تابع

فصل ۲

مفهوم تابع در ریاضیات و علوم مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. تابع در دنیای واقعی برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور نمونه قد متوسط کودکان را می‌توان به‌صورت یک تابع رادیکالی مانند $f(x)=7\sqrt{x}+50$ نمایش داد.

درس ۱

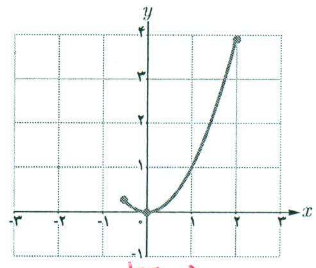
آشنایی بیشتر با تابع

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود. A را دامنهٔ تابع و B را هم‌دامنهٔ تابع می‌نامند. برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است.

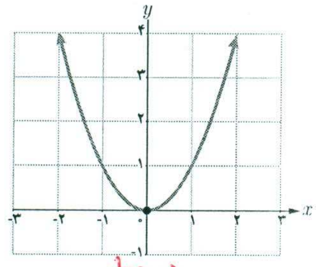
کار در کلاس

الف) با توجه به توابع داده شده در جدول زیر، مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است و جدول را نیز کامل کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارها را با هم مقایسه کنید.

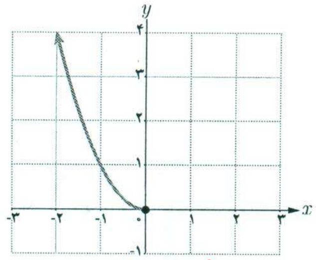
$k(x) = x^۲$	$s(x) = x^۲$	$t(x) = x^۲$	$h(x) = ۲x$	$g(x) = ۲x$	$f(x) = ۲x$	تابع
$[-\frac{۱}{۲}, ۲]$	$(-\infty, ۰]$	$\mathbb{R}$	$(-۲, ۲]$	$\{-۱, ۱, ۲\}$	$\mathbb{R}$	دامنه تابع
$[۰, ۴]$	$[۰, \infty)$	$[۰, \infty)$	$(-۴, ۴]$	$\{-۲, ۲, ۴\}$	$\mathbb{R}$	برد تابع



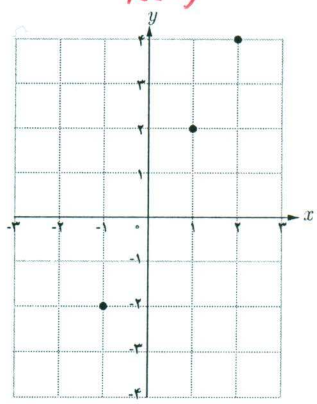
k(x)



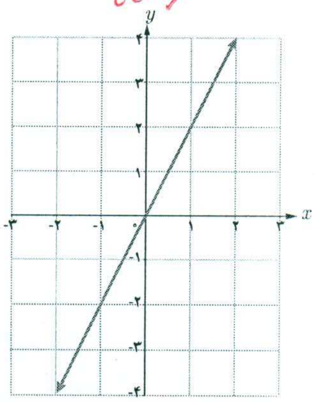
t(x)



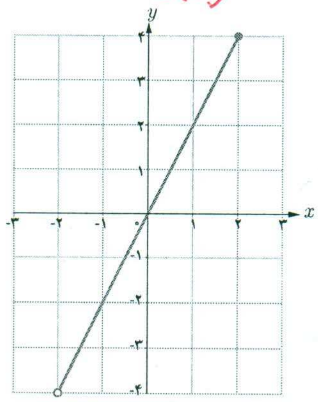
s(x)



g(x)



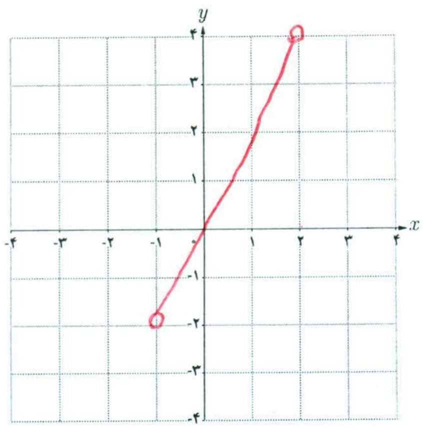
f(x)

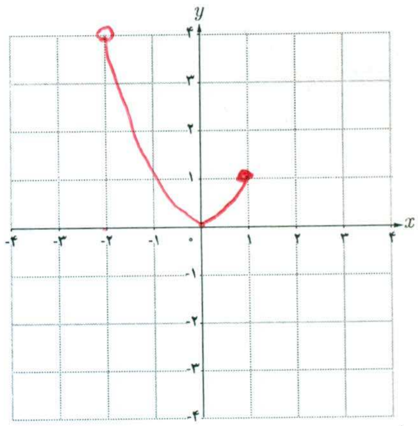


h(x)

ب) جدول روبه‌رو را به دلخواه (متفاوت از قسمت الف) کامل و نمودار هر تابع را رسم کنید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. چند پاسخ متفاوت برای f و g می‌توان ارائه کرد؟ بی‌شمار

تابع	$f(x) = ۲x$	$g(x) = x^۲$
دامنه	(-۱, ۲)	(-۲, ۱]
برد	(-۲, ۴)	(۴, ۱]





برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و دستور یا قاعده‌ای که نحوهٔ ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد معلوم باشد.

به‌طور مثال تابع f در قسمت الفِ کار در کلاس قبل، تابعی است با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و هم‌دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطه آن نیز $f(x) = ۲x$ است. برای سادگی و اختصار این تابع را به‌صورت مقابل نمایش می‌دهند :

$$\begin{cases} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = ۲x \end{cases}$$

(f تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است.)

به همین ترتیب تابع h قسمت الف را می‌توان چنین نمایش داد.

$$\begin{cases} h:(-۲,۲] \to (-۴,۴] \\ h(x) = ۲x \end{cases}$$

تابع h را به‌صورت مقابل هم می‌توان معرفی کرد.

$$\begin{cases} h:(-۲,۲] \to \mathbb{R} \\ h(x) = ۲x \end{cases}$$

در هر دو نمایشِ اخیرِ تابعِ h، دامنه مجموعه $(-۲,۲]$ و ضابطه آن $h(x) = ۲x$ است. در نمایش اول هم‌دامنه $(-۴,۴]$ است که همان برد تابع است. در نمایش دوم h، هم‌دامنه را $\mathbb{R}$ در نظر گرفته‌ایم. در این حالت نیز برد تابع $(-۴,۴]$ است.

هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

کار در کلاس

برای تابع $\begin{cases} f:[\circ,\frac{1}{۳}]\to[\circ,\infty) \\ f(x)=x^{۲} \end{cases}$ کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟ ب و ت

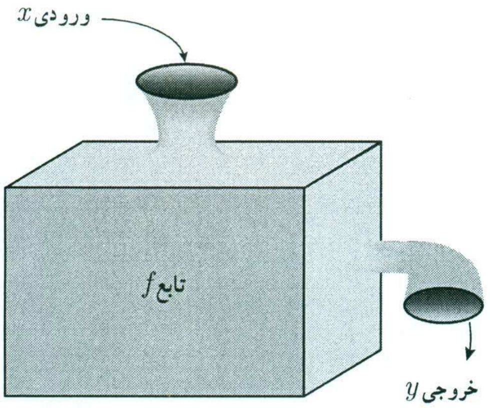
(الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^{۲} \end{cases}$ ✗

(ب) $\begin{cases} f:[\circ,\frac{1}{۳}]\to[\circ,\frac{1}{۹}] \\ f(x)=x^{۲} \end{cases}$ ✓

(پ) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to[\circ,\frac{1}{۹}] \\ f(x)=x \end{cases}$ ✗

(ت) $\begin{cases} f:[\circ,\frac{1}{۳}]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^{۲} \end{cases}$ ✓

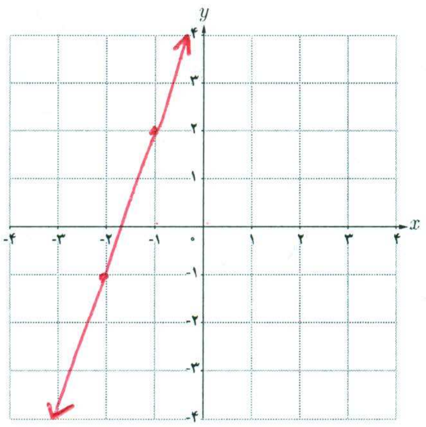
تابع به عنوان یک ماشین



می‌توان تابع را همچون ماشینی در نظر گرفت که یک ورودی را دریافت می‌کند و در ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه داده می‌شوند و خروجی‌ها به برد تعلق دارند و برای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد (البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسانی داشته باشند). اگر x عنصری دلخواه از دامنهٔ f و y نمایش خروجی نظیر آن باشد، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامند.

در این صورت می‌نویسیم: $y=f(x)$

کار در کلاس



فرض کنید ماشین f به عنوان ورودی، اعداد (حقیقی) را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد، آن را سه برابر و سپس ۵ واحد به آن اضافه می‌کند. در این صورت به ازای ورودی ۱۰، خروجی ۳۵ را می‌دهد. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) ماشین به ازای ورودی ۲-، چه خروجی خواهد داشت؟ ۱-

ب) اگر خروجی ماشین ۴ باشد ورودی آن چقدر بوده است؟

$3x+5=4 \quad 3x=-1 \quad x=-\frac{1}{3}$

پ) نمایش تابع به صورت $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=3x+5 \end{cases}$ است.

ت) نمودار تابع را رسم و دامنه و برد آن را معلوم کنید.

$D=R$ برد: R

تساوی دو تابع

اگر نمودارهای دو تابع در یک دستگاه مختصات داده شده باشند، هنگامی این دو تابع باهم برابرند که نمودارهای آنها کاملاً برهم منطبق شوند. به طور مثال هیچ‌کدام از توابع داده شده در قسمت الف کار در کلاس صفحه ۳۸ با یکدیگر برابر نیستند.

اگر دو تابع به‌صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی باهم برابرند که به عنوان دو مجموعه باهم برابر باشند.

> دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه :
>
> الف) دامنه f و دامنه g باهم برابر باشند.
>
> ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم : $f(x) = g(x)$

مثال : تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$ با هم برابرند ولی تابع‌های $f(x)=\frac{x}{x}$ و $g(x)=1$ برابر نیستند. چرا؟ $D_f \neq D_g$

$D_g = R$ $D_f = R-\{0\}$

کار در کلاس

۱ در جدول زیر کدام‌یک از توابع داده شدهٔ زیر باهم برابرند؟ دلیل بیاورید :

۱	$f = \{(1,2), (5,7)\}$	$g = \{(1,7), (5,2)\}$	$\rightarrow f(1) \neq g(1) \leftarrow$ اما $D_f = D_g$
۲	$f = \{(a,b), (c,d)\}$	$g = \{(c,d), (a,b)\}$	$\rightarrow$ دو f برابرند
۳	$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = 3x \end{cases}$	$\begin{cases} g = \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ g(x) = 3x \end{cases}$	$\rightarrow D_f \neq D_g$
۴	$f(x) = x\|x\|$	$g(x) = x^2$	$\rightarrow f(-1) \neq g(-1) \leftarrow$ اما $D_f = D_g$
۵	$f(x) = 4x$	$g(x) = \frac{8x}{2}$	$\rightarrow$ دو f برابرند

۲ وقتی در آسمان پدیدهٔ آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن صدای آن را نیز می‌شنویم. صدای ناشی از آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند. رابطه بین فاصله ما از مکان وقوع آذرخش و زمانی که طول می‌کشد تا صدای آن را بشنویم در جدول زیر (برای برخی زمان‌ها) داده شده است، اگر $t \in [4,12]$:

الف) جدول را کامل کنید :

t (ثانیه)	۴	$4\frac{1}{2}$	۵	۶	۸	۹	$10\frac{1}{5}$	۱۱	۱۲
h (کیلومتر)	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	۲	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{51}{15}=\frac{17}{5}$	$\frac{11}{3}$	۴

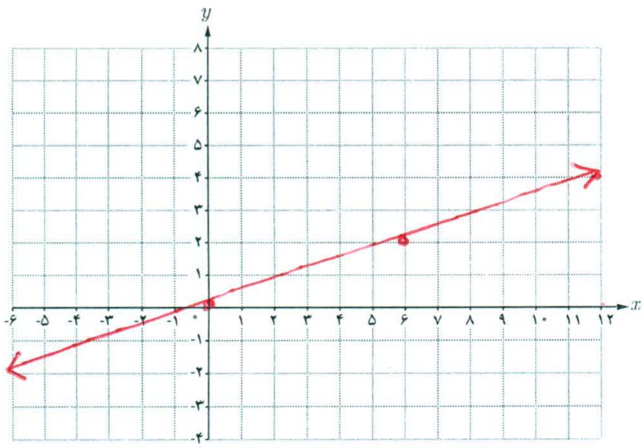
ب) چرا h تابعی از t است؟ برای هر زمان t فقط یک مقدار h وجود دارد

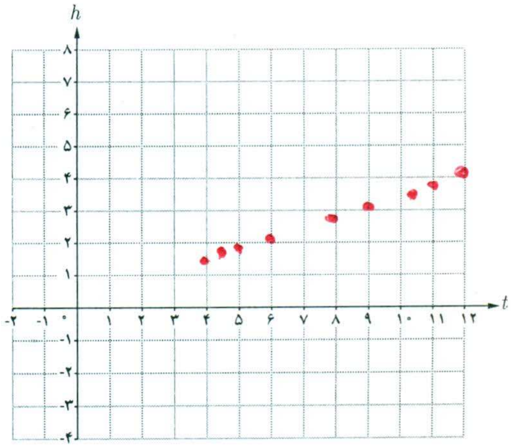
پ) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

ت) نمایش مقابل از تابع h کامل کنید :

$$\begin{cases} h: [۴ \quad ۱۲] \to [\frac{۴}{۳} \quad ۴] \\ h(t) = \frac{1}{۳}t \end{cases}$$

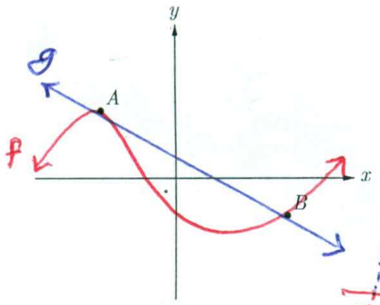
ث) نمودار تابع h و نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}x$ را رسم کنید و شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها را بیان کنید. $D_h \neq D_y$ h





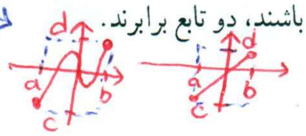
تمرین

۱ در صفحه مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟ بی شمار



۲ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

✗ الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند. خیر، مانند شکل روبرو



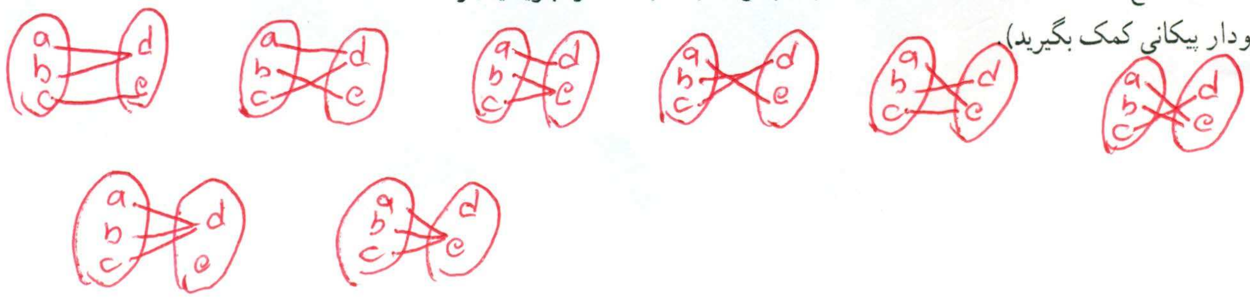
✓ ب) برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.

✗ پ) هم‌دامنهٔ تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است.

✓ ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن بازهٔ $[۰,۳]$ است.

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ بی‌شمار

۴ همه تابع‌های از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ را بنویسید(از نمودار پیکانی کمک بگیرید).



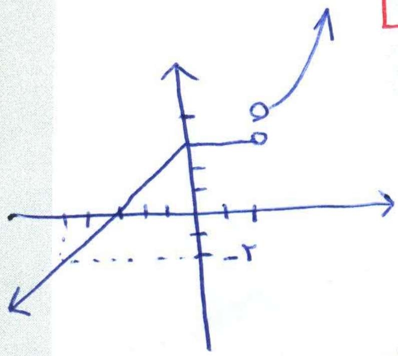
۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{cases} \qquad \begin{cases} r: [\circ, +\infty) \to \mathbb{R} \\ r(a) = ۵a \end{cases}$$

$$\begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = ۵x \end{cases} \qquad \begin{cases} s: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ s(a) = ۵a \end{cases}$$

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \begin{cases} t: \mathbb{R} - \{\circ\} \to \mathbb{R} \\ t(x) = ۵x \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & x \geq \circ \\ -x & x < \circ \end{cases}$$



۶ تابع f در همهٔ شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(۲) = ۳$ و $f(-۵) = -۲$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > ۲ \\ ۳ & \circ \leq x \leq ۲ \\ x + ۳ & x < \circ \end{cases}$$

ب) f در بازه $[\circ, ۲]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد:

تابع خطی برای مردان $M(x) = ۲/۸۹x + ۷۰/۶۴$

تابع خطی برای زنان $F(x) = ۲/۷۵x + ۷۱/۴۸$

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی‌متر است.

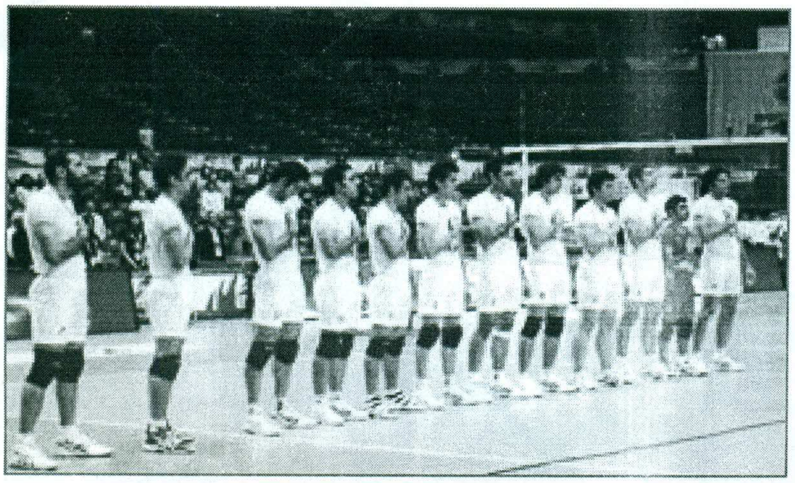
الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

(الف) $m(۳۵) = ۲/۸۹ \times ۳۵ + ۷۰/۶۴ = ۱۷۱/۷۹$

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

(ب) $۱۸۵ = ۲/۸۹ \times x + ۷۰/۶۴$

$x = \frac{۱۸۵ - ۷۰/۶۴}{۲/۸۹} = \frac{۱۱۴/۳۶}{۲/۸۹} \simeq ۳۹/۵۷ \ cm$



خواندنی

نتایج یک مطالعه در مورد قد مردان و زنان از سال ۱۹۱۴ تا ۲۰۱۴ نشان می‌دهد که میانگین قد مردان ایرانی در طی این صد سال از ۱۵۷/۱ به ۱۷۳/۶ سانتی‌متر و میانگین قد زنان ایرانی از ۱۴۸/۵ به ۱۵۹/۷ سانتی‌متر رسیده است. مردان ایرانی بیشترین افزایش طول قد در دنیا را در ۱۰۰ سال اخیر داشته‌اند.

درس ۲

انواع توابع

شما تاکنون با توابع مختلفی آشنا شده‌اید. توابع در دنیای واقعی دارای کاربردهای زیادی هستند. تابع‌های ثابت، تابع‌های همانی، تابع‌های خطی و به‌طور کلی توابع چند جمله‌ای نمونه‌هایی از توابعی هستند که در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این درس با انواع دیگری از توابع مهم و مفید آشنا می‌شویم.

توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

توابع زیر همگی گویا هستند:

$$f(x) = \frac{۵}{x+۲} \qquad g(x) = \frac{\frac{۱}{۳}x - ۴}{x^۲ - ۷x + ۱} \qquad h(x) = \frac{\sqrt{۵}x + ۲}{x^۳ + ۱}$$

خواندنی

توابع گویا در دنیای واقعی کاربردهای فراوانی دارند. به‌طور مثال میانگین تعداد وسایل نقلیه‌ای که در یک صف منتظر ورود به یک پارکینگ هستند از تابع گویای $f(x) = \dfrac{x^۲}{۲(۱-x)}$ بدست می‌آید که در آن x شدت ترافیک و عددی بین صفر و یک است.

فرودگاه امام خمینی(ره)

کار در کلاس

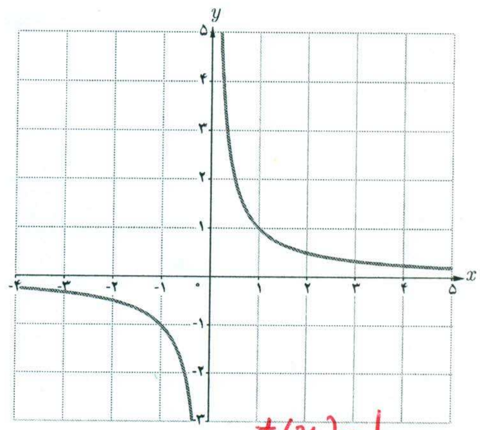
مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

(ت)
$$\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{۰\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$$

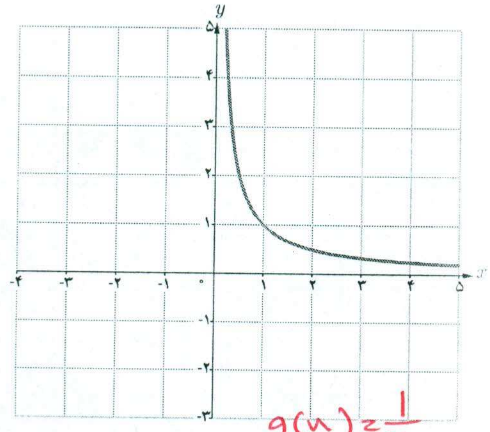
(پ)
$$\begin{cases} h:\{۱,۲,۳\}\to\mathbb{R} \\ h(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} g:\mathbb{R}^{+}\to\mathbb{R} \\ g(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases}$$

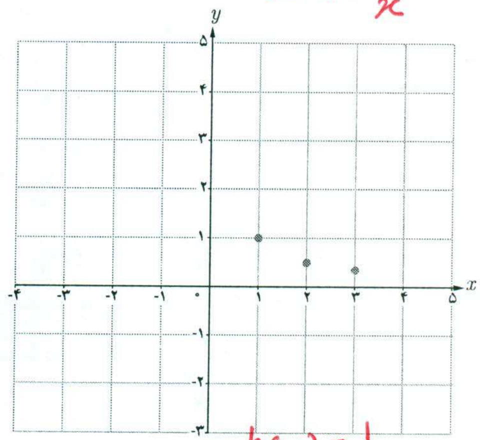
(الف)
$$\begin{cases} f \\ \end{cases}$$



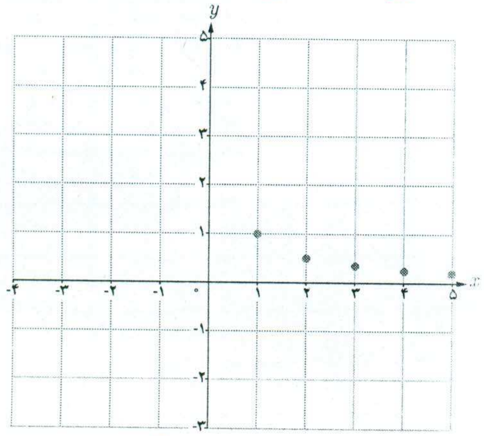
$t(x)=\frac{1}{x}$



$g(x)=\frac{1}{x}$



$h(x)=\frac{1}{x}$

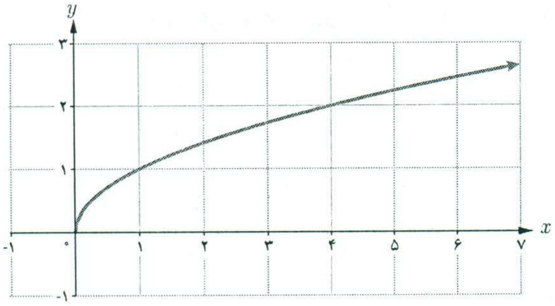


$f(x)$

دامنه تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ است، اما ممکن است دامنه را به مجموعه‌های دیگری محدود کنیم. دامنهٔ f را با D_f نمایش می‌دهیم. دامنه یک تابع گویا مجموعهٔ همهٔ مقادیری است که به‌ازای آنها، عبارت جبریِ گویایِ نمایش دهندهٔ ضابطهٔ تابع، تعریف‌شده باشد؛ مثلاً دامنه تابع $f(x)=\dfrac{۵}{x+۲}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۲\}$ است.

توابع رادیکالی (تابع ریشه دوم)

تابعی را که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ یا $y=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند. نمودار تابع در شکل نشان داده شده است. دامنه و برد این تابع، بازهٔ $[\,\circ\,,+\infty)$ است. تابع $f(x)=\sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.

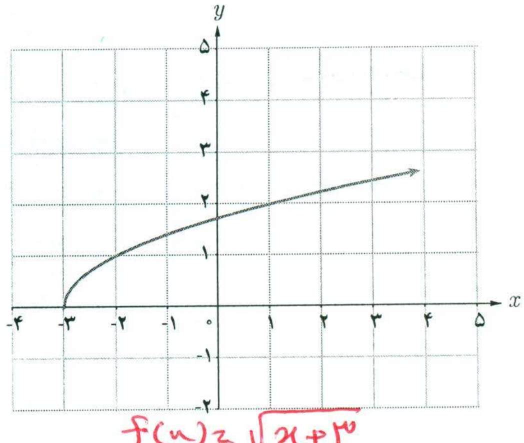


کار در کلاس

به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار چهار تابع :

الف) $f(x)=\sqrt{x}+3$, ب) $h(x)=\sqrt{x}-3$, پ) $g(x)=\sqrt{x-3}$, ت) $r(x)=\sqrt{x+3}$

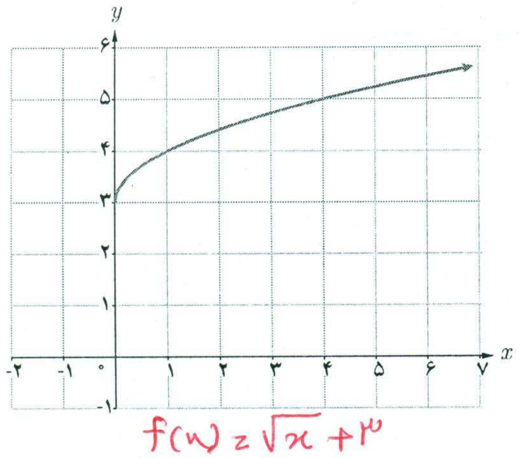
رسم شده‌اند. تابع مربوط به هر نمودار را مشخص و دامنه و برد آن را معلوم کنید.



$f(x)=\sqrt{x+3}$

$D=[-3,\infty)$

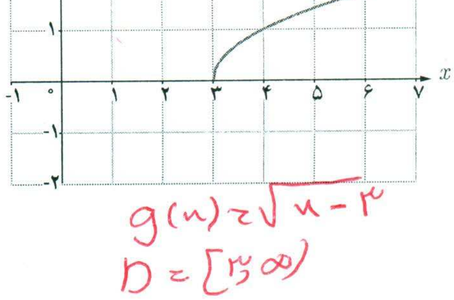
برد : $[0,\infty)$



$f(x)=\sqrt{x}+3$

$D=[0,\infty)$

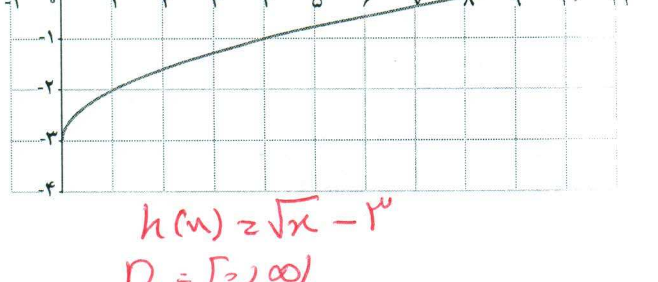
برد $=[3,\infty)$



$g(x)=\sqrt{x-3}$

$D=[3,\infty)$

برد $=[0,\infty)$



$h(x)=\sqrt{x}-3$

$D=[0,\infty)$

برد $=[-3,\infty)$

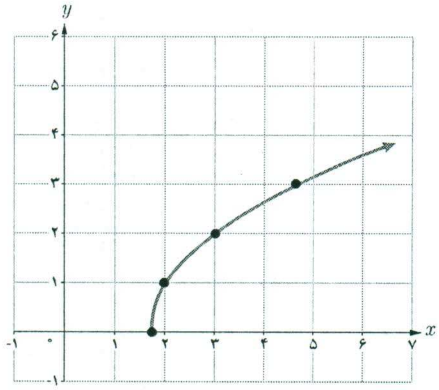
✤ **مثال :** دامنه تابع $f(x)=\sqrt{3x-5}$ برابر مجموعهٔ همه اعدادی است که برای آنها $3x-5 \geq 0$ و یا $x \geq \frac{5}{3}$ پس : $D_f=[\frac{5}{3},+\infty)$.

برد این تابع نیز مجموعه اعداد نامنفی است

یعنی : $R_f=[0,+\infty)$

در جدول، مقادیر تابع f به ازای چند عدد در دامنه آن مشخص و نمودار تابع نیز در زیر جدول رسم شده است.

x	$\frac{5}{3}$	۲	۳	۴	$\frac{14}{3}$
$f(x)$	۰	۱	۲	$\sqrt{7}$	۳

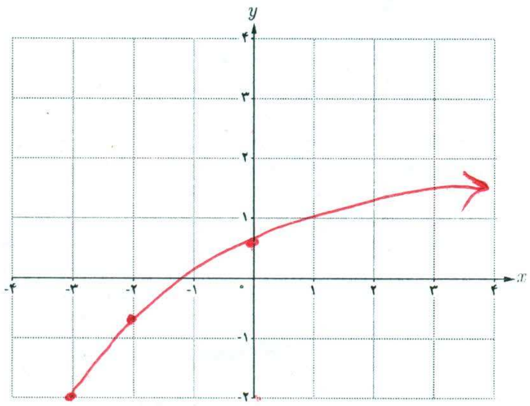


کار در کلاس

$2x+6 \geq 0 \quad 2x \geq -6 \quad x \geq -3 \quad D_f=[-3,\infty)$

الف) دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{2x+6}$ را به‌دست آورید. سپس به کمک نقطه‌یابی نمودار آن را رسم کرده و برد تابع را نیز معلوم کنید.

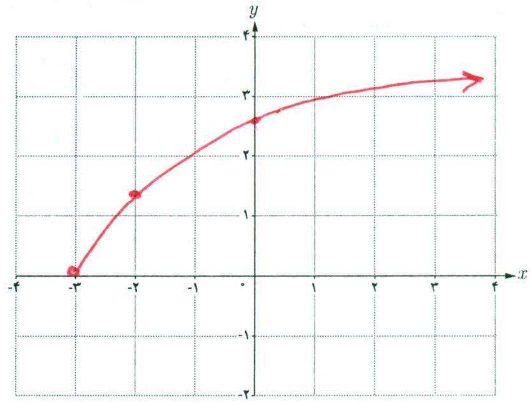
ب) نمودار تابع $g(x)=\sqrt{2x+6}-2$ را به کمک انتقال رسم کنید.



ب

$D:[-3,\infty)$

برد $[-2,\infty)$



الف

$D:[-3,\infty)$

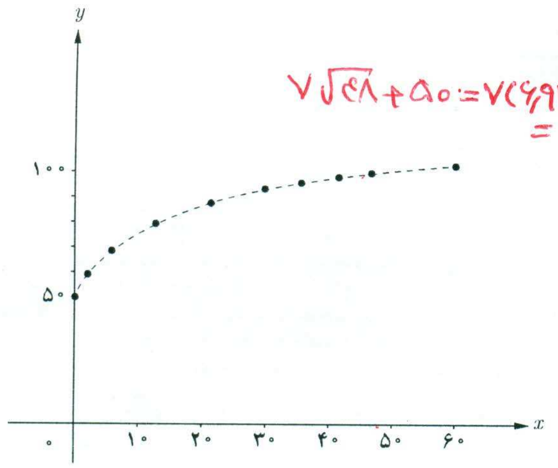
برد $[0,\infty)$

فعالیت

تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$ قد متوسط کودکان را، به تقریب، و برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. x نشان‌دهنده ماه‌های پس از تولد است. در حالت کلی دامنه این تابع رادیکالی بازهٔ $[0,\infty)$ است ولی در این مثال که واقعی است دامنه آن بازهٔ $[0,60]$ می‌باشد.

الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده‌ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰	۵۷	۶۴	۷۲/۱	۷۸	۸۵	۸۸/۳	۹۲	۹۹	۱۰۴/۲



ب) برد این تابع چیست؟ $[۵۰, \infty)$

پ) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟ $۷\sqrt{۴۸}+۵۰ = ۷(۶/۹۲)+۵۰\ cm$

$= ۹۸/۴۴$

ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید که کودکی با قد ۷۵ سانتی‌متر حدوداً چند ماهه است.

$۷۵ = ۷\sqrt{x}+۵۰$

$۲۵ = ۷\sqrt{x}$

$\frac{۲۵}{۷} = \sqrt{x}$

$۳/۵۷ = \sqrt{x} \quad x = ۱۲/۷۴$

معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x و y هستند یک رابطه را نشان می‌دهند؛ مثلاً معادلهٔ $x+y=۲$ شامل همه زوج‌های مرتبی است که مجموع مؤلفه‌های آنها برابر۲است. نمودار این معادله یک خط است. این معادله را به‌صورت $y = -x + ۲$ یا $f(x) = -x + ۲$ نیز نمایش می‌دهند. بسیاری از توابع با یک معادله بیان می‌شوند، اما الزاماً یک معادله با دو متغیر برحسب x و y یک تابع را مشخص نمی‌کند.

مثال

الف) در معادله $-x^۲+y=۴$، y را برحسب x به‌دست آورید. آیا y تابعی از x است؟ بله $y = x^۲+۴$

حل: داریم $y = x^۲+۴$. این معادله یک سهمی را مشخص می‌کند که همان تابع $f(x) = x^۲+۴$ است.

ب) آیا در معادله $x-y^۲=۴$، y تابعی از x است؟

حل: اگر y را برحسب x به‌دست آوریم داریم: $y=\pm\sqrt{x-۴}$ به‌ازای $x=۵$ داریم: $y=\pm۱$. یعنی فقط نقاط $(۵,۱)$ و $(۵,-۱)$ روی نمودار تابع قرار دارند. بنابراین، این معادله یک تابع را نمایش نمی‌دهد.

کار در کلاس

کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ دلیل بیاورید.

الف) $y = |x| + ۱$ تابع هست

ب) $x = |y| + ۱$ تابع نیست چون نقاط (۵،۴) و (۵،-۴) هر دو روی نمودار این تابع قرار دارند

$x = ۵ \rightarrow y = \pm ۴$

تابع پله‌ای ـ تابع جزء صحیح

هزینهٔ ارسال بسته‌های پستی به‌طور معمول تابعی از وزن آنهاست. هزینهٔ توقف خودرو در یک پارکینگ نیز تابعی از زمان توقف است. در فعالیت زیر با نمونه‌ای از این توابع آشنا می‌شویم.

فعالیت

هزینه ارسال یک بستهٔ پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

x (وزن بسته) کیلوگرم	$۰ < x \leq ۲$	$۲ < x \leq ۵$	$۵ < x \leq ۱۰$	$۱۰ < x \leq ۱۲$
$f(x)$ (هزینه ارسال) برحسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

اگر حداکثر وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

الف) ضابطهٔ تابعی را که جدول فوق نشان می‌دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به‌دست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} ۵ & ۰ < x \leq ۲ \\ ۱۰ & ۲ < x \leq ۵ \\ ۱۷ & ۵ < x \leq ۱۰ \\ ۲۰ & ۱۰ < x \leq ۱۲ \end{cases}$$

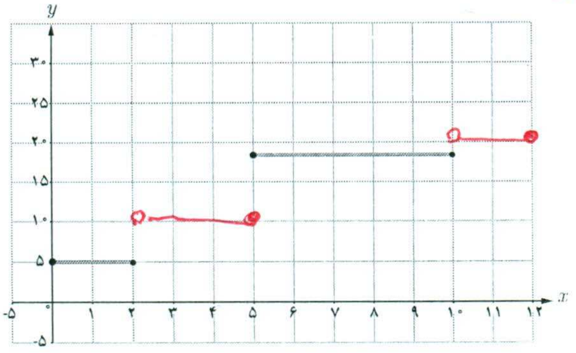
$D = [۰, ۱۲]$

برد = {۵،۱۰،۱۷،۲۰}

ب) برای ارسال دو بسته به وزن‌های ۹ کیلوگرم و ۱۱/۵ کیلوگرم چه هزینه‌ای باید پرداخت؟

$۱۷ + ۲۰ = ۳۷$

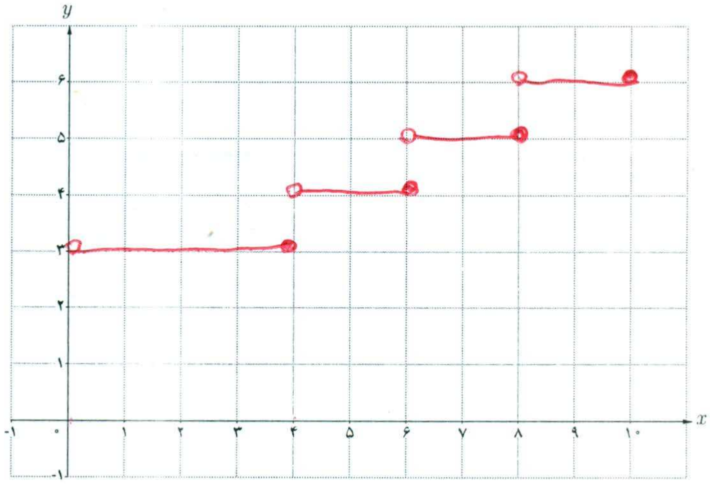
پ) قسمتی از نمودار این تابع در شکل روبه‌رو رسم شده است. بقیه نمودار را رسم کنید.



توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به‌گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای می‌نامند.

کار در کلاس

۱ پارکینگ یک مجتمع تفریحی ـ ورزشی برای چهار ساعت اول توقف یک خودرو ۳ هزار تومان و برای هر دو ساعت اضافه یا زمانی کمتر از آن ۱۰۰۰ تومان دریافت می‌کند. اگر حداکثر مدت توقف در این پارکینگ ده ساعت باشد، نمودار تابعی را که هزینه توقف را به‌ازای همه ساعات ممکن نشان دهد رسم کنید. دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

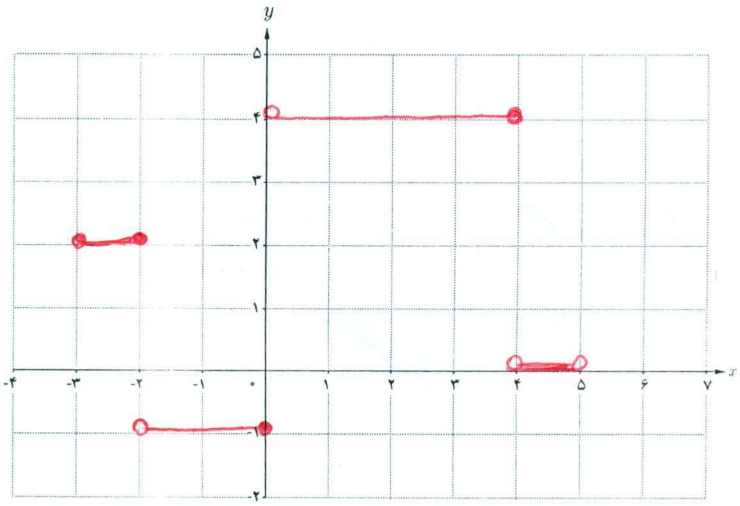


$$f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰<x\leq ۴ \\ ۴ & ۴<x\leq ۶ \\ ۵ & ۶<x\leq ۸ \\ ۶ & ۸<x\leq ۱۰ \end{cases}$$

$D=(۰,۱۰]$

برد : $\{۳,۴,۵,۶\}$

۲ نمودار تابع پله‌ای زیر را رسم کنید :

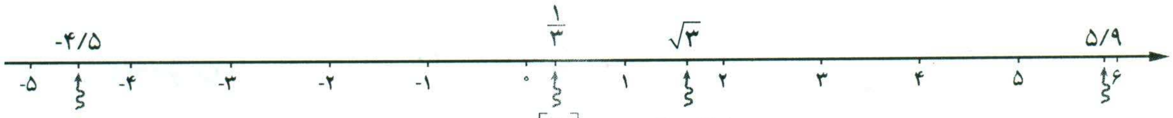


$$f(x)=\begin{cases} ۲ & -۳\leq x\leq -۲ \\ -۱ & -۲<x\leq ۰ \\ ۴ & ۰<x\leq ۴ \\ ۰ & ۴<x<۵ \end{cases}$$

گونه خاصی از توابع پله‌ای که دارای کاربردهای زیادی نیز هست تابع جزء صحیح نام دارد. ابتدا با جزء صحیح یک عدد آشنا می‌شویم.

برای هر عدد حقیقی مانند x، جزء صحیح آن بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم، به‌طور مثال $[۳/۴۹]=۳$ و $[-۲/۸]=-۳$. مطابق با تعریف، جزء صحیح یک عدد همواره : $[x]\leq x$. اگر x یک

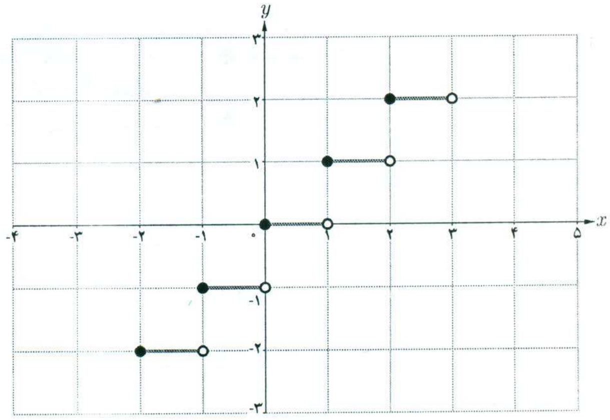
عدد صحیح باشد $x = [x]$. جزء صحیح اعداد نشان داده شده روی محور را بیابید.



$[-۴/۵] =$ $\left[\frac{۱}{۳}\right] =$ $[\sqrt{۳}] =$ $[۵/۹] =$

تابعی که به هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و آن را به صورت $f(x) = [x]$ نمایش می‌دهند. $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \mathbb{Z}$. نمودار تابع با توجه به جدول در بازه $[-۲,۳)$ رسم شده است.

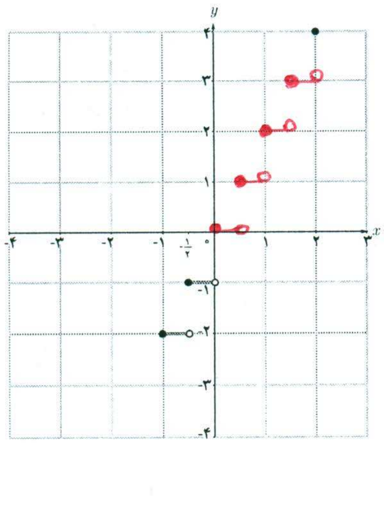
x	$y = [x]$
$-۲ \le x < -۱$	$y = -۲$
$-۱ \le x < ۰$	
$۰ \le x < ۱$	
$۱ \le x < ۲$	
$۲ \le x < ۳$	



کار در کلاس

۱ نمودار تابع $f(x) = [۲x]$ را در بازهٔ $[-۱,۲]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

$$-۱ \le x \le ۲ \Rightarrow -۲ \le ۲x \le ۴$$

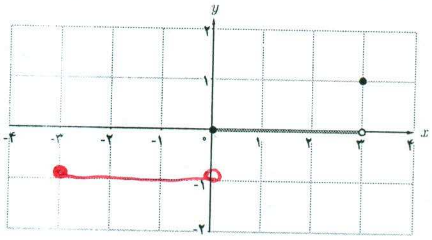


$۲x$	$-۲ \le ۲x < -۱$	$-۱ \le ۲x < ۰$	$۰ \le ۲x < ۱$	$۱ \le ۲x < ۲$	$۲ \le ۲x < ۳$	$۳ \le ۲x < ۴$
$[۲x]$	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
x	$-۱ \le x < -\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲} \le x < ۰$	$۰ \le x < \frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲} \le x < ۱$	$۱ \le x < \frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲} \le x < ۲$

۴ نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{۱}{۳}x\right]$ را در بازهٔ $[-۳\,,۳]$ رسم کنید (کامل کنید).

$$\circ\le\frac{۱}{۳}x<۱ \quad\Rightarrow\begin{cases}\left[\frac{۱}{۳}x\right]=\circ\\ \circ\le x<۳\end{cases}$$

$$-۱\le\frac{۱}{۳}x<\circ \quad\Rightarrow\begin{cases}\left[\frac{۱}{۳}x\right]=-۱\\ -۳\le x<\circ\end{cases}$$



تمرین

۱ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{x-۱}{۲-x}$
$D_f=R-\{۲\}$

ب) $f(x)=\frac{-۳x}{x^۲+۱}$
$D_f=R$

پ) $f(x)=\frac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$
$D_f=R-\{-۴,۳\}$

$(x+۴)(x-۳)=\circ$
$\begin{cases}x=-۴\\ x=۳\end{cases}$

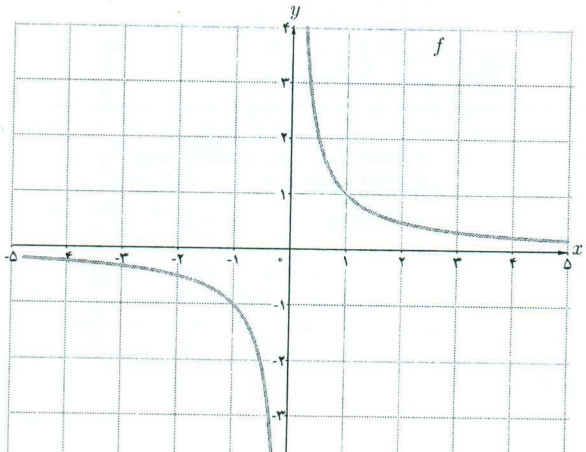
ت) $f(x)=\sqrt{۳x+۱}$
$۳x+۱\ge\circ \quad x\ge-\frac{۱}{۳}$
$D_f=[-\frac{۱}{۳},\infty)$

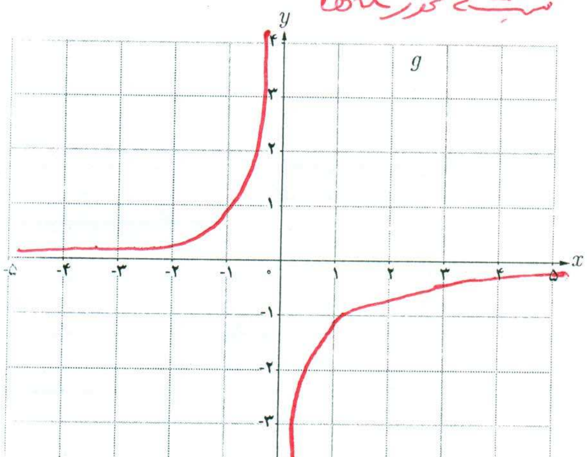
ث) $f(x)=۲\sqrt{x}-۳$
$D_f=[\circ,\infty)$

ج) $f(x)=\sqrt{۸-x}$
$D_f=(-\infty,۸]$

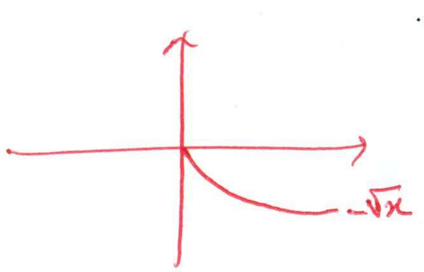
۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کرد.

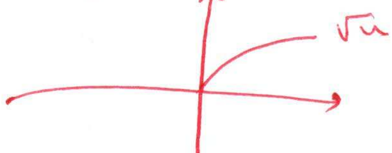
نمودار g از قرینه کردن نمودار f نسبت به محور xها بدست می‌آید چون مقادیر تابع در f و g قرینه هستند نسبت به محور xها





۳ نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

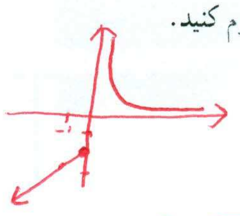




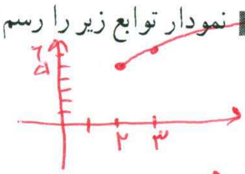
۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ x-2 & x\le 0\end{cases}$

D=R
برد (۰,∞)∪(−∞,−۲]

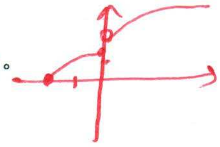


ب) $f(x)=\sqrt{x-2}+5$



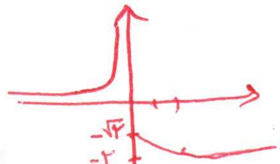
D=[۲,∞)
برد [۵,∞)

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+2 & x>0\\ \sqrt{x+2} & -2\le x\le 0\end{cases}$



D=[−۲,∞)
برد [۲,∞)∪[۰,√۲]

ت) $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & x<0\\ -\sqrt{x+2} & x\ge 0\end{cases}$



D=R
برد (۰,∞)∪(−∞,−√۲]

۵ کدام‌یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند؟

الف) $3x+2y=12$ — تابع ✓

ب) $x=1$ — تابع ✗ (۱,۰) (۱,۱)

پ) $y=-2$ — تابع ✓

ت) $f(x)=\begin{cases}x+3 & x\le 0\\ x-1 & x\ge 0\end{cases}$ — تابع ✗ (۰,−۱) (۰,۳)

ث) $y^2=x^2$ ✗ (۱,۱) (۱,−۱)

ج) $y=|x|$ — تابع ✗

۶ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به‌وسیله تابع $f(x)=\frac{255x}{100-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

$100-x>0 \quad x<100 \quad (-\infty,100)$

الف) $\frac{255\times 50}{100-50}=255$ میلیون

۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=[x]+1 \quad , \quad -2\le x<3$

ب) $f(x)=[\frac{1}{2}x] \quad , \quad -4\le x<4$

صفحه بعد

۸ نمودارهای دو تابع $y=[x-3]$ و $y=[x]-3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

صفحه بعد

۹ اگر تعداد افرادی که، طی یک مدت معین، به‌وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t)=\frac{9500t-2000}{4+t}$ به‌دست آید که در آن $t>0$ زمان برحسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

صفحه بعد

سوال ۷-

$f(x) = [x] + 1 \qquad -2 \leq x < 3$

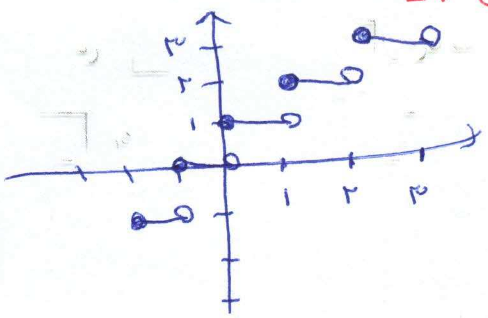
$-2 \leq x < -1 \to [x] = -2 \to y = -1$

$-1 \leq x < 0 \to [x] = -1 \to y = 0$

$0 \leq x < 1 \to [x] = 0 \to y = 1$

$1 \leq x < 2 \to [x] = 1 \to y = 2$

$2 \leq x < 3 \to [x] = 2 \to y = 3$



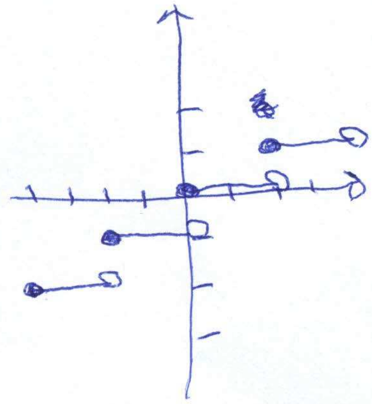
$f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right] \qquad -4 \leq x < 4$

$-4 \leq x < -2 \qquad -2 \leq \frac{1}{2}x < -1 \to f(x) = -2$

$-2 \leq x < 0 \qquad -1 \leq \frac{1}{2}x < 0 \to f(x) = -1$

$0 \leq x < 2 \qquad 0 \leq \frac{1}{2}x < 1 \to f(x) = 0$

$2 \leq x < 4 \qquad 1 \leq \frac{1}{2}x < 2 \to f(x) = 1$



سوال ۸-

$y = [x] - 3$

$-2 \leq x < -1 \to y = -5$

$-1 \leq x < 0 \to y = -4$

$0 \leq x < 1 \to y = -3$

$1 \leq x < 2 \to y = -2$

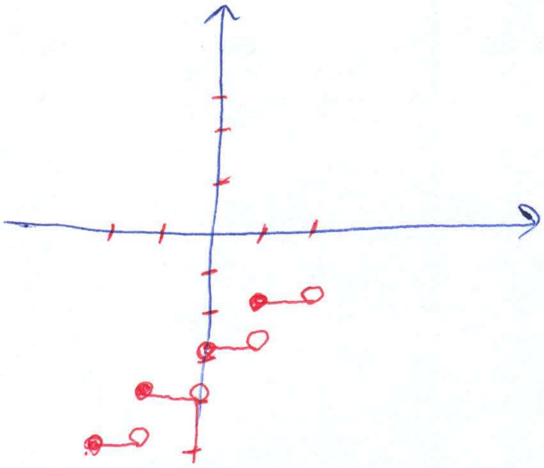
$y = [x - 3]$

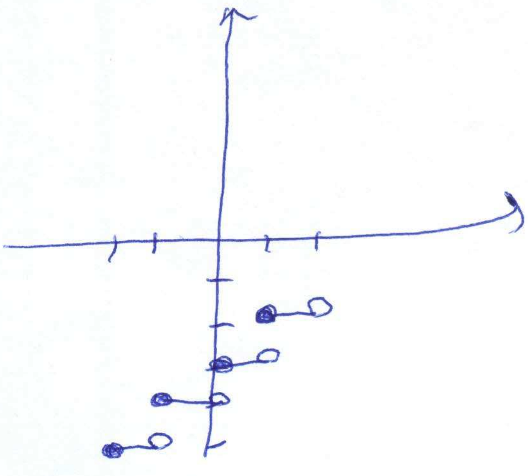
$-5 \leq x - 3 < -4 \qquad y = -5$

$-4 \leq x - 3 < -3 \qquad y = -4$

$-3 \leq x - 3 < -2 \qquad y = -3$

$-2 \leq x - 3 < -1 \qquad y = -2$





هر دو تابع نمودار یکسانی دارند

سوال ۹- الف)

$N(5) = \frac{9500 \times 5 - 2000}{4 + 5} = \frac{47500 - 2000}{9} = \frac{45500}{9} = 5055$ نفر

ب) $5500 = \frac{9500t - 2000}{4 + t} \to 22000 + 5500t = 9500t - 2000$

$20000 = 4000t$

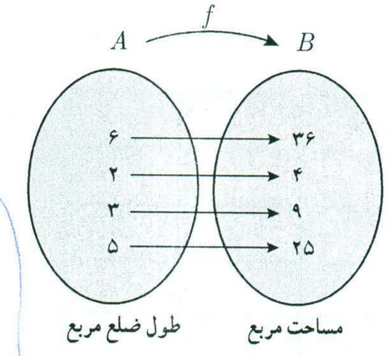
$t = 5$ ماه

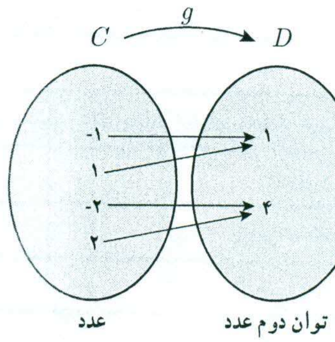
درس ۳

وارون توابع

فعالیت

دو تابع f و g را در نظر بگیرید :





الف) f و g را به‌صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

$f=$ {(۶, ۳۶)(۲,۴)(۳,۹)(۵,۲۵)}

$g=$ {(-۱,۱)(۱,۱)(-۲,۴)(۲,۴)}

$D_f=$ {۶, ۲, ۳, ۵} $\qquad$ $D_g=$ {-۱, ۱, ۲, -۱}

$R_f=$ {۳۶, ۴, ۹, ۲۵} $\qquad$ $R_g=$ {۱, ۴}

ب) اگر جای دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب در f و g را عوض کنیم، روابط جدیدی به‌دست می‌آید. آنها را به ترتیب h و k بنامید. h و k را وارون رابطه‌های f و g می‌نامیم. h و k را به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.

$h=$ {(۳۶,۶)(۴,۲)(۹,۳)(۲۵,۵)}

$k=$ {(۱,-۱)(۱,۱)(۴,-۲)(۴,۲)}

کدام‌یک از رابطه‌های h و k تابع است؟ دلیل بیاورید. h تابع ولی k تابع نیست معکوس رابطه‌ای یک تابع

می‌باشد که آن رابطه [illegible]
به هر عضو [illegible]
فقط یک [illegible]
از برد متعلق به چند x
از دامنه نباشد

> اگر رابطهٔ بین دو مجموعه به‌صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از جابه‌جایی دو مؤلفه هر زوج مرتب رابطه به‌دست می‌آید وارونِ آن رابطه می‌نامیم.
>
> اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :
>
> $$f^{-1} = \{(y\,,x)\,|\,(x\,,y) \in f\}$$
>
> اگر f^{-1} تابع باشد آن‌گاه f را وارون‌پذیر (معکوس پذیر) و f^{-1} را «تابع وارون» f می‌نامیم.

توجه کنید که f^{-1} را نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه گرفت.

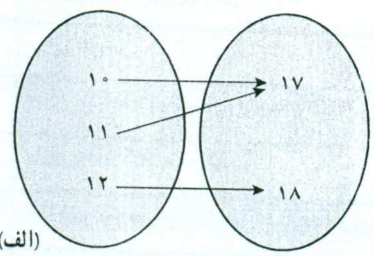
توابع یک به یک

چه توابعی وارون‌پذیرند؟ در فعالیت قبل تابع f وارون‌پذیر بود ولی تابع g وارون‌پذیر نبود. بنابراین سؤال اساسی این است که یک تابع باید چه شرطی داشته باشد تا وارون‌پذیر باشد؟ به طور کلی توابعی که در برد برای هر عضو از برد تابع فقط یک عضو از دامنه نظیر شده باشد

فعالیت

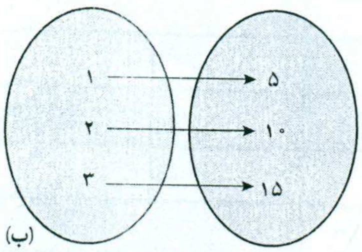
توابع زیر را در نظر بگیرید:

الف) کدام یک از آنها وارون‌پذیرند؟



(الف)

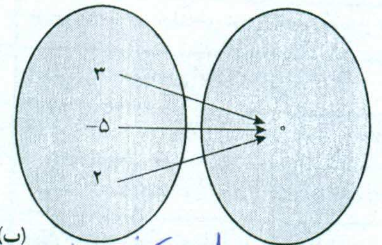
وارون پذیر نیست



(ب)

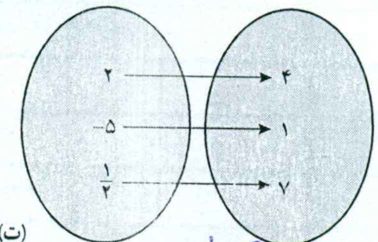
وارون پذیر

ب) ویژگی مشترک توابع وارون‌پذیر چیست؟



(پ)

وارون پذیر نیست

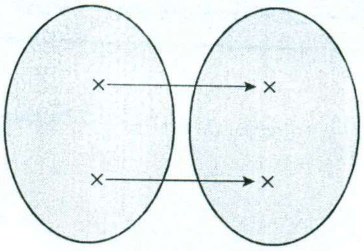


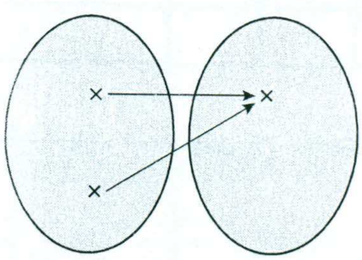
(ت)

وارون پذیر

اگر f یک تابع باشد و به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود تابع وارون‌پذیر است. اگر تابعی چنین ویژگی داشته باشد آن را یک به یک نامیم. به عبارت دیگر تابع f یک به یک است هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه، به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند.

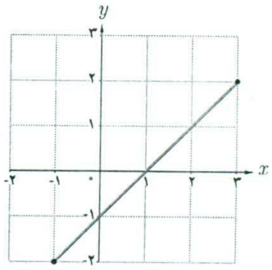
همان‌گونه که در فعالیت بالا دیده شد، اگر تابعی یک‌به‌یک باشد آن‌گاه وارون‌پذیر است.


تابع یک به یک است.


تابع یک به یک نیست.

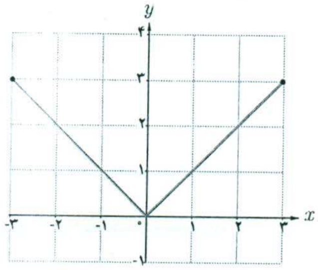
فعالیت

توابع داده شده در (الف) و (پ) یک به یک هستند ولی توابع داده شده در (ب) و (ت) یک به یک نیستند. چرا؟ توضیح دهید.



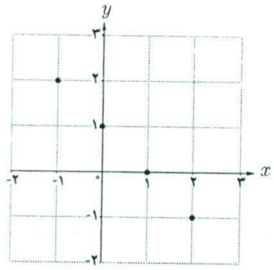
(الف)

یک به یک به هر عضو برد دقیقا یک عضو از دامنه خطی می‌شود



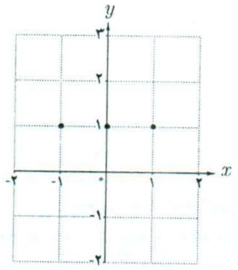
(ب)

یک به یک نیست مثلا ۲ را قطع می‌کند ۲ از برد ۲- و ۲+ هر دو تطبیق شده



(پ)

یک به یک به هر عضو برد یک عضو دامنه تطبیق شد



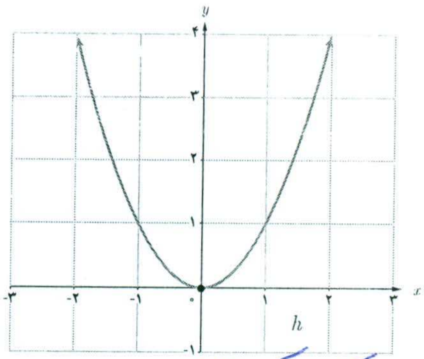
(ت)

یک به یک نیست به یک عضو از برد سه عضو از دامنه تطبیق شد

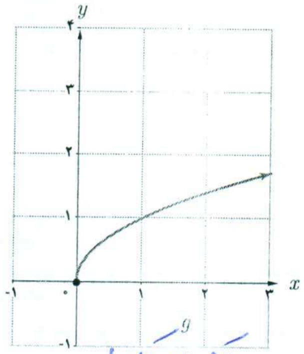
به‌طور کلی می‌توان گفت که یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

کار در کلاس

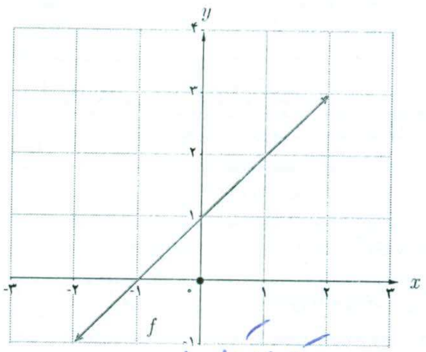
۱ کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند؟



یک به یک X



یک به یک



یک به یک

$k = \{(۱,۲), (۳,۴), (۸,۹)\}$

یک به یک

$l = \{(۳,۷), (۲,۵), (۱,۵)\}$

یک به یک X

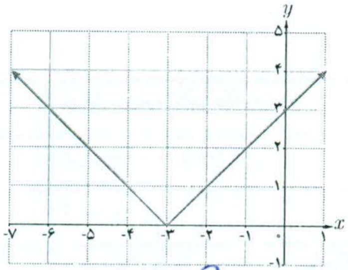
۲ فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطهٔ بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند. چون کد ملی‌ها اعضای برد محسوب می‌شوند و امکان ندارد یک کد ملی متعلق به دو نفر یا بیشتر باشد یعنی کد ملی هر فقط منحصر به یک فرد می‌باشد

نکته ← وارون تابع ممکن است تابع باشد یا نباشد ولی تابع وارون همیشه تابع هست

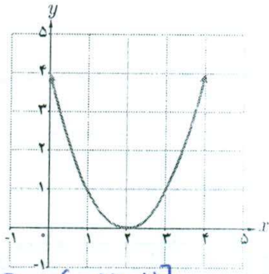
کار در کلاس

تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

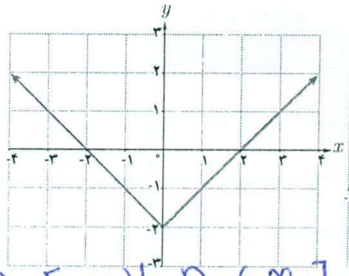
الف) $y = |x+۳|$ ب) $y = (x-۲)^۲$ پ) $y = |x|-۲$ ت) $y = x^۲-۱$



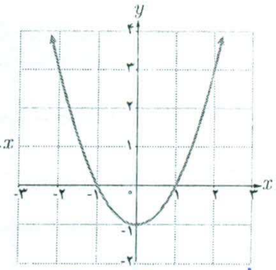
D = (-∞,۳] یا D = [۳, ∞) دامنه محدود



D = (-∞,۲] یا D = [۲,∞) دامنه محدود



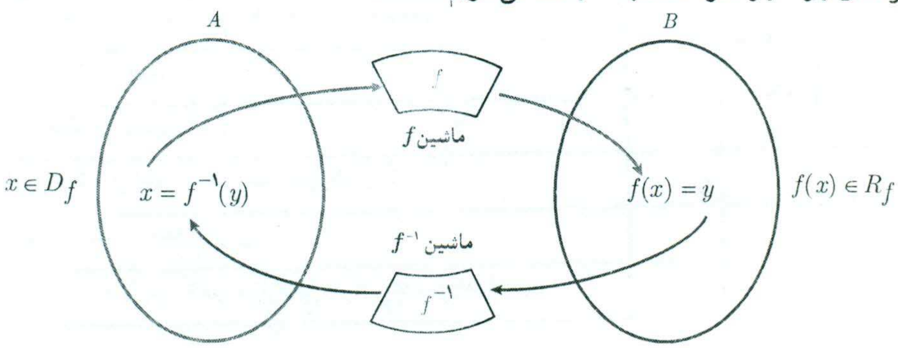
D = [۰,∞) یا D = (-∞,۰] دامنه محدود



D = [۰,∞) یا D = (-∞,۰] دامنه محدود

محاسبهٔ وارون یک تابع

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر کارکرد f و f^{-1} را نشان می‌دهد. در فعالیت بعد به‌صورت جزئی‌تر با کارکردهای f و f^{-1} و نحوهٔ محاسبهٔ f^{-1} آشنا می‌شویم.

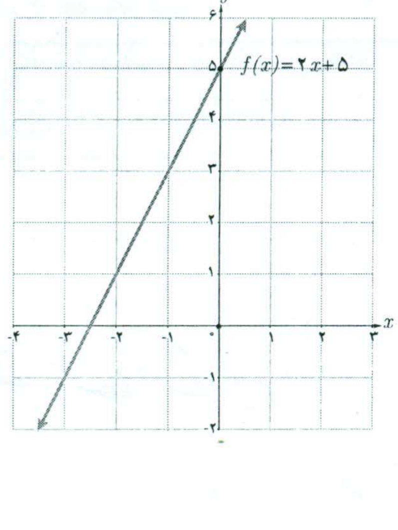


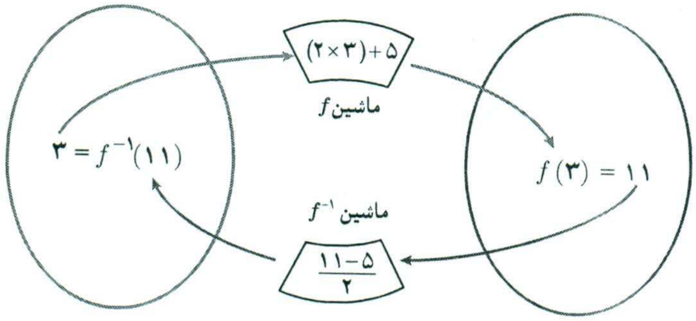
فعالیت

تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = ۲x+۵ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

چون هر خط افقی آن را در یک نقطه قطع می‌کند در هر عضو برد دقیقاً یک عضو از دامنه تطبیق شده است

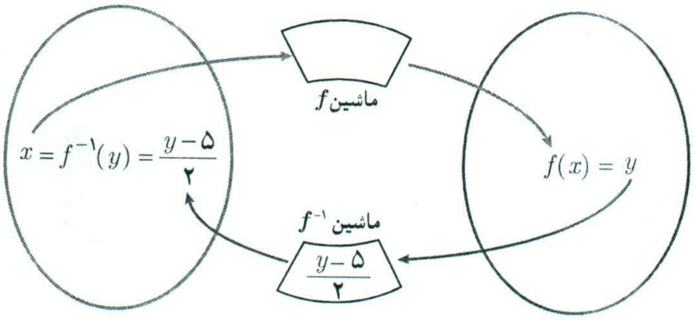




ب) نمودار روبه‌رو را توضیح دهید :

$(۱۱,۳) \in f^{-۱}$ و $(۳,۱۱) \in f$

به عبارت دیگر $f(۳) = ۱۱$ و $f^{-۱}(۱۱) = ۳$



پ) در حالت کلی برای هر عنصر $x \in D_f$، نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.

ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$f(x) = ۲x + ۵ \qquad (x \in D_f)$$

$$f^{-۱}(y) = \frac{y-۵}{۲} \qquad (y \in R_f)$$

$f^{-۱}$ را به‌صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید :

$$\begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(h) = \frac{h-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(t) = \frac{t-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(y) = \frac{y-۵}{۲} \end{cases}$$

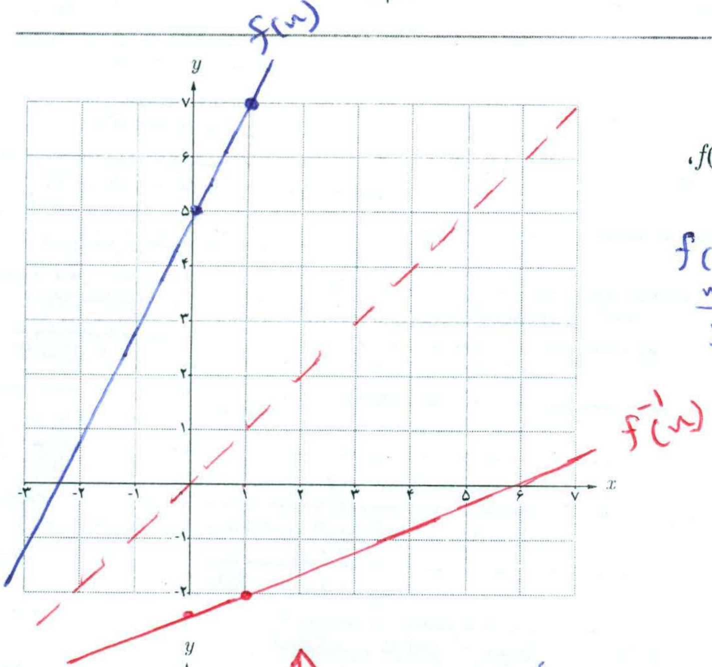
آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است :

$$\begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(x) = \frac{x-۵}{۲} \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادله $y=f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=۲x+۵ \Rightarrow y=۲x+۵$$
$$\Rightarrow ۲x=y-۵$$
$$\Rightarrow x=\frac{y-۵}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(y)=\frac{y-۵}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۵}{۲}$$

کار در کلاس



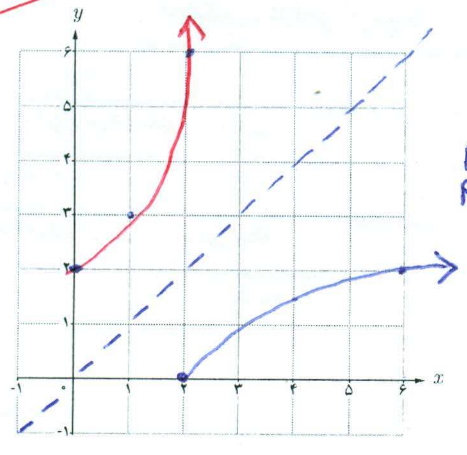
۱ با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم $f(x)=۲x+۵$، نمودار f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$f(x)=2x+5$

x	0	1
y	5	7

$y=2x+5$
$y-5=2x$
$x=\frac{y-5}{2}$
$f^{-1}(y)=\frac{y-5}{2}$
$f^{-1}(x)=\frac{x-5}{2}$

x	0	1
y	-2/5	-2



۲ اگر داشته باشیم $f(x)=\sqrt{x-۲}$، دامنه و برد f را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

$D=[2,\infty)$
$R_f=[0,\infty)$

در معادلهٔ $y=\sqrt{x-۲}$ ضابطه $f^{-۱}$ را بنویسید. نمودار $f^{-۱}$ را رسم و دامنه و برد $f^{-۱}$ را معلوم کنید.

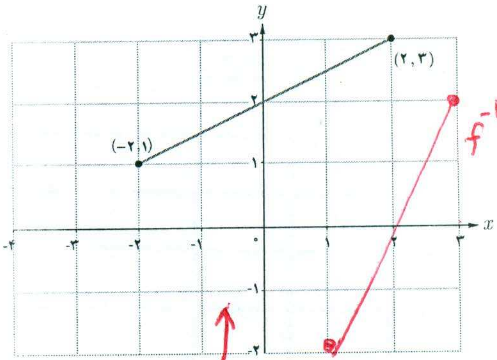
$y=\sqrt{x-2}$
$y^2=x-2$
$y^2+2=x \Rightarrow f^{-1}(y)=y^2+2$
$f^{-1}(x)=x^2+2$

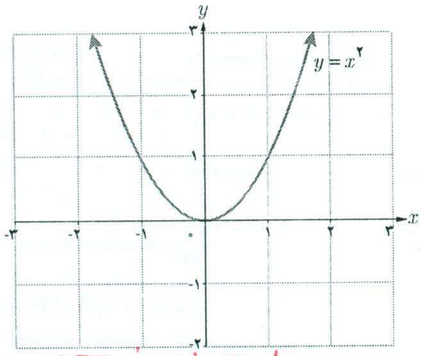
اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به‌دست آوردن نمودار تابع $f^{-۱}$ کافی است قرینهٔ f را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به‌دست آوریم.

$D_{f^{-1}}=[0,\infty)$
$R_{f^{-1}}=[2,\infty)$

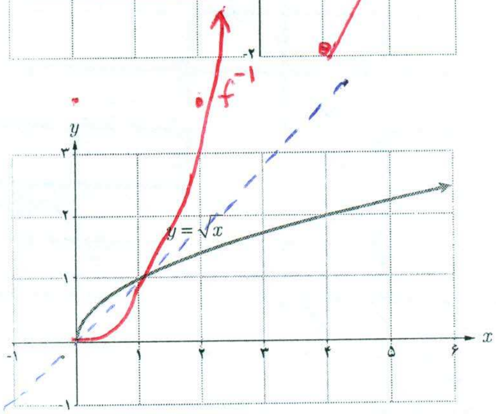
کار در کلاس

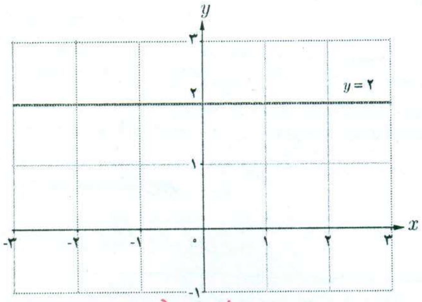
نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع‌های زیر را که یک به یک است در همان دستگاه مختصات رسم کنید.





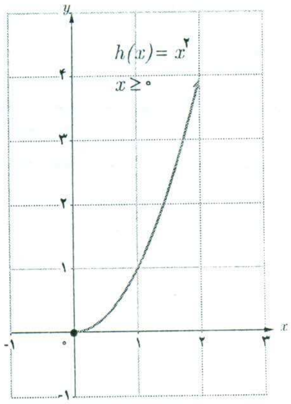
وارون پذیر نیست



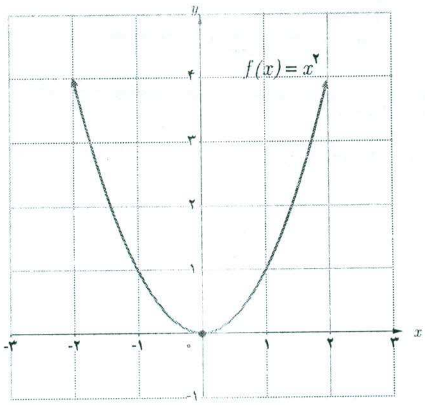


وارون پذیر نیست

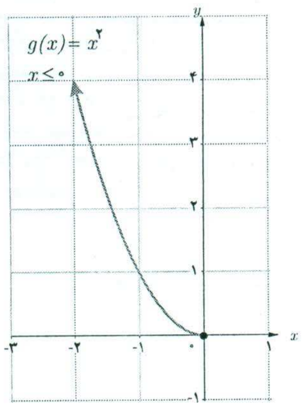
اگر تابعی یک به یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می‌توان تابعی یک به یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x) = x^۲$ یک به یک نیست، ولی با محدود کردن تابع به بازهٔ $[\circ, \infty)$ و یا $(-\infty, \circ]$ تابعی یک به یک به‌دست می‌آید.



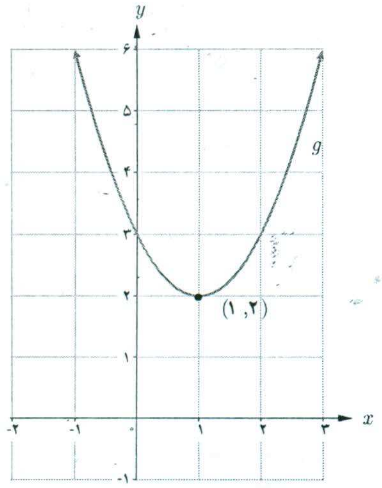
h یک به یک و وارون‌پذیر است.



f یک به یک نیست، وارون‌پذیر هم نیست.



g یک به یک و وارون‌پذیر است.



مثال : نمودار تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. به‌طور مثال $g(2) = g(0)$. می‌توان دامنه این تابع را محدود کرد و تابعی یک به یک به‌دست آورد و سپس وارون آن را حساب کرد.

در مورد تابع g داریم :

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad D_g = \mathbb{R} \text{ و } R_g = [2, +\infty)$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

دامنه f را به بازهٔ $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم و تابع جدید را f می‌نامیم.

بنابراین تابع جدید به‌صورت زیر خواهد بود که تابع یک به یک و وارون‌پذیر است.

$$\begin{cases} f: [1, +\infty) \to \mathbb{R} \\ f(x) = (x-1)^2 + 2 \end{cases} \qquad D_f = [1, +\infty) \quad , \quad R_f = [2, +\infty)$$

اکنون سعی می‌کنیم x را برحسب y به‌دست آوریم :

$$y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = y - 2 \Rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{y-2}$$

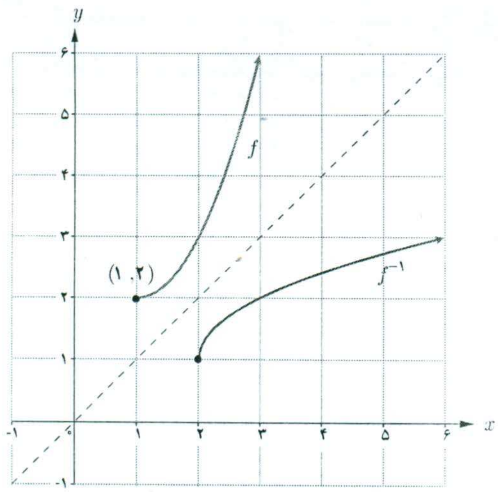
جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین :

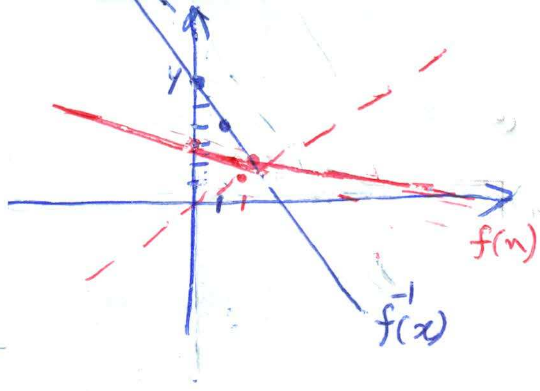
$$x - 1 = \sqrt{y-2} \Rightarrow x = \sqrt{y-2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

در حقیقت داریم :

$$\begin{cases} f^{-1}: [2, \infty) \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1 \end{cases} \qquad D_{f^{-1}} = [2, +\infty) \qquad R_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

نمودار f و f^{-1} در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند.





نقطه برخورد f و f^{-1}

[۲]

تمرین

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک‌به‌یک نباشد. ارتباط بین معلم و شاگردان تمام شاگردان یک کلاس یک معلم ریاضی دارند

۲ آیا تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ وارون تابع $g(x)=\frac{۵}{۲}$ است؟ خیر چون $(۰,\frac{۲}{۵})\in f$ ولی $(\frac{۲}{۵},۰)\notin g$ و تابع f و g به خاطر یک‌به‌یک نبودن وارون پذیر نمی‌باشند

۳ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید:

پاسخ‌ها در صفحه بعد

الف) $f(x)=(x+۵)^۲ \quad , \quad x\geq -۵$

ب) $f(x)=-|x-۱|+۱ \quad , \quad x\geq ۲$

پ) $f(x)=(x-۳)^۲$

ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=۱۰۰-۵t^۲$ به‌دست می‌آید.

الف) دامنه و برد h را به‌دست آورید. $D_h=[۰,\sqrt{۲۰})$ و $R_h=[۰,۱۰۰]$

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟ چون هر ارتفاع از سنگ در زمان منحصر به فردی از دامنه خطی می‌شود

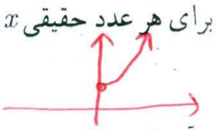
پ) تابع وارون h را به‌دست آورید.

$y=۱۰۰-۵x^۲ \rightarrow y-۱۰۰=۵x^۲ \quad \frac{y-۱۰۰}{۵}=x^۲ \quad x=+\sqrt{\frac{y-۱۰۰}{۵}}$

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x<f(x)$.

$f:[۰,\infty)\rightarrow R$

$f(x)=x^۲+۱$



۶ وارون تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

$y=-\frac{۱}{۲}x+۳ \rightarrow y-۳=-\frac{۱}{۲}x \quad ۲y-۶=-x \quad x=۶-۲y$

$f^{-1}(y)=۶-۲y$

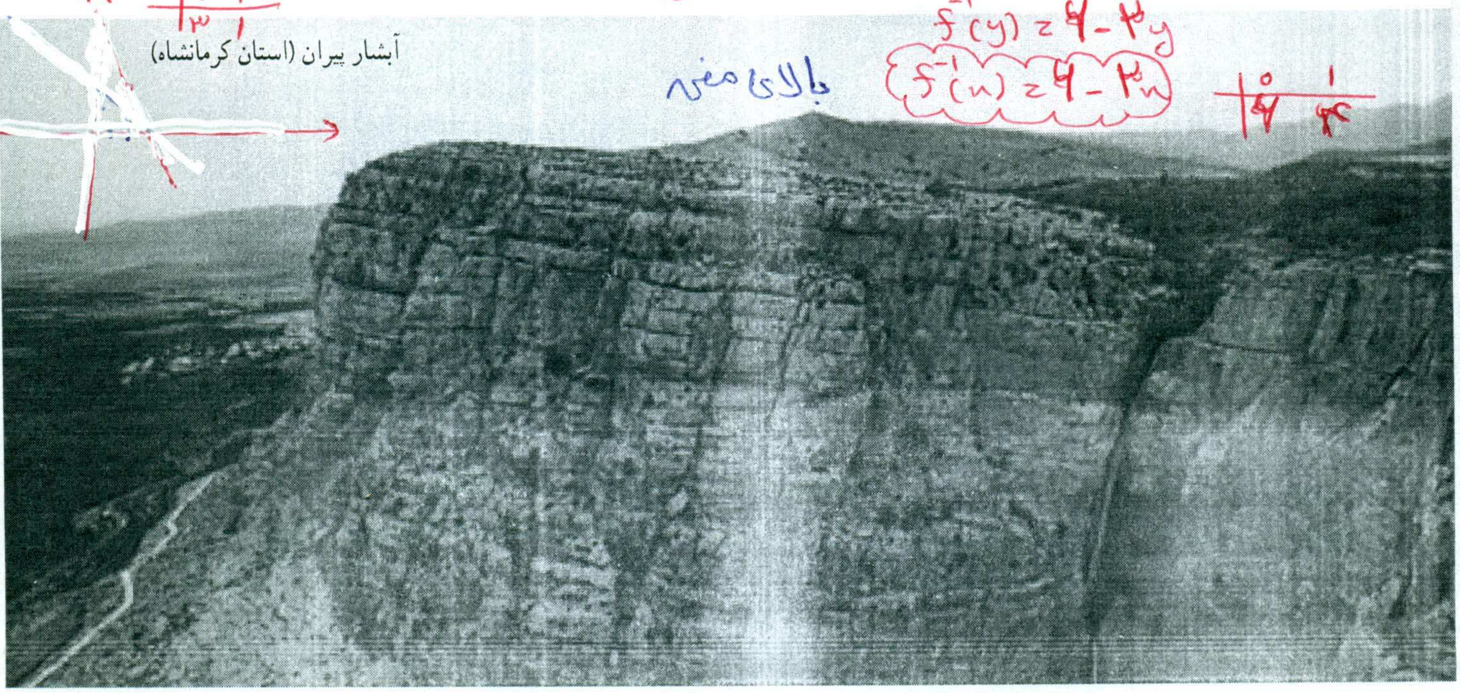
$f^{-1}(x)=۶-۲x$

بالای صفحه

۱	۰	۲
۲	۳	۱

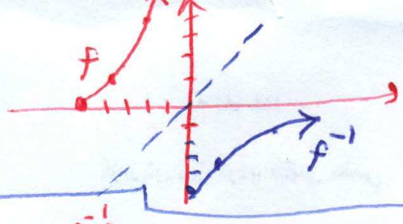
۶	۰
۰	۳

آبشار پیران (استان کرمانشاه)



الف) $f(x)=(x+5)^2$

-5	-4	-3
0	1	4



$y=(x+5)^2$

$y^2=x+5$

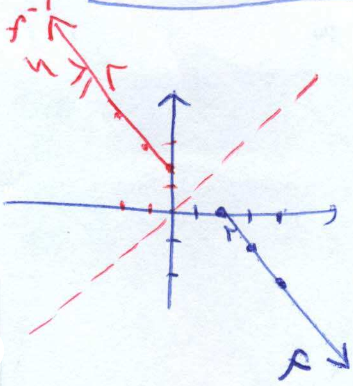
$y^2-5=x$

$f^{-1}(y)=y^2-5$

$f^{-1}(x)=x^2-5$

ب) $f(x)=-|x-1|+1$

2	3	4
0	-1	-2



$y=-|x-1|+1$

$y-1=-|x-1|$

$1-y=|x-1|$

$1-y=x-1$

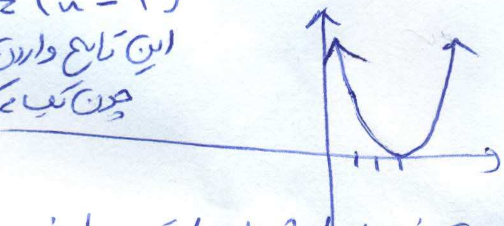
$2-y=x$

$f^{-1}(y)=2-y$

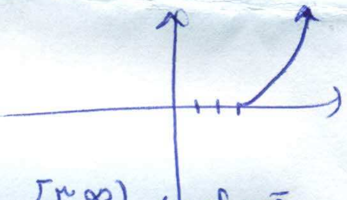
$f^{-1}(x)=2-x$

ج) $f(x)=(x-3)^2$

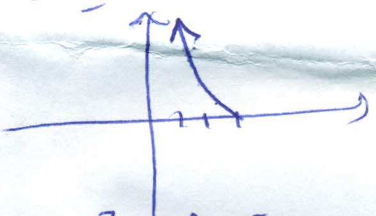
این تابع وارون پذیر نمی باشد
چون یک به یک نیست



این نمودار وارون پذیر نمی باشد ولی با تحدید دامنه



تحدید f روی $[3,\infty)$
وارون پذیر

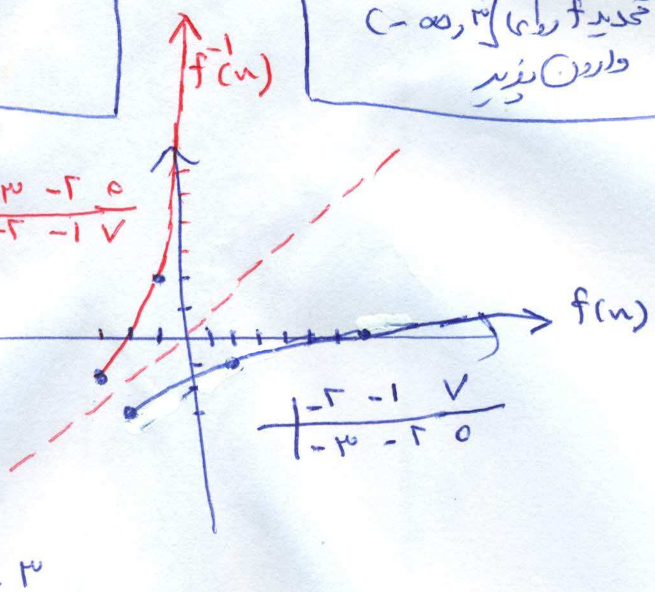


تحدید f روی $(-\infty,3]$
وارون پذیر

ت) $f(x)=\sqrt{x+2}-3$

-3	-2	0
-2	-1	7

تابع یک به یک و وارون پذیر
می باشد



-2	-1	7
-3	-2	0

$y=\sqrt{x+2}-3$

$y+3=\sqrt{x+2} \rightarrow (y+3)^2=x+2 \quad x=(y+3)^2-2$

$f^{-1}(y)=(y+3)^2-2$

$f^{-1}(x)=(x+3)^2-2$

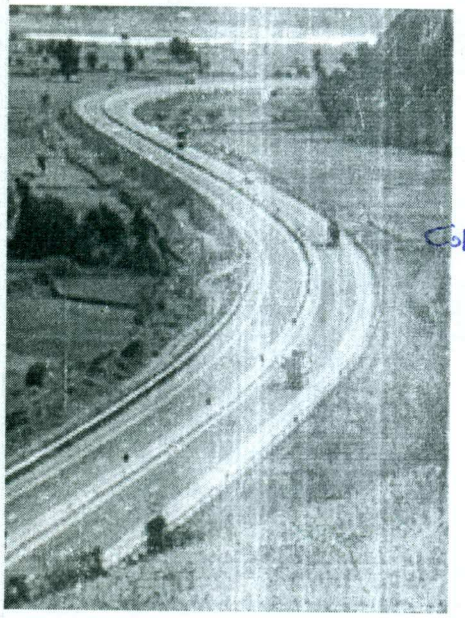
درس ۴

همان‌گونه که عمل‌های جمع و ضرب در مورد دو عدد یا دو چندجمله‌ای انجام‌پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است. در فعالیت زیر مثالی واقعی از این موضوع بررسی می‌شود.

فاصله زمانی لحظه‌ای که راننده با یک مانع روبه‌رو می‌شود **تا لحظه فشار دادن پدال ترمز را «زمان عکس‌العمل»** می‌نامند.

فرض کنید اتومبیلی با سرعت ثابت در بزرگراهی درحال حرکت است. اگر اتومبیل با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس‌العمل» طی می‌کند از تابع $f(x)=\frac{7}{10}x$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است.

همچنین مسافتی که اتومبیل پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می‌کند از تابع $g(x)=\frac{1}{100}x^2$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است و x سرعت اتومبیل برحسب کیلومتر بر ساعت است.



الف) اگر اتومبیلی با سرعت ۱۰۰ کیلومتر برساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل چه مسافتی طی می‌شود؟

مسافت زمان عکس‌العمل + مسافت طی شده پس از فشار دادن پدال $= f(x)+g(x)$

ب) اگر سرعت اتومبیل x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی بنویسید که مسافت طی شده توسط اتومبیل پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x)$ نمایش دهید.

$h(x)=f(x)+g(x)$

مجموع فاصلهٔ طی شده در طول زمان عکس‌العمل و فاصله طی شده پس از ترمز کردن را «فاصله دید توقف[1]» می‌نامند. این فاصله در طراحی جاده‌ها و بزرگراه‌ها کاربرد دارد.

پ) اگر این اتومبیل پس از پیمودن ۶۰ متر متوقف شود، با چه سرعتی درحال حرکت بوده است؟

$60=\frac{7}{10}x+\frac{1}{100}x^2$

$6000=70x+x^2 \rightarrow x^2+70x-6000=0$

$\Delta=4900+24000=28900$

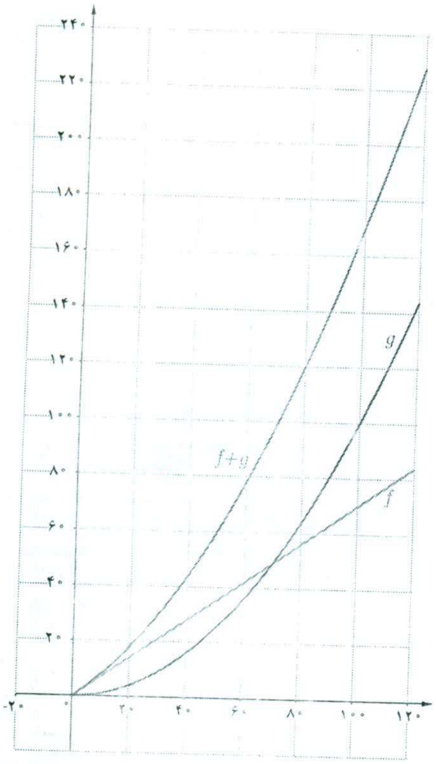
$x_1=\frac{-70+\sqrt{28900}}{2}\simeq\frac{-70+170}{2}=50\ m/s$

$x_2=\frac{-70-\sqrt{28900}}{2}\simeq\frac{-70-170}{2}=-120\ m/s$

۱ــ برای تعیین فاصله دید توقف، فاصله عکس‌العمل ترمز مبتنی بر زمان ۲/۵ ثانیه و شتاب کاهنده ۳/۴ متر بر مجذور ثانیه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر f و g دو تابع باشند، $f+g$ تابعی است که دامنهٔ آن مجموعهٔ $D_f \cap D_g$ است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$$



در فعالیت قبل دامنه f و دامنه g در حالت کلی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است، ولی در این مسئلهٔ واقعی دامنهٔ تابع مجموعه‌ای مانند $[0,120]$ است. بنابراین دامنه $f+g$ نیز چنین است.

نمودارهای سه تابع f، g و $f+g$، فعالیت قبل، در شکل روبه‌رو رسم شده است.

رابطه بین این توابع را به کمک نمودار آنها توضیح دهید.

کار در کلاس

$(f+g)(x) = x + 2 + \sqrt{x-1}$

۱ اگر $f(x) = x + 2$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$، $f+g$ را محاسبه کنید. دامنهٔ تابع $f+g$ را به‌دست آورید.

$D_{f+g} = R \cap [1,\infty) = [1,\infty)$

۲ اگر $f = \{(1,2),(-2,5),(0,7)\}$ و $g = \{(1,5),(2,4),(0,-1)\}$

ابتدا دامنهٔ $f+g$ را به‌دست آورید و سپس $f+g$ را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

$D_{f+g} = \{0,1\}$ $\quad f+g = \{(0,6)(1,7)\}$

به‌طور کلی اگر f و g دو تابع باشند توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f.g)(x) = f(x) . g(x) \qquad D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x+2}$ و $g(x)=\sqrt{3-x}$ و $h(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ توابع $f+g$ ، $g-h$ ، gh و $\frac{f}{g}$ را محاسبه کنید و دامنهٔ آنها را به‌دست آورید. کدام‌یک از مقادیر $(f+g)(2)$ و $(f+g)(5)$ وجود دارند؟

حل : ابتدا دامنه هریک از توابع را به‌دست می‌آوریم :

$D_f=[-2,\infty)$ $\qquad D_g=(-\infty,3]$ $\qquad D_h=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$(f+g)(2)=3$ ولی $(f+g)(5)$ وجود ندارد.

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-2,3]$ $\qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}$

$D_{g.h}=D_g\cap D_h=(-\infty,3]$ $\qquad (g.h)(x)=g(x)h(x)=(\sqrt{3-x})(\frac{x+2}{2x+1})$

$D_{g-h}=D_g\cap D_h=(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},3]$ $\qquad (g-h)(x)=g(x)-h(x)=\sqrt{3-x}-\frac{x+2}{2x+1}$

$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=0\}=[-2,3]-\{3\}$ $\qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$

$x_2\ y_2$
$(0,-1)$ $\quad m=\frac{-1-0}{0-(-2)}=-\frac{1}{2}$
$(-2,0)$
$x_1\ y_1$

فعالیت

$D_f=[-4,5]$ $\qquad f(x)=3$

$D_g=[-4,5]$ $\qquad g(x)\Rightarrow g=-\frac{1}{2}(x+2)$

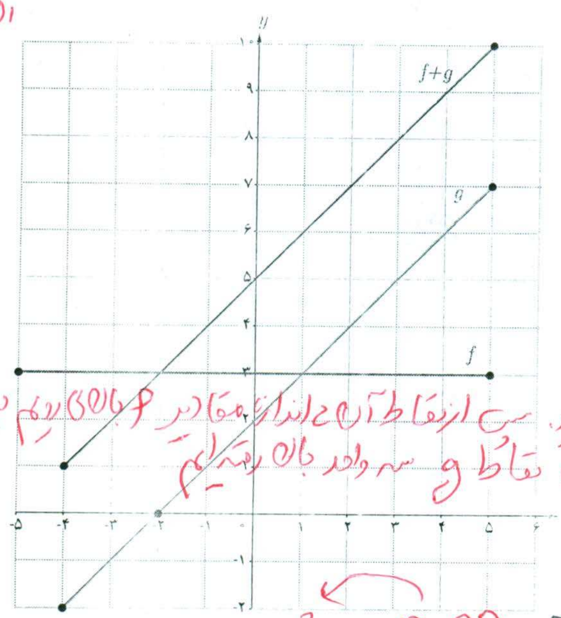
ــ در شکل روبه‌رو نمودارهای دو تابع f و g داده شده‌اند.

الف) دامنه f و دامنه g و ضابطه‌های f و g را بنویسید.

ب) دامنه و ضابطه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

پ) نمودار $f+g$ در شکل رسم شده است. توضیح دهید چگونه این نمودار را رسم کرده‌ایم. ابتدا تابع g را رسم کردیم سپس نقاط g را سه واحد بالا برده‌ایم

ت) توضیح دهید بقیه نمودارهای توابع داده شده در قسمت (ب) را چگونه می‌توان رسم کرد.



نمودار f را رسم کردیم سپس از نقاط آن به اندازه مقادیر g در ...

$f(x)+g(x)=-\frac{1}{2}x-1+3=-\frac{1}{2}x+2$

$f(x)-g(x)=-\frac{1}{2}x-1-3=-\frac{1}{2}x-4$

$f(x)\times g(x)=3(-\frac{1}{2}x-1)$

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3}{-\frac{1}{2}x-1}$

$D_f\cap D_g=[-4,5]$

$D_{f+g}=[-4,5]$

$D_{f-g}=[-4,5]$

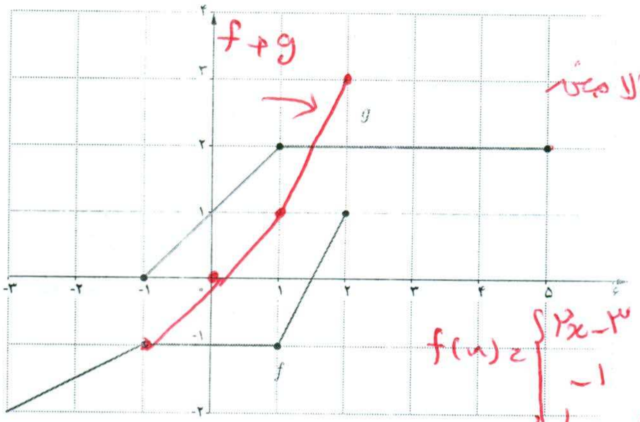
$D_{f.g}=[-4,5]$

$D_{\frac{f}{g}}=[-4,5]-\{-2\}$ $\qquad (D_f\cap D_g)-\{x\,|\,g(x)=0\}$

$(f+g)(1) = f(1)+g(1) = -1+2 = 1$

$(f+g)(-1) = f(-1)+g(-1) = -1+0 = -1$

کار در کلاس



نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به‌دست آورید. بالا صفحه

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع g ، f و $f+g$ را به‌دست آورید.

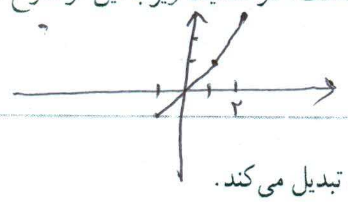
ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.

$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & 1 \leq x \leq 2 \\ -1 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ x+1 & -1 \leq x < 1 \end{cases}$

$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x-1 & 1 \leq x \leq 2 \\ x & -1 \leq x < 1 \end{cases}$

ترکیب توابع

با داشتن دو تابع f و g به شیوه‌ای دیگر هم می‌توان تابع جدیدی ساخت. در فعالیت زیر با این موضوع آشنا می‌شویم.



نمودار به کمک ضابطه

دقیقا نمودار صحیح با کمک نمودارها با نمودار ضابطه $f+g$ یکی می‌شود

فعالیت

تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x-32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

الف) $f(32) = 0$ به چه معنی است؟ ۵۰ درجهٔ فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟ $f(50) = \frac{5}{9}(50-32) = 10 C°$

یعنی ۳۲ درجه فارنهایت صفر درجه سانتی‌گراد می‌شود

ب) تابع $g(x) = x + 273$ درجه سانتی‌گراد را به درجهٔ کلوین تبدیل می‌کند. $g(0) = 273$ به چه معنی است؟ یعنی ۰ درجه سانتی‌گراد برابر ۲۷۳ درجه کلوین می‌باشد

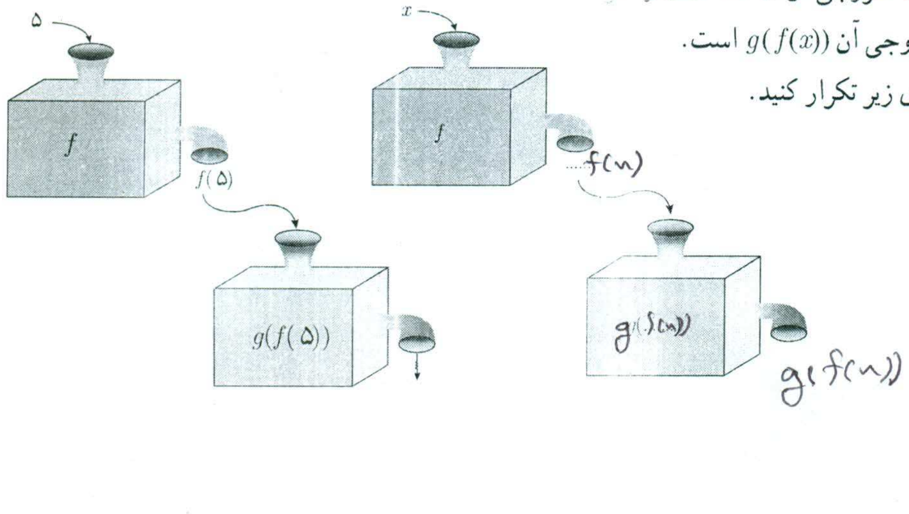
پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین درنظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی‌گراد و دیگری سانتی‌گراد را به کلوین تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که ۵ درجهٔ فارنهایت معادل چند درجهٔ کلوین است؟

$f(5) = -15°$

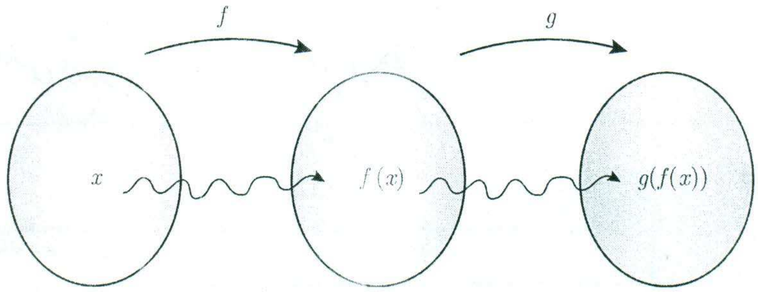
$g(f(5)) = g(-15°)$

ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن $f(x)$ است و اگر $f(x)$ ورودی تابع g، باشد خروجی آن $g(f(x))$ است.

ث) ت را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.



نمودارهای صفحه قبل را به‌صورت زیر هم می‌توان نمایش داد :



اما $g(f(x))$ را چگونه می‌توان محاسبه کرد؟ داریم :

$$g(f(x)) = g(\frac{۵}{۹}(x-۳۲))$$

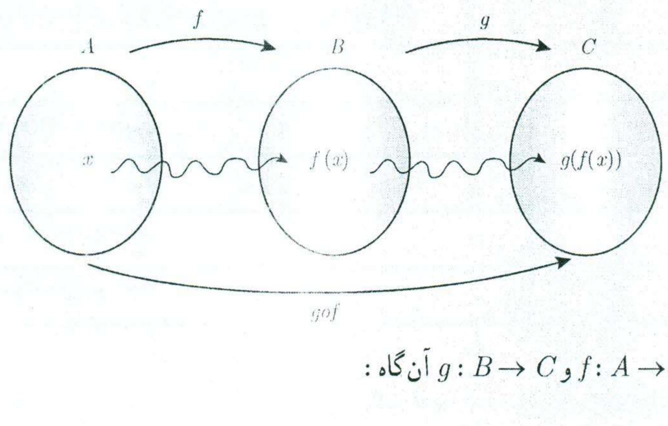
و می‌دانیم تابع g به هر ورودی ۲۷۳ واحد اضافه می‌کند. پس :

$$g(f(x)) = \frac{۵}{۹}(x-۳۲)+۲۷۳$$

این یک تابع جدید است که درجه فارنهایت را به کلوین تبدیل می‌کند و به دلیل شیوهٔ محاسبه آن با gof (بخوانید جی‌اواف) نمایش داده می‌شود. در حقیقت gof نیز همانند ماشینی عمل می‌کند که ورودی x را به $g(f(x))$ تبدیل می‌کند.

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با gof نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم : به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند :

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



به عبارت دیگر اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ آن‌گاه :

$$gof: A \to C$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) \qquad D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به‌طور مشابه ترکیب f با g یعنی fog را می‌توان تعریف کرد.

$D_f = R \quad D_g = R$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in R \mid ۲x + ۳ \in R\} = R$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid x^۲ + ۱ \in R\} = R$

کار در کلاس

$gof(x) = ۲(x^۲ + ۱) + ۳ = ۲x^۲ + ۵$

$fog(x) = (۲x + ۳)^۲ + ۱ = ۴x^۲ + ۱۲x + ۱۰$

اگر $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = ۲x + ۳$

الف) دامنه و ضابطه تابع‌های fog و gof را به‌دست آورید.

ب) آیا تابع‌های gof و fog مساوی‌اند؟ خیر چون $D_f = D_g$ ولی $f(x) \neq g(x)$ $\forall x$

❖ مثال : اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x - ۱}$ و $g(x) = x^۲ + ۳$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

حل : داریم،

$$D_g = \mathbb{R} \text{ و } D_f = [۱,\infty)$$

$$(fog)(x) = f(x^۲ + ۳) = \sqrt{x^۲ + ۳ - ۱} = \sqrt{x^۲ + ۲}$$

$$D_{fog} = \left\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [۱,\infty)\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ + ۳ \geq ۱\right\} = \left\{x \mid x^۲ \geq -۲\right\} = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \left\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in [۱,\infty) \mid \sqrt{x - ۱} \in \mathbb{R}\right\} = [۱,\infty)$$

$$(gof)(x) = g(\sqrt{x - ۱}) = (\sqrt{x - ۱})^۲ + ۳$$

توجه کنید که gof برای اعداد کمتر از ۱ تعریف نشده است. به‌طور مثال $(gof)(\frac{۱}{۲})$ یا $(gof)(۰)$ معنی ندارد. با این شرط $(gof)(x)$ را به‌صورت زیر هم می‌توان نمایش داد :

$$(gof)(x) = x - ۱ + ۳$$

$$(gof)(x) = x + ۲ \quad x \in [۱,\infty)$$

کار در کلاس

اگر $f = \{(۱۱,۷), (-۲,۴), (۳,-۵), (۲,-۵)\}$ و $g = \{(۲,۱۱), (۴,-۲), (۶,۳), (۳,۲)\}$ ، ابتدا D_{fog} و D_{gof} و سپس توابع fog و gof را محاسبه کنید.

$D_{fog} = \{۲, ۴, ۶, ۳\}$ $\quad$ $fog(x) = \{(۲,۷)(۴,۴)(۶,-۵)(۳,-۵)\}$

$D_{gof} = \{-۲\}$ $\quad$ $gof(x) = \{(-۲,-۲)\}$

$\frac{f}{g}(x) = \frac{4x}{2-x}$ $(D_f \cap D_g) - \{x | g(x)=0\} = R - \{2\}$ 1

$(f-g)(x) = 4x-(2-x) = 5x-2$ $D_{f-g} = D_f \cap D_g = R$

$fog(x) = 4(2-x) = 8-4x$ $D_{fog} = \{x\in D_g | g\in D_f\} = \{x\in R | 2-x \in R\} = R$

$fog(x) = \frac{1}{\frac{4}{x}-3} = \frac{1}{\frac{4-3x}{x}} = \frac{x}{4-3x}$ $D_{fog} = \{x\in D_g | g\in D_f\} = \{x \in R-\{0\} | \frac{4}{x} \in R-\{3\}\}$ 2

$\frac{4}{x}\neq 3$ $x\neq \frac{4}{3}$

$\to D_{fog} = R - \{0, \frac{4}{3}\}$

تمرین

۱ اگر $f(x)=4x$ و $g(x)=2-x$، توابع $\frac{f}{g}$، $f-g$ و fog را به همراه دامنهٔ آنها به‌دست آورید. بالای صفحه

۲ برای دو تابع $f(x)=\frac{1}{x-3}$ و $g(x)=\frac{4}{x}$ تابع fog و دامنهٔ آن را به‌دست آورید. بالای صفحه

۳ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$fog(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$

الف) اگر $g(4)=7$ و $f(7)=5$ آن‌گاه $(fog)(4)=35$ ← درست

$\frac{f}{g}(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{6}{6} = 1$

ب) اگر $f(x)=x+4$ و $g(x)=3x$ آن‌گاه $(\frac{f}{g})(2)=1$ ← درست

$fog(5) = f(g(5)) = f(9) = 3 = g(2)$ درست

پ) اگر $g(x)=2x-1$ و $f(x)=\sqrt{x}$ آن‌گاه $(fog)(5)=g(2)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $fog=gof$ نادرست

$fog(x) = (\sqrt{x^2-4})^2 - 4 = x^2-8$ نادرست

ث) اگر $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=\sqrt{x^2-4}$، آن‌گاه $(fog)(5)=-25$ و $(fog)(x)=-x^2$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg=gf$ درست

۴ فرض کنیم $\begin{cases} g:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ g(n)=2n\end{cases}$ و $f: A\to\mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f=\{(1,2),(2,3),(3,5),(4,7)\}$ که در آن: $A=\{1,2,3,4\}$، توابع $f+g$ و gof را به‌دست آورید.

$(f+g)(x) = \{(1,4)(2,7)(3,11)(4,15)\}$

$gof(x) = \{(1,4)(2,6)(3,10)(4,14)\}$

۵ اگر $f=\{(-4,13),(-1,7),(0,5),(\frac{5}{2},0),(3,-5)\}$ و $g=\{(-4,-7),(-2,-5),(0,-3),(3,0),(5,2),(9,6)\}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

$(f+g)(x) = \{(-4,6)(0,2)(3,-5)\}$

$(f-g)(x) = \{(-4,20)(0,8)(3,-5)\}$

$\frac{f}{g}(x) = \{(-4,-\frac{13}{7})(0,-\frac{5}{3})\}$

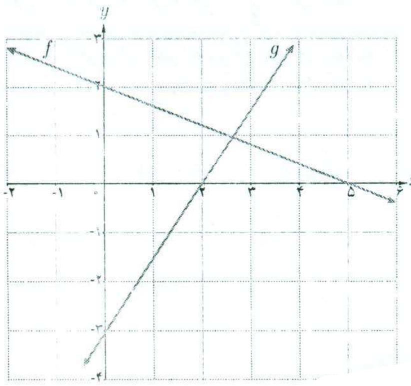
۶ اگر $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ و $g(x)=\sqrt{4-x^2}$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید. صفحه بعد

۷ اگر $f(x)=x^2-9$ و $g(x)=x+3$، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

دامنه تقسیم قبل از ساده شدن محاسبه می شود

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3 \ , \ D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$

۸ اگر $f(x)=2x+5$، $f^{-1}(x)$، fof^{-1} و $f^{-1}of$ را به‌دست آورید.



۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.

$D_f = R$ $\quad$ $4 - x^2 \geq 0$ ، $\quad D_g = [-2, 2]$ $\quad$ 7

$fog(x) = \sqrt{(\sqrt{4-x^2})^2 + 5} = \sqrt{9 - x^2}$

$D_{fog(x)} = \{x \in D_g \mid g \in D_f\} = \{x \in [-2, 2] \mid \sqrt{4 - x^2} \in R\} = [-2, 2]$

$gof(x) = \sqrt{4 - (\sqrt{x^2+5})^2} = \sqrt{4 - x^2 - 5} = \sqrt{-x^2 - 1}$

$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f \in D_g\} = \{x \in R \mid \sqrt{x^2+5} \in [-2, 2]\} = \emptyset$

چون اگر $-2 \leq \sqrt{x^2+5} \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq x^2 + 5 \leq 4$ که درست نمی‌باشد

8

$f(x) = 2x + 5$ $\qquad$ $y = 2x + 5 \to y - 5 = 2x$

$x = \frac{y-5}{2}$ $\qquad$ $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$

$fof^{-1} = 2\left(\frac{x-5}{2}\right) + 5 = x - 5 + 5 = x$

$f^{-1}of = \frac{(2x+5) - 5}{2} = x$

9

$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \quad m = \frac{-2}{5} \quad y - 2 = -\frac{2}{5}x \quad y = -\frac{2}{5}x + 2$

ضابطه f

$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \quad m = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \quad y - 0 = \frac{3}{2}(x - 2) \quad y = \frac{3}{2}x - 3$

ضابطه g

$(f+g)(x) = -\frac{2}{5}x + 2 + \frac{3}{2}x - 3 = \frac{11}{10}x - 1$

$(f-g)(x) = -\frac{2}{5}x + 2 - \frac{3}{2}x + 3 = \frac{-11}{10}x + 5$

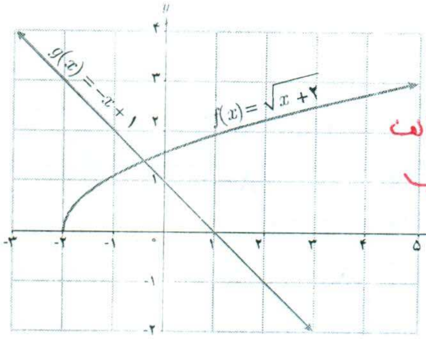
$(f \times g)(x) = \left(-\frac{2}{5}x + 2\right)\left(\frac{3}{2}x - 3\right)$

$y=ax+b \quad \frac{y-b}{a}=x \quad f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ -۱۱

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۲)$ ب) $(f+g)(-۳)$ پ) $(fg)(\frac{۱}{۲})$

ت) $(fog)(-۴)$ ث) $(\frac{f}{g})(۰)$ ج) $(gof)(-۱)$



الف) $f(۲)+g(۲)=۲-۱=۱$

ب) $f(-۳)+g(-۳)=$ تعریف نشده وجود ندارد

پ) $f(\frac{۱}{۲})\times g(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۵}{۲}}$

ت) $f(g(-۴))=f(۵)=\sqrt{۷}$

ث) $\frac{f(۰)}{g(۰)}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}$

ج) $g(f(-۱))=g(۱)=۰$

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y=ax+b$ $(a\neq ۰)$ باز هم یک تابع خطی است. بالای صفحه

۱۲ تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

$\frac{۹}{۵}F=x-۳۲ \Rightarrow x=\frac{۹}{۵}F+۳۲$

$g(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزهٔ خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به‌چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دوکتاب را برحسب شماره چاپ نمایش دهند.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شدهٔ هر دو کتاب را نمایش دهد. صفحه بعد

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

$$f(n)=\begin{cases} ۱۰۰۰۰ & n=1 \\ ۷۰۰۰ & n>1 \end{cases}$$

$$g(n)=\begin{cases} ۲۰۰۰۰ & n=1 \\ ۹۰۰۰ & n>1 \end{cases}$$

$$f(n)+g(n)=\begin{cases} ۳۰۰۰۰ & n=1 \\ ۱۶۰۰۰ & n>1 \end{cases}$$