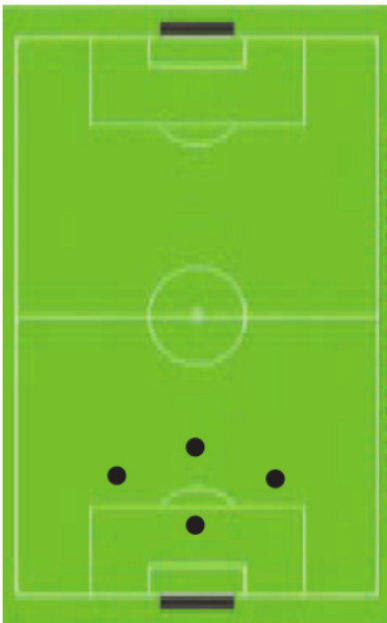
$(3!)^2 = 9!$ نادرست

$4! = \frac{8!}{2!}$ نادرست

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

@Faragiri10
ghadam.com



۴ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

$$۲ \times P(۲۰, ۳) = ۱۳۶۸۰ \text{ ثانیه}$$

۵ با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟ **۶!** چند تا از آنها با «گل» شروع می شود؟ **۴!**

$$P(۶, ۴) = ۳۶۰$$

ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت؟ **۴!** چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

$$۲! \times ۵! = ۲۴۰ \rightarrow \text{ی گ ل ا پ ر}$$

ت) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

جابه جایی کلی **گ ی ا ل** و **پیرا**

تهیه کننده:

$$۴! \times ۲ \times ۲ = ۹۶$$

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



۱ همان طور که دیدید، با پنج رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و تعداد $5! = 120$ عدد سه رقمی با رقم‌های غیر تکراری می‌توان نوشت که عبارت‌اند از:

۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۳۴	۱۳۵	۱۴۵	۲۳۴	۲۳۵	۲۴۵	۳۴۵
۱۳۲	۱۴۲	۱۵۲	۱۴۳	۱۵۳	۱۵۴	۲۴۳	۲۵۳	۲۵۴	۳۵۴
۲۱۳	۲۱۴	۲۱۵	۳۱۴	۳۱۵	۴۱۵	۳۲۴	۳۲۵	۴۲۵	۴۳۵
۲۳۱	۲۴۱	۲۵۱	۳۴۱	۳۵۱	۴۵۱	۳۴۲	۳۵۲	۴۵۲	۴۵۳
۳۱۲	۴۱۲	۵۱۲	۴۱۳	۵۱۳	۵۱۴	۴۲۳	۵۲۳	۵۲۴	۵۳۴
۳۲۱	۴۲۱	۵۲۱	۴۳۱	۵۳۱	۵۴۱	۴۳۲	۵۳۲	۵۴۲	۵۴۳

به شش عدد هر ستون نگاه کنید. چه ویژگی‌ای دارند؟

عدد‌ها موجود در هر ستون دارای رقم‌ها یکسان هستند و فقط جایگشت‌ها را متفاوت گرفته‌اند.

۲ با توجه به ستون‌های جدول بالا چگونه می‌توانیم تمام زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را بنویسیم؟ این زیرمجموعه‌ها چقدر هستند؟ آنها را بنویسید.

کافیست ارقام استفاده شده در هر ستون را به عنوان یک زیرمجموعه از A انتخاب کنیم. بنابراین ده زیرمجموعه سه عضوی وجود دارد.

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$

۳ چه تفاوتی در فعالیت ۱ و ۲ وجود داشت که تعداد حالت‌های مورد نظر آنها را متمایز کرد؟

در فعالیت (۱) ترتیب قرار گرفتن ارقام مهم بود و در فعالیت (۲) ترتیب قرار گرفتن ارقام اهمیت نداشت.

۴ هر ستون در فعالیت ۱ چند زیرمجموعه سه عضوی از فعالیت ۲ را به دست می‌دهد؟ یک زیرمجموعه.

۵ با توجه به فعالیت ۴، از تقسیم جواب فعالیت ۱ بر چه عددی تعداد زیرمجموعه‌های فعالیت ۲ حاصل می‌شود؟ ۶

این عدد را چگونه می‌توان به دست آورد؟

هر سه عضو از اعضا زیرمجموعه را به $6! = 720$ طریق می‌توان در ترتیب‌های مختلف نوشت و اعداد متفاوت ساخت.

نتیجه: همان طور که مشاهده کردید، در فعالیت ۱ ترتیب قرار گرفتن هر سه عدد انتخاب شده در کنار هم اهمیت دارد؛ اما در فعالیت ۲ تمام ۶ روش چینش هر سه عدد انتخاب شده یک زیرمجموعه سه عضوی از مجموعه A را مشخص می‌کند؛ یعنی در واقع هر زیرمجموعه سه عضوی، یک حالت را مشخص می‌کند و فقط تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از پنج عضو مورد نظر اهمیت دارد.

از طرفی می‌دانیم تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز برابر است با:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تهیه کننده:

بنابراین با توجه به فعالیت‌های ۱ تا ۶ تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از n شیء متمایز برابر است با :

$$\frac{P(n, r)}{r!}$$

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از یک مجموعه n عضوی، یک ترکیب r تایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های r تایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم :

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (0 \leq r \leq n)$$

مثال

از میان شش کتاب مختلف

الف) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

حل :

الف) چون ترتیب چیدن کتاب‌ها در قفسه مهم است لذا جواب برابر است با تعداد جایگشت‌های

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 360 \text{ یعنی متمایز؛ یعنی}$$

ب) چون ترتیب انتخاب کتاب‌ها اهمیتی ندارد لذا فقط باید تعداد انتخاب‌های چهار شیء از شش شیء متمایز؛ یعنی تعداد زیرمجموعه‌های چهارتایی از شش شیء متمایز را محاسبه کرد که برابر است با :

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-4)!4!} = 15$$

مثال

در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد اگر :

الف) کمیته ۴ نفره باشد؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

ث) کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟



غلامرضا تختی، قهرمان جهان

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



علیرضا سلیمانی، قهرمان سنگین وزن جهان

@Faragiri10
ghadam.com

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

حل:

الف) چون فرقی ندارد که ۴ نفر انتخاب شده از کدام کشور باشند، تنها تعداد زیرمجموعه‌های ۴ نفره از این ۹ نفر مورد نظر است که برابر است با:

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

ب) تعداد روش‌های انتخاب یک داور ایرانی برابر است با: $\binom{4}{1} = 4$. به همین طریق ۳ راه برای انتخاب داور ژاپنی و ۲ راه برای انتخاب داور روسی وجود دارد. طبق اصل ضرب تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با:

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

پ) تعداد راه‌های انتخاب دو داور ایرانی برابر است با: $\binom{4}{2} = 6$. حال ۳ داور دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شوند که به $\binom{5}{3} = 10$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد روش‌های انجام کار برابر است با:

$$6 \times 10 = 60$$

ت) در این حالت تعداد داوران ایرانی ۳ یا ۴ نفر می‌تواند باشد. در حالتی که داوران ایرانی ۳ نفر باشند، این داوران به $\binom{4}{3} = 4$ حالت می‌توانند انتخاب شوند. در این صورت دو نفر دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شوند که این کار به $\binom{5}{2} = 10$ طریق می‌تواند انجام شود. پس طبق اصل ضرب $4 \times 10 = 40$ روش وجود دارد.

در حالتی که داوران ایرانی ۴ نفر باشند، انتخاب این ۴ داور به $\binom{4}{4} = 1$ روش صورت می‌گیرد و یک داور دیگر باید از بین ۵ داور غیرایرانی انتخاب شود که به $\binom{5}{1} = 5$ طریق می‌تواند صورت گیرد. پس طبق اصل ضرب، برای این حالت $5 \times 1 = 5$ روش وجود دارد و جواب کل برابر است با $40 + 5 = 45$.

ث) تعداد روش‌های انتخاب ۳ داور ایرانی برابر است با: $\binom{4}{3} = 4$ ، تعداد روش‌های انتخاب

۲ داور ژاپنی برابر است با: $\binom{3}{2} = 3$ و تعداد راه‌های انتخاب ۲ داور روس برابر است با:

$$\binom{2}{2} = 1 \text{ لذا طبق اصل ضرب، جواب برابر است با: } 4 \times 3 \times 1 = 12$$

ج) می‌دانیم تعداد کل کمیته‌های ۵ نفره که می‌توان انتخاب کرد، برابر است با $\binom{9}{5} = 126$. از طرفی این کمیته‌های ۵ نفره به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند: دسته اول: حداقل یک ایرانی در آنهاست.

دسته دوم: هیچ داور ایرانی در آنها نیست.
جمع افراد این دو دسته برابر ۱۲۶ می شود و از آنجا که محاسبه دسته دوم آسان تر است، کافی است تعداد دسته دوم را محاسبه کنیم و از ۱۲۶ کم کنیم.

اما تعداد افراد دسته دوم برابر $\binom{5}{5} = 1$ است. چرا؟

با توجه به این که مرزوهییم داور ایرانی در هیچ نباشد، هر ۵ نفر را از ۵ نفر داور زاپینر و روسر انتخاب می کنیم

لذا تعداد افراد دسته اول برابر است با: $126 - 1 = 125$

کار در کلاس

۱ در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد جایگشت های r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب های r تایی از n شیء متمایز مشخص شود؟

(الف) ساختن کلمه ای سه حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (بامعنی و بی معنی). **ترتیب مهم است.**

(ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز. **ترتیب مهم نیست**

(پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی

در تمامی پست ها توانایی بازی دارند. **ترتیب مهم است**

توجه: به نظر بنده حقیر بهتر بود متن قسمت (پ) به صورت زیر نوشته می شد، تا خاطر از هر گونه ابهام باشد:

انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط، به ترتیب گفته شده، از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست ها توانایی بازی دارند.

(ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند. **ترتیب مهم نیست**

(ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت. **ترتیب مهم نیست**

(ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال های

طلا، نقره و برنز داده شود. **ترتیب مهم است**

۲ در هر کدام از موارد «کاردر کلاس ۱» تعداد حالت های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده کردن جواب نیست)

(الف) $P(5, 3)$

(ب) $\binom{5}{3}$

(پ) $P(7, 3)$

تهیه کننده:

(ت) $\binom{7}{3}$

(ث) $\binom{10}{3}$

(ج) $P(10, 3)$

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۳ از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب

شود. به چند طریق این کمیته می تواند انتخاب شود هرگاه:

(الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟ $\binom{5}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{8}{2} = 10 \times 15 \times 28 = 4200$

(ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟ $\binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{8}{1} = 5 \times 6 \times 8 = 240$

(پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟ $\binom{8}{1} \times \binom{11}{1} + \binom{8}{2} = 88 + 28 = 116$

فعالیت

از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیته دو نفره انتخاب شود، به گونه ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چند حالت برای انجام این کار وجود دارد؟

به جواب‌های چند دانش‌آموز به سؤال بالا که در زیر آمده است، دقت کنید.

محمد: از دو رشته باید هر کدام یک نفر انتخاب شوند و از رشته سوم کسی انتخاب نشود؛ لذا سه حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت:

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی کسی انتخاب نشود.

$$\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{0} = 2 \times 2 \times 1 = 4$$

ریاضی یک نفر انتخاب شود؛ فیزیک کسی انتخاب نشود و شیمی یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{1} \binom{2}{0} \binom{2}{1} = 2 \times 1 \times 2 = 4$$

ریاضی کسی انتخاب نشود؛ فیزیک یک نفر انتخاب شود و شیمی هم یک نفر انتخاب شود.

$$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 1 \times 2 \times 2 = 4$$

پس در کل $4+4+4=12$ حالت امکان دارد.

پژمان: می‌توان روش محمد را خلاصه‌تر کرد؛ یعنی در یک مرحله ابتدا تعداد حالت‌های

انتخاب دو رشته‌ای را که قرار است از آنها کسی انتخاب شود، محاسبه می‌کنیم که به $\binom{3}{2}$

راه امکان دارد. حال از هر کدام از دو رشته انتخاب شده به دو راه می‌توان یک فرد انتخاب

کرد؛ لذا جواب برابر است با: $\binom{3}{2} \times 2 \times 2 = 12$

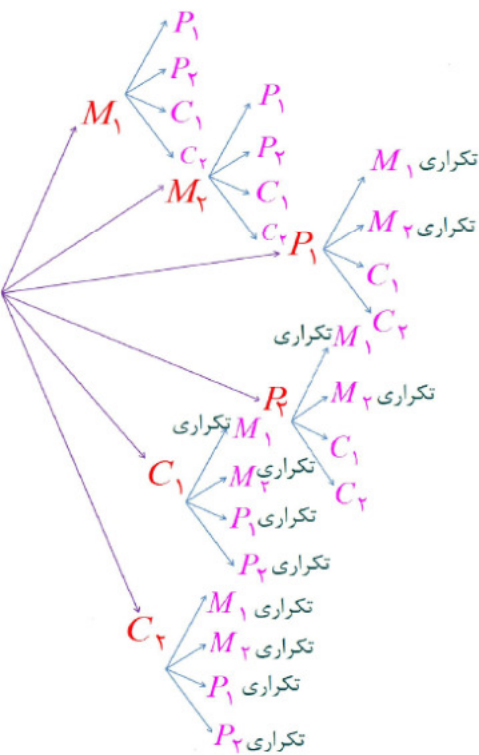
حمید: ولی به نظر من مستقیماً با اصل ضرب به روش زیر می‌توان آن را حل کرد.

اولین فرد انتخاب شونده می‌تواند هر کدام از ۶ نفر باشد؛ پس ۶ حالت برای انتخاب اولین فرد وجود دارد. اما وقتی اولین فرد انتخاب شد، دومین فردی که قرار است انتخاب شود، نمی‌تواند هم رشته او باشد؛ پس برای انتخاب دومین فرد چهار راه وجود دارد. بنابراین تعداد کل راه‌های انتخاب برابر $6 \times 4 = 24$ حالت است.

– دو نفر مدرس ریاضی را M_1 و M_2 ، دو نفر مدرس فیزیک را P_1 و P_2 ، و دو نفر مدرس شیمی را C_1 و C_2 در نظر بگیرید و تمام حالت‌های ممکن برای آنها را بنویسید و جواب غلط را مشخص کنید.

نمودار درختی جواب غلط را بکشید. سپس علت غلط بودن آن را مشخص کنید.

پایغ حمید با توجه به نمودار درختی روبرو غلط می‌باشد.



فعالیت

۱ می‌دانیم که $\binom{n}{r}$ همان تعداد زیر مجموعه‌های r تایی از یک مجموعه n عضوی است. حال $\binom{n}{1}$ و $\binom{n}{0}$ را یک‌بار با توجه به این تعبیر از $\binom{n}{r}$ ، و یک‌بار با فرمول، به دست آورید.

هر مجموعه n عضوی دارای n زیر مجموعه r هیچ عضوی نام‌شده است بنابراین: $\binom{n}{0} = 1$ \leftarrow اثبات به کمک فرمول $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \times n!} = 1$

هر مجموعه n عضوی دارای n زیر مجموعه r یک عضوی است بنابراین: $\binom{n}{1} = n$ \leftarrow اثبات به کمک فرمول $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \times (n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1 \times (n-1)!} = n$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

به زمین نمی‌روند	به زمین می‌روند
۴, ۵	۱, ۲, ۳
۳, ۵	۱, ۲, ۴
۲, ۴	۱, ۳, ۵
۲, ۵	۱, ۳, ۴
۲, ۴	۱, ۴, ۵
۲, ۵	۱, ۴, ۳
۱, ۵	۲, ۳, ۴
۱, ۴	۲, ۳, ۵
۱, ۳	۲, ۴, ۵
۱, ۲	۳, ۴, ۵

۲ الف) یک مری قصد دارد از بین بازیکنان شماره‌های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟ **۱۰ حالت انتخاب پذیر است.** با پرکردن جدول مقابل تمام حالات را نمایش دهید.

ب) این بار این مری قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب‌هایی دارد؟

جواب: برعکس حالت الف)، ستون سمت راست مر باشد، بنابراین در این مورد نیز ۱۰ انتخاب دارد.

پ) بین تعداد انتخاب‌های $\binom{5}{2}$ و $\binom{5}{3}$ چه رابطه‌ای هست؟ چگونه این رابطه را توجیه می‌کنید؟ **این دو انتخاب با هم برابرند زیرا تعداد حالات انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر به این معناست که ۲ نفر از ۵ نفر انتخاب نشوند.**

ت) درستی تساوی $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ را یک بار با استفاده از توجیه بالا و یک بار با استفاده از فرمول بررسی کنید.

تعداد انتخاب ۲ نفر از n نفر به این معناست که بقیه (یعنی n - ۲ نفر) را انتخاب نکنیم پس $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r! \times (n - (n-r))!} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} = \binom{n}{r} \quad \text{اثبات به کمک فرمول:}$$

۳ جاهای خالی را پر کنید.

@Faragiri10
ghadam.com

الف) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با: $\binom{26}{5}$
ب) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست

برابر است با: $\binom{25}{4}$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست،

برابر است با: $\binom{25}{5}$

ت) بنابراین: $\binom{26}{5} = \binom{25}{4} + \binom{25}{5}$

۴ فرض کنیم A یک مجموعه n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. (a ∈ A)

الف) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی مجموعه A برابر است با: $\binom{n}{r}$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها هست، برابر است با: $\binom{n-1}{r-1}$

پ) تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی A که a در آنها نیست، برابر است با: $\binom{n-1}{r}$

ت) بنابراین: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

۱ یک فروشنده تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه کدو، تخمه ژاپنی، نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

$$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 28 + 7 + 1 = 36$$

۲ یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{14}{3} = 1 \times 3 \times 364 = 1092 \text{ (الف)}$$

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{2} = 1 \times 3 \times 3 \times 55 = 495 \text{ (ب)}$$

$$\binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{9}{1} = 1 \times 3 \times 3 \times 2 \times 9 = 162 \text{ (پ)}$$

(الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

(ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

(پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

۳ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟ **فرمول کنیم: تعداد داوطلبان n نفر باشد بنا بر این:**

$$\binom{n}{2} = 28 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 = 8 \times 7 \Rightarrow n = 8$$

۴ گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 120 + 210 + 252 = 582$$

۵ یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 6 + 4 + 1 = 11$$

چرا با اینکه در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیشتر از جواب شماست؟

صوخ مکتب: است میزایج ترکیب رنگ‌ها یکسان نباشد به طور مثل یکبار ۵۰٪ از یک رنگ و ۵۰٪ از رنگ دیگر استفاده شود و بار دیگر ۶۰٪ از یک رنگ و ۴۰٪ از دیگر استفاده شود و در این دو حالت دو رنگ متفاوت به دست آید.

۶ هفت نقطه A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

$$\binom{7}{3} = 35$$

۷ یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هر گاه

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد؟ $\binom{10}{3} = 120$

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند؟

لاگر این دو ادویه استفاده شوند، ادویه سوم از ۸ ادویه باقیمانده انتخاب خواهد شد و در نتیجه:

$$\text{تعداد حالات وجود دو ادویه با هم} = \binom{8}{1}$$

$$120 - 8 = 112 = \binom{10}{3} - \binom{8}{1} = \text{تعداد حالات که دو ادویه با هم استفاده می شوند} - \text{تعداد کل حالات} = \text{تعداد حالات که دو ادویه با هم استفاده نشوند}$$

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

$$120 - 1 = 119 = \binom{10}{3} - \binom{3}{3} = \text{تعداد حالات که هر سه استفاده شده} - \text{تعداد حالات که هر سه نباید استفاده شوند}$$

ت) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچ یک از

ادویه های دسته دوم سازگاری ندارند؟

$$\text{هر سه ادویه باید از دسته اول انتخاب شده یا هر سه ادویه از دسته دوم انتخاب شوند. بنابراین: } 10 + 10 = 20 = \binom{5}{3} + \binom{5}{3}$$

۸ مسئله ای طرح کنید که جواب آن برابر باشد با:

الف) $\binom{5}{3} \times \binom{6}{2}$ مسئله: به چند طریق می توان از بین ۵ مرد و ۶ زن، ۵ نفر انتخاب کرد به طوری که در این انتخاب ۳ زن و ۲ مرد وجود داشته باشد؟

مسئله: اصناخ مر فواهد با پول هار قکشر ۲ مداد یا ۳ یک کم (فقط یک نفر از

این دو نوع) را خریدار کند. اگر در مغازه سه لوازم التحریر فروشنده فقط ۶

نوع مداد و ۵ نوع پاک کن موجود باشد، اصناخ چند انتخاب برار خرید دارد؟

ب) $\binom{5}{3} + \binom{6}{2}$

