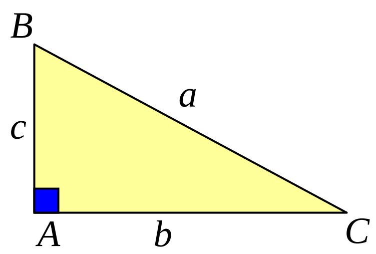
درس اوّل : نسبت های مثلثاتی

مثلثات شاخه ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می پردازد. یکی از اهداف این علم ، اندازه گیری فاصله ها به صورت غیر مستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی ، فیزیک ، نقشه برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد.

قسمت اوّل : تعریف نسبت های مثلثاتی یک زاویه‌ی حاده در مثلث قائم الزاویه

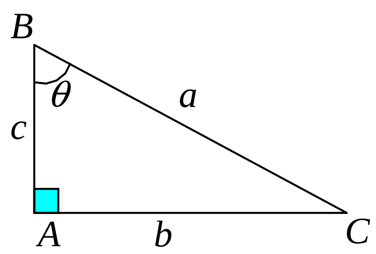
هر مثلث که یک زاویه‌ی قائمه داشته باشد، را مثلث قائم الزاویه می نامند. در هر مثلث قائم الزاویه ، ضلع روبرو به زاویه‌ی قائمه را وتر می گویند.



در هر مثلث قائم الزاویه، مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است. (رابطه ی فیثاغورس)

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲}$$

برای هر زاویه‌ی حاده در مثلث قائم الزاویه نسبت های مثلثاتی زیر را می توان بدین ترتیب تعریف کرد.



سینوس هر زاویه‌ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه‌ی ضلع مقابل زاویه براندازه‌ی وتر برابر است.

$$\sin\theta = \frac{b}{a} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

کسینوس هر زاویه‌ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه‌ی ضلع مجاور زاویه براندازه‌ی وتر برابر است.

$$\cos\theta = \frac{c}{a} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$$

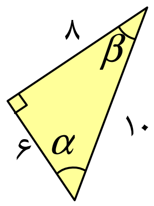
تانژانت هر زاویه‌ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه‌ی ضلع مقابل زاویه بر اندازه‌ی ضلع مجاور آن برابر است.

$$\tan\theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

کتانژانت هر زاویه‌ی حاده در مثلث قائم الزاویه با نسبت اندازه‌ی ضلع مجاور زاویه بر اندازه‌ی ضلع مقابل آن برابر است.

$$\cot\theta = \frac{c}{b} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$$

تمرین ۱ : با توجه به شکل مقابل تساوی های زیر را کامل کنید.



۱) $\sin\alpha =$

۲) $\cos\alpha =$

۳) $\tan\beta =$

۴) $\tan\alpha =$

۵) $\cos\beta =$

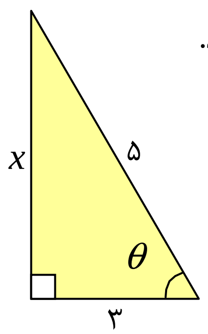
۶) $\cot\beta =$

۷) $\sin\beta =$

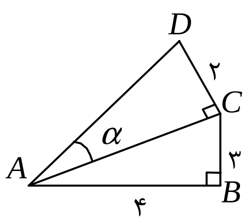
۸) $\cot\alpha =$

نتیجه : اگر دو زاویه متمم یکدیگر باشند، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و همچنین تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. (چرا؟)

تمرین ۲ : با توجه به شکل مقابل ، نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی θ را به دست آورید.



تمرین ۳ : در شکل مقابل مقدار $\tan\alpha$ را بدست آورید.



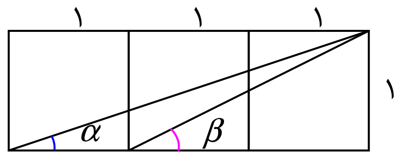
تمرین ۴ : ثابت کنید که سینوس و کسینوس هر زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم الزاویه ، همواره از یک کوچکترند.

تمرین۵ : در تساوی های زیر جای خالی را کامل کنید.

الف) $\sin(۲۳^\circ) = \cos(.....)$ ب) $\tan(.....) = \cot(۵۶^\circ)$

تمرین برای حل :

۶ : در شکل مقابل سه مربع به ضلع یک کنار هم قرار گرفته اند.حاصل $\tan\alpha + \tan\beta$ را به دست آورید.



۷ : اگر x یک زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم الزاویه باشد و رابطه‌ی $\frac{\sin(۳۹^\circ)}{\cos x} = ۱$ در آن برقرار باشد.

مقدار x کدام است؟

۱) ۳۹° ۲) ۴۹° ۳) ۵۱° ۴) ۶۱°

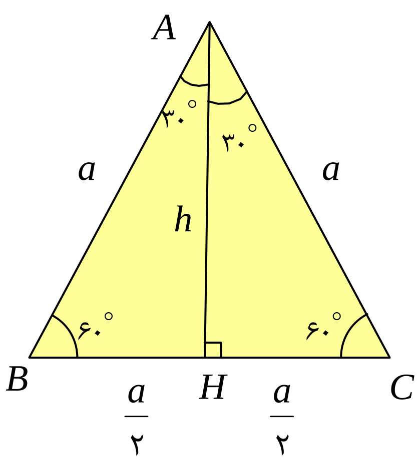
***

قسمت دوّم : محاسبه‌ی مقادیر نسبت های زاویه های مهم

در ادامه می خواهیم مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های مهم را محاسبه کنیم.

الف : محاسبه‌ی مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های ۳۰ و ۶۰ درجه

می دانیم که در هر مثلث متساوی الاضلاع نیمساز هر زاویه و ارتفاع و میانه‌ی ضلع نظیر بر هم منطبق هستند. لذا برای مثلث متساوی الاضلاع مقابل می توان نوشت:



$$\Delta(ABH): AH^۲ + BH^۲ = AB^۲ \to h^۲ + (\frac{a}{۲})^۲ = a^۲ \to h^۲ + \frac{a^۲}{۴} = a^۲$$

$$\rightarrow h^{۲}=a^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴}\rightarrow h^{۲}=\frac{۴a^{۲}-a^{۲}}{۴}\rightarrow h^{۲}=\frac{۳a^{۲}}{۴}\rightarrow h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

حال می توان نوشت:

$$\sin(۳۰)=\frac{BH}{AB}=\frac{\frac{a}{۲}}{a}=\frac{a}{۲a}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos(۳۰)=\frac{AH}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{a}=\frac{\sqrt{۳}a}{۲a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(۳۰)=\frac{BH}{AH}=\frac{\frac{a}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}=\frac{۲a}{۲\sqrt{۳}a}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot(۳۰)=\frac{AH}{BH}=\frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{\frac{a}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}a}{۲a}=\sqrt{۳}$$

همچنین :

$$\sin(۶۰)=\frac{AH}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{a}=\frac{\sqrt{۳}a}{۲a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

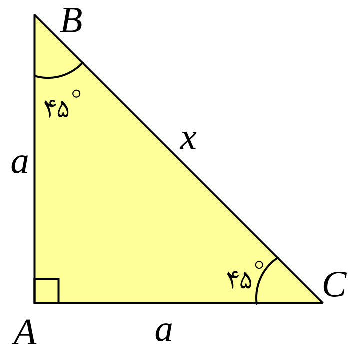
$$\cos(۶۰)=\frac{BH}{AB}=\frac{\frac{a}{۲}}{a}=\frac{a}{۲a}=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan(۶۰)=\frac{AH}{BH}=\frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{\frac{a}{۲}}=\frac{۲\sqrt{۳}a}{۲a}=\sqrt{۳}$$

$$\cot(۶۰)=\frac{BH}{AH}=\frac{\frac{a}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}=\frac{۲a}{۲\sqrt{۳}a}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

ب : محاسبه‌ی مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۴۵ درجه

می دانیم که در هر مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین، اندازه‌ی دو زاویه‌ی مجاور به قاعده برابر ۴۵ درجه است. بـر ایـن اسـاس مـی توان نوشت :



$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} \to x^{۲} = a^{۲} + a^{۲} \to x^{۲} = ۲a^{۲} \to x = \sqrt{۲}a$$

حال می توان نوشت:

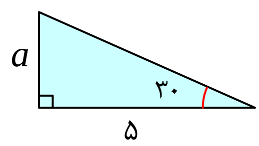
$$\sin(۴۵) = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{۲}a} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos(۴۵) = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{۲}a} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan(۴۵) = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = ۱$$

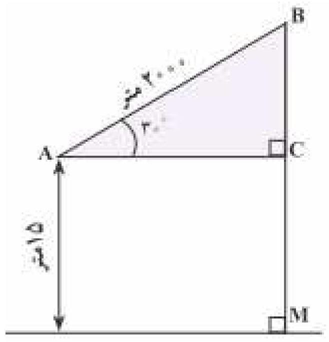
$$\cot(۴۵) = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a} = ۱$$

تمرین۸ : با توجه به شکل مقابل مقدار a را تعیین کنید.



تمرین۹ : یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه‌ی ۳۰ درجه پرتاب می شود. تعیین کنید. پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟

حل : ابتدا برای مسئله‌ی داده شده یک شکل هندسی ترسیم می کنیم. سـپس بـه کمـک آن مـدل ریاضـی ساخته و مسئله را حل می کنیم.

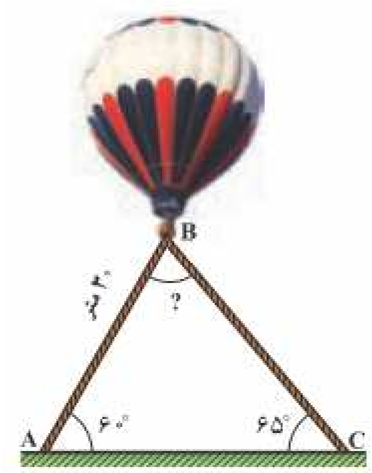


$$\Delta(ABC):\sin(۳۰)=\frac{BC}{AB}\rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{BC}{۲۰۰۰}\rightarrow BC=\frac{۱\times۲۰۰۰}{۲}=۱۰۰۰\quad m$$

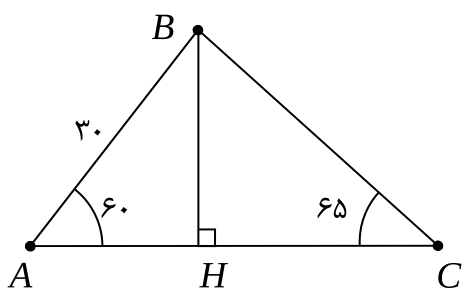
لذا ارتفاع موشک می شود :

$$BM=BC+CM=۱۰۰۰+۱۵=۱۰۱۵\ m$$

تمرین ۱۰ : بالنی با دو طناب به شکل زیر به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب ها ۳۰ متر است. طول تقریبی طناب دوّم را به دست آورید. $(\sin(۶۵^\circ)=۰/۹)$



حل : ابتدا ارتفاع BH را رسم می کنیم.



$$\Delta(ABH):\sin(۶۰)=\frac{BH}{AB}$$

$$\xrightarrow{\sin(۶۰)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۳۰}\rightarrow BH=\frac{۳۰\sqrt{۳}}{۲}=۱۵\sqrt{۳}$$

$$\Delta(CBH):\sin(۶۵)=\frac{BH}{BC}\xrightarrow{\sin(۶۵)=۰/۹}\frac{۹}{۱۰}=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{BC}\rightarrow BC=\frac{۱۵۰\sqrt{۳}}{۹}=\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳}$$

تمرین ۱۱ : حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

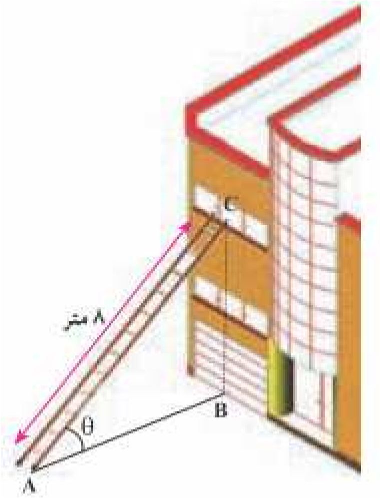
$$A = ۲\sin(۳۰^\circ) + \frac{۱}{۲}\tan(۴۵^\circ) + \cos^۲(۴۵^\circ)$$

تمرین برای حل :

۱۲ : مطابق شکل زیر ، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره‌ی ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه‌ی نردبان با سطح زمین ۳۰ درجه باشد.

الف : ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید.

ب : فاصله‌ی پای نردبان تا ساختمان را تعیین کنید.



۱۳ : نسرین می خواهد ارتفاع یک تیر برق که طول سایه‌ی آن ۳ متر است را حساب کند. او طوری ایستاد که انتهای سایه‌ی او بر انتهای سایه‌ی تیر برق منطبق شود. اگر قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایه‌ی او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

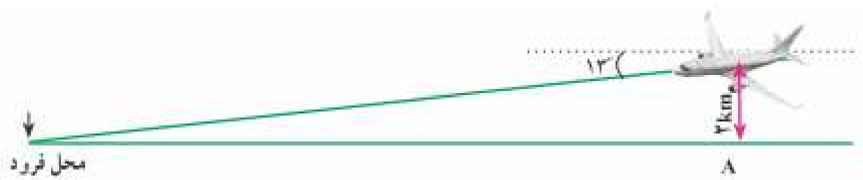
۱۴ : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(۶۰^\circ)\cos(۳۰^\circ) + \sin(۳۰^\circ)\cos(۶۰^\circ)$

ب) $\tan(۴۵^\circ) + ۳\cos(۳۰^\circ) - ۲\sin(۳۰^\circ)$

۱۵ : یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه‌ی هواپیما با افق حدود ۱۳ درجه باشد. حساب کنید هواپیما در چه فاصله ای از نقطه‌ی A فرود می آید؟

$(\tan(۱۳^\circ) = ۰/۲۳)$

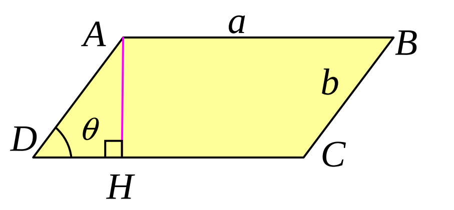


قسمت سوّم : کاربرد نسبت های مثلثاتی در محاسبه‌ی مساحت

گاهی می توان به کمک نسبت های مثلثاتی مساحت مثلث یا متوازی الاضلاع را محاسبه نمود. بـه تمـرین های بعد توجه نمایید.

تمرین ۱۶ : ثابت کنید که مساحت هر متوازی الاضلاع برابر حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع است.

حل :



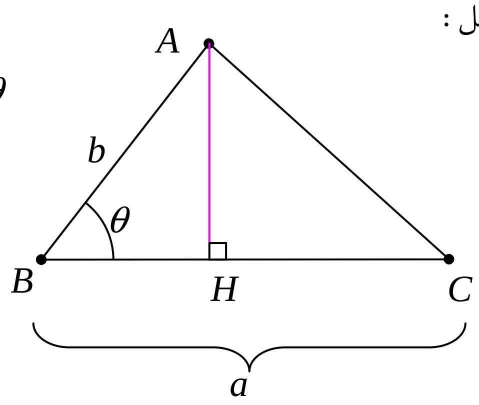
$$\Delta(ADH):\sin\theta=\frac{AH}{AD}\rightarrow AH=AD\times\sin\theta$$

$$S=DC\times AH=(DC)\times(AD\times\sin\theta)=DC\times AD\times\sin\theta$$

$$\Rightarrow S=ab\sin\theta$$

تمرین ۱۷ : ثابت کنید که مساحت هر مثلث برابر نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه‌ی بـین آن دو ضلع است.

حل :



$$\Delta(ABH):\sin\theta=\frac{AH}{AB}\rightarrow AH=AB\times\sin\theta$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times BC\times AH=\frac{۱}{۲}BC\times AB\times\sin\theta$$

$$\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}ab\sin\theta$$

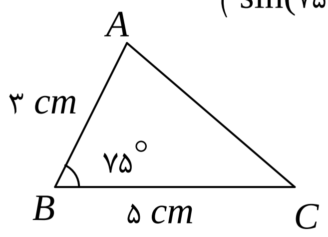
تمرین ۱۸ : مساحت مثلثی را حساب کنید که اندازه‌ی دوضلع آن ۶ و ۸ سانتی متر بوده و زاویه‌ی بین آنهـا ۵۰ درجه باشد. ($\sin(۵۰^\circ)=۰/۷۶$)

تمرین ۱۹ : باغی به شکل ذوزنقه وجود دارد که طول های اضلاع موازی آن۳۰۰۰ و ۲۰۰۰ متر و دو ضـلع دیگر هر یک ۱۰۰۰ متر است. اگر یکی از زاویه های پایه ۶۰ درجه باشد. مساحت باغ را حساب کنید.

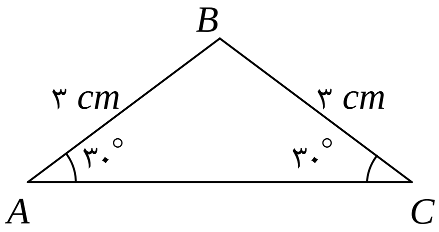
***

تمرین برای حل :

۲۰ : مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید. ($\sin(۷۵^\circ)=۰/۹۶$)



۲۱ : مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



۲۲ : یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a ، را در نظر بگیرید.

الف : ثابت کنید مساحت این مثلث برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

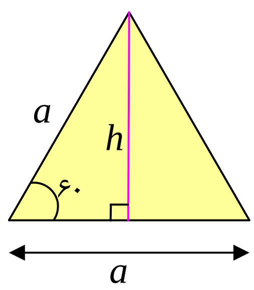
ب : ثابت کنید که اندازه‌ی ارتفاع مثلث برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$ است.

حل :

الف :

$$S=\frac{۱}{۲}(a)(a)\sin(۶۰)=\frac{۱}{۲}a^۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

ب :



$$S=\frac{۱}{۲}ah\rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲=\frac{۱}{۲}ah\rightarrow h=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

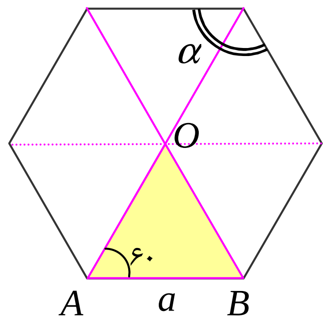
۲۳ : مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را حساب کنید که اندازه‌ی هر ضلع آن ۱۰ سانتی متر باشد.

۲۴ : مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a را حساب کنید.

حل : ابتدا اندازه‌ی هر زاویه‌ی شش ضلعی منتظم را تعیین می کنیم.

$$\alpha = \frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n} = \frac{(۶-۲)\times ۱۸۰}{۶} = ۱۲۰^\circ$$

از طرفی واضح است که بزرگترین قطر هر شش ضلعی منتظم محور تقارن است. لذا بزرگترین قطر ، نیمساز زاویه های نظیر آن است. پس با توجه به شکل زیر مثلث OAB دو زاویه‌ی ۶۰ درجه دارد، پس زاویه ی سوّم آن نیز ۶۰ درجه می باشد. چون مثلث OAB سه زاویه ی مساوی دارد، در نتیجه متساوی الاضلاع است.

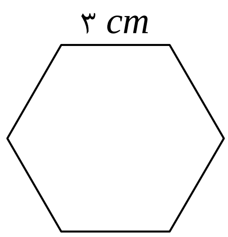


از این موضوع نتیجه می شود که هر شش ضلعی منتظم توسط قطرهای بزرگ آن به شش مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a تبدیل می شود.

بنابراین مساحت آن شش برابر مساحت یک مثلث می باشد.

$$S = ۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

۲۵ : مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.



❋❋❋

نتیجه :

الف : مساحت مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a ، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است.

ب : مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع a ، برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است.

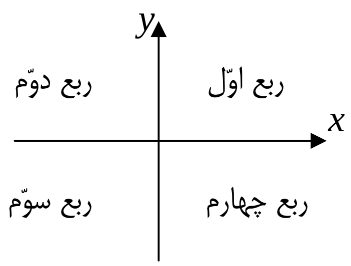
تهیه کننده : جابر عامری

درس دوّم : دایره ی مثلثاتی

در ادامه ی بحث مثلثات به معرفی نسبت های مثلثاتی در دایره‌ی مثلثاتی می پردازیم.

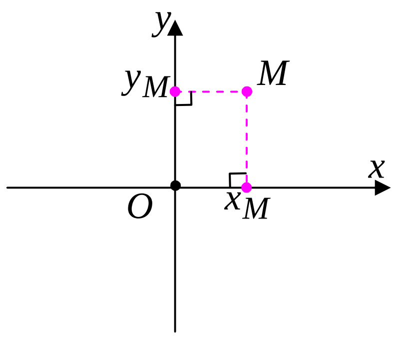
قسمت اوّل : رابطه‌ی بین مختصات نقطه و نسبت های مثلثاتی

به یاد دارید که صفحه‌ی محور های مختصات از دو محور عمود بر هم تشکیل می شود. محور افقی را محور طول ها و محور قائم را محور عرض ها می نامند. این دو محور صفحه را به چهار قسمت تبدیل می کنند، هر یک از این قسمت ها را یک ناحیه یا ربع می نامند. طبق قرار داد ، ربعی که در آن طول و عرض هر دو مثبت باشند را ربع اوّل می گویند و بقیه‌ی ربع ها را نیز برخلاف حرکت عقربه های ساعت نامگذاری می کننـد. در شکل زیر این چهار ناحیه را می توان مطابق شکل زیر مشاهده کرد.



بدیهی است که هر نقطه روی صفحه ، مانند M با دو عدد حقیقی مشخص می شـود. تـصویر نقطـه‌ی M روی محور طول ها را طول (x_M) و تصویر نقطه‌ی M روی محور عرض ها را عرض (y_M) می نامند.

$$M(x_M , y_M) \quad \text{یا} \quad M\left|\begin{matrix} x_M \\ y_M \end{matrix}\right. \quad \text{یا} \quad M = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix}$$



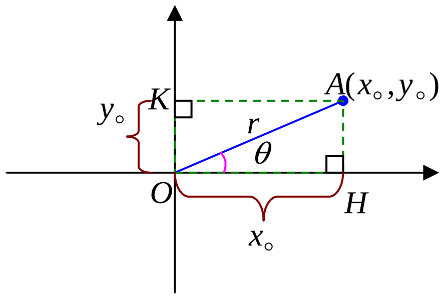
طول و عرض نقطه را مختصات نقطه می نامند. واضح است که :

الف : هر نقطه که روی محور طول ها قرار دارد، عرض آن صفر است و برعکس

ب : هر نقطه که روی محور عرض ها قرار دارد، طول آن صفر است و برعکس

ج : نقطه‌ی تقاطع دو محور که مبدأ مختصات نام دارد، طول و عرض آن صفر است.

با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی روی مثلث قائم الزاویه می توان تعریف می توان روابط زیر را نوشت.



با توجه به مثلث OAH داریم.

$$\cos\theta = \frac{OH}{OA} \rightarrow \cos\theta = \frac{x_\circ}{r} \qquad \sin\theta = \frac{AH}{OA} \rightarrow \sin\theta = \frac{y_\circ}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{AH}{OH} \rightarrow \tan\theta = \frac{y_\circ}{x_\circ} \qquad \cot\theta = \frac{OH}{AH} \rightarrow \cot\theta = \frac{x_\circ}{y_\circ}$$

همچنین :

$$x_\circ^{۲} + y_\circ^{۲} = r^{۲}$$

تمرین ۱ : اگر $A(۳,۴)$ نسبت های مثلثاتی زاویه ای که پاره خط OA با محور طول ها در جهت مثبت می سازد را بدست آورید.

حل :

$$x_\circ^{۲} + y_\circ^{۲} = r^{۲} \rightarrow r = \sqrt{x_\circ^{۲} + y_\circ^{۲}} = \sqrt{(۳)^{۲} + (۴)^{۲}} = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$

$$\cos\theta = \frac{x_\circ}{r} = \frac{۳}{۵} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{y_\circ}{r} = \frac{۴}{۵}$$

$$\cot\theta = \frac{x_\circ}{y_\circ} = \frac{۳}{۴} \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{y_\circ}{x_\circ} = \frac{۴}{۳}$$

تمرین برای حل :

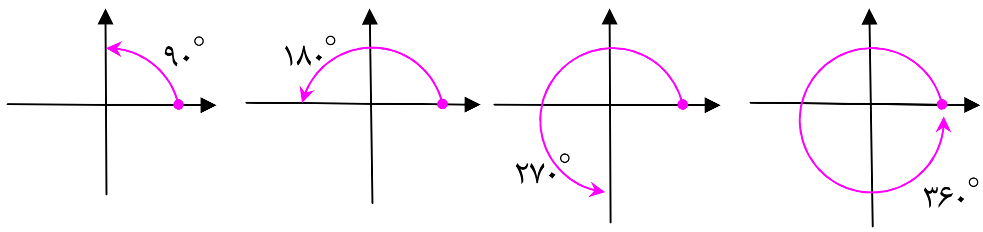
۲ : اگر $A(-۶,۸)$ نسبت های مثلثاتی زاویه ای که پاره خط OA با محور طول ها در جهت مثبت می سازد را بدست آورید.

۳ : اگر $A(-۴,-۳)$ نسبت های مثلثاتی زاویه ای که پاره خط OA با محور طول ها در جهت مثبت می سازد را بدست آورید.

***

قسمت دوّم : محاسبه‌ی نسبت های مثلثاتی زاویه های مرزی

در ادامه می خواهیم نسبت های مثلثاتی زاویه های صفر درجه ، ۹۰ ، ۱۸۰ ، ۲۷۰ و ۳۶۰ درجه را محاسبه کنیم. برای نمایش این زاویه ها یک ضلع زاویه را روی قسمت مثبت محور طول ها قرار می دهیم و ضلع دیگر را به اندازه ی زاویه در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت حرکت می دهیم.



چون ضلع دوّم این زاویه ها بر یکی از محور های مختصات منطبق هستند، آنها را زاویه های مرزی می نامند.

الف : اگر نقطه ای روی محور طول ها منطبق باشد. عرض آن برابر صفر است و زاویه ای که پاره خط واصل آن تا مبدأ مختصات با محور طول ها زاویه‌ی صفر یا ۱۸۰ درجه می سازد.

$\angle\theta = ۰^\circ$ و $x_\circ = r$	$\angle\theta = ۱۸۰^\circ$ و $x_\circ = -r$
$\sin\theta = \frac{y_\circ}{r} = \frac{۰}{r} = ۰$	$\sin\theta = \frac{y_\circ}{r} = \frac{۰}{r} = ۰$
$\cos\theta = \frac{x_\circ}{r} = \frac{r}{r} = ۱$	$\cos\theta = \frac{x_\circ}{r} = \frac{-r}{r} = -۱$
$\tan\theta = \frac{y_\circ}{x_\circ} = \frac{۰}{r} = ۰$	$\tan\theta = \frac{y_\circ}{x_\circ} = \frac{۰}{r} = ۰$
$\cot\theta = \frac{x_\circ}{y_\circ} = \frac{x_\circ}{۰} =$ نامعین	$\cot\theta = \frac{x_\circ}{y_\circ} = \frac{x_\circ}{۰} =$ نامعین

توجه به همین شکل برای حالتی که $\angle\theta = ۳۶۰^\circ$ می توان نتایج مشابه حالت صفر درجه را بدست آورد.

ب : اگر نقطه ای روی محور عرض ها منطبق باشد. طول آن برابر صفر است و زاویه ای که پاره خط واصل آن تا مبدأ مختصات با محور طول ها زاویه ی ۹۰ یا ۲۷۰ درجه می سازد.

$\angle\theta = ۲۷۰^\circ$ و $y_\circ = -r$	$\angle\theta = ۹۰^\circ$ و $y_\circ = r$
$\sin\theta = \frac{y_\circ}{r} = \frac{-r}{r} = -۱$	$\sin\theta = \frac{y_\circ}{r} = \frac{r}{r} = ۱$
$\cos\theta = \frac{x_\circ}{r} = \frac{۰}{r} = ۰$	$\cos\theta = \frac{x_\circ}{r} = \frac{۰}{r} = ۰$
$\tan\theta = \frac{y_\circ}{x_\circ} = \frac{y_\circ}{۰} =$ نامعین	$\tan\theta = \frac{y_\circ}{x_\circ} = \frac{y_\circ}{۰} =$ نامعین
$\cot\theta = \frac{x_\circ}{y_\circ} = \frac{۰}{y_\circ} = ۰$	$\cot\theta = \frac{x_\circ}{y_\circ} = \frac{۰}{y_\circ} = ۰$

بر این اساس مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های مهم را می توان به صورت جداول زیر تنظیم نمود.

جدول الف) مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های مهم

اندازه ی زاویه برحسب درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
sin	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	نامعین
cot	نامعین	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰

جدول ب) مقادیر نسبت های مثلثاتی زاویه های مرزی

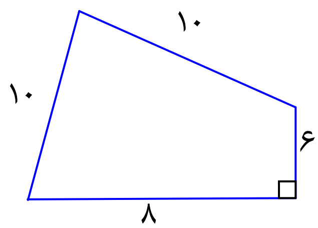
اندازه ی زاویه برحسب درجه	۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
sin	۰	۱	۰	۱−	۰
cos	۱	۰	۱−	۰	۱
tan	۰	نامعین	۰	نامعین	۰
cot	نامعین	۰	نامعین	۰	نامعین

***

تمرین۴ : مساحت مثلثی را حساب کنید که اندازه‌ی اضلاع آن ۸ و ۶ سانتی متر و زاویه‌ی بین آنها ۶۰ درجه باشد.

تمرین برای حل :

۵ : مساحت شکل مقابل را حساب کنید.

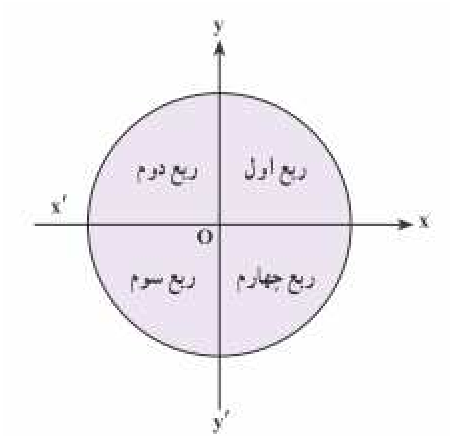


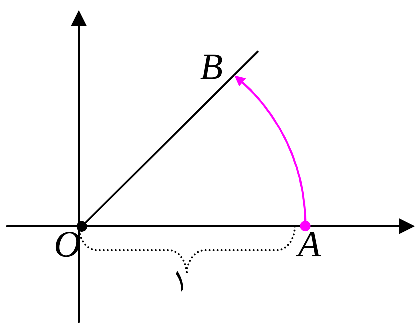
۶ : مساحت متوازی الاضلاعی را حساب کنید که اندازه‌ی دو ضلع آن $۷\sqrt{۳}$ و ۸ سانتی متر و زاویه‌ی بین آنها ۱۲۰ درجه است.

***

قسمت سوّم : دایره‌ی مثلثاتی

دایره‌ی مثلثاتی، دایره‌ای است که مرکز آن مبدأ مختصات و اندازه‌ی شعاع آن یک واحد طول باشد، را دایره‌ی مثلثاتی یا دایره‌ی استاندارد می نامند.





در هر دایره ی مثلثاتی برای تشکیل زاویه، نقطه ی $A(۱,۰)$ را مبدأ حرکت در نظر می گیرند. حال اگر نقطه‌ی A را حول مرکز دایره دوران دهیم تا نقطه‌ی B بدست آید، در این صورت زاویه ی AOB حاصل می شود.

تذکر :

۱ : اگر دوران در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را مثبت و اگر در جهت حرکت عقربه های ساعت باشد، زاویه را منفی در نظر می گیرند.

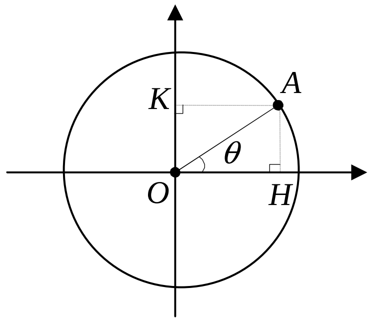
۲ : اگر نقطه‌ی A دوران داده نشود، زاویه صفر می باشد. اگر نقطه‌ی A را به اندازه‌ی یک دور کامل دوران دهیم به محل اولیه‌ی خود بر می گردد. یک دوران کامل زاویه ای برابر ۳۶۰ درجه تشکیل می دهد.

تمرین۷ : زاویه های ۷۵ و ۱۳۵ و ۱۲۰− و ۲۲۵ را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید.

***

اکنون می توان نسبت های مثلثاتی را روی دایره‌ی مثلثاتی نیز تعریف کرد.

اگر نقطه‌ی $A(x_0 , y_0)$ روی دایره‌ی استاندارد قرار گیرد. در این حالت می توان نوشت:



$$OA = r = 1$$

$$\sin\theta = \frac{y_0}{r} = \frac{y_0}{1} = y_0$$

$$\cos\theta = \frac{x_0}{r} = \frac{x_0}{1} = x_0$$

$$\tan\theta = \frac{y_0}{x_0} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{x_0}{y_0} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

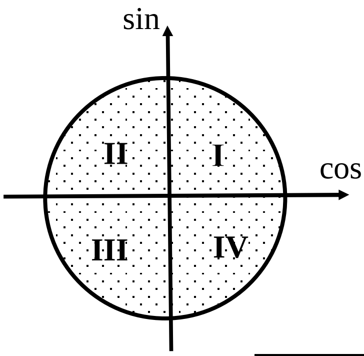
همچنین با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه‌ی OAH می توان نوشت:

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 \to \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

به همین جهت است که محور طول ها را محور کسینوس ها و محور عرض ها را محور سینوس ها می نامند.

علامت نسبت های مثلثاتی

گاهی لازم می شود، که علامت نسبت های مثلثاتی را در نواحی متخلف را داشته باشیم. با توجه به تعریف قبل می توان جدول زیر را برای تشخیص علامت نسبت های مثلثاتی در دایره ی مثلثاتی تنظیم نمود.[1]



	ربع اوّل	ربع دوّم	ربع سوّم	ربع چهارم
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

[1]. برخی برای حفظ کردن علامت های جدول ، به ترتیب نواحی و فقط برای خانه های مثبت نسبت های سینوس ، کسینوس و تانژانت ، از حروف کلمه ی **هستک** استفاده می کنند.

همچنین با توجه به تعاریف فوق واضح است که سینوس و کسینوس هر زاویه ، عددی است که در فاصلـه‌ی $[-۱,۱]$ قرار می گیرد.

$$-۱\leq \cos\theta \leq ۱ \quad \text{و} \quad -۱\leq \sin\theta \leq ۱$$

تمرین ۸ : اگر یک ضلع زاویه‌ی θ در ربع دوّم دایره‌ی مثلثاتی باشد و $\sin\theta=\frac{۴}{۵}$ باشد. سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

تمرین۹ : اگر یک ضلع زاویه‌ی θ در ربع سوّم دایره‌ی مثلثاتی باشد و $\cos\theta=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد. سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

***

تمرین برای حل :

۱۰ : اگر $\cos\theta=-\frac{۲}{۵}$ آنگاه در مورد ناحیه ای که انتهای ضلع زاویه‌ی θ در آن قرار دارد، بحث کنید.

۱۱ : زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

۱۲ : حدود زاویه‌ی θ را طوری تعیین کنید که $\tan\theta<۰$ و $\sin\theta>۰$ باشد.

۱۳ : اگر $\tan\theta$ و $\sin\theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار دارد؟

۱۴ : در کدام ربع از دایره‌ی مثلثاتی $\cos\theta.\cot\theta>۰$ است؟

۱۵ : اگر $\sin\theta=m+۳$ باشد. حدود m را تعیین کنید.

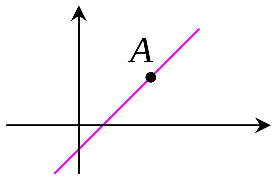
۱۶ : اگر $\cos\alpha=۲m-۵$ باشد. حدود m را تعیین کنید.

۱۷ : بیشترین و کمترین مقدار عبارت $A=\frac{۳-۵\cos x}{۲}$ را به دست آورید.

۱۸ : اگر $\sin x+\cos y=۲$ ، آنگاه ثابت کنید که $\sin x=\cos y=۱$

***

قسمت چهارم : رابطه‌ی شیب خط و تانژانت زاویه



در سال گذشته به معادله‌ی خط و مفهوم شیب خط آشنا شده اید. می دانید که اگر m شیب خط گذرا از نقطه‌ی $A(x_0 , y_0)$ باشد، معادله‌ی خط به صورت زیر است.

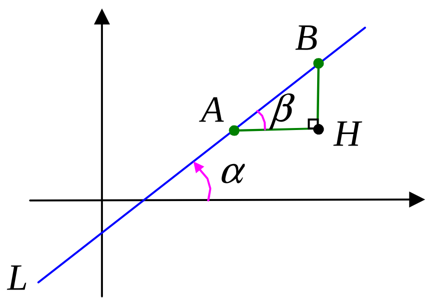
$$y = m(x - x_0) + y_0$$

همچنین اگر دو نقطه‌ی $A(x_۱ , y_۱)$ و $B(x_۲ , y_۲)$ دو نقطه‌ی دلخواه از یک خط باشند، شیب آن خط به صورت است.

$$\boxed{m = \frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}}$$

تمرین ۱۹ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی $A(۳,۵)$ و $B(۱,-۳)$ بگذرد.

بنابر تعریف شیب خط و با در نظر گرفتن تعریف تانژانت یک زاویه ، واضح است که شیب یک خط با تانژانت زاویه ای که آن خط با محور طولها در جهت مثبت می سازد، برابر می باشد. به شکل زیر توجه کنید.



$$\angle\alpha = \angle\beta$$

$$\to \tan\alpha = \tan\beta$$

$$\xrightarrow{m = \frac{BH}{AH} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \tan\beta} m = \tan\alpha$$

تمرین ۲۰ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(۱,۳)$ بگذرد و با محور طول ها در جهت مثبت زاویه‌ی ۳۰ درجه تشکیل دهد.

تمرین ۲۱ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $(۲,۳)$ بگذرد و با محور طول ها در جهت مثبت زاویه-ی ۴۵ درجه بسازد.

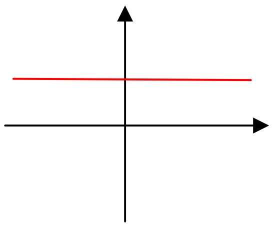
تمرین ۲۲ : دو نقطه‌ی $A(۲, \sqrt{۳})$ و $B(۰,-\sqrt{۳})$ داده شده اند. اندازه‌ی زاویه‌ای که خط AB با محور طول ها در جهت مثبت را بیابید.

توجه : اگر m شیب خط و n عرض مبدأ آن باشد، معادله‌ی خط در حالت کلی به صورت زیر است.

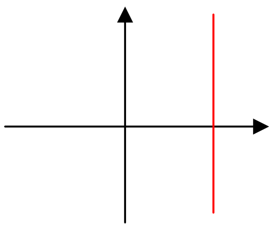
$$y = mx + n$$

نتیجه :

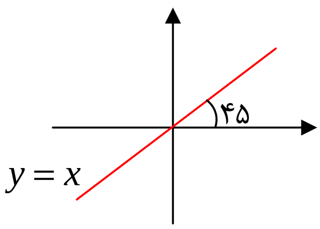
الف : شیب هر خط موازی محور طول ها برابر صفر است. (چرا؟)



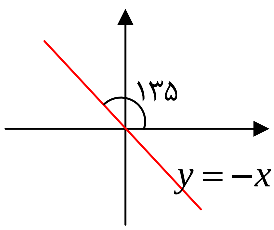
ب : شیب هر خط موازی محور عرض ها نامعین است. (چرا؟)



ج : معادله‌ی خط نیمساز ربع اول و سوم به صورت $y = x$ می باشد. بنابراین شیب نیمساز ربع اوّل و سوّم برابر ۱ است.



د : معادله‌ی خط نیمساز ربع دوّم و چهارم به صورت $y = -x$ می باشد. بنابراین شیب نیمساز ربع دوّم و چهارم برابر ۱− است.



نتیجه: چون خط نیمساز ربع دوّم و چهارم با جهت مثبت محور طول ها زاویه‌ی ۱۳۵ درجه می سازد. بنابراین:

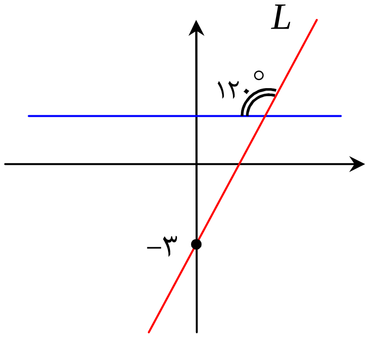
$$\tan ۱۳۵^\circ = -۱$$

تمرین۲۳ : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی $A(-۲,۳)$ می گذرد و با جهت مثبت محور طول ها زاویه‌ی ۱۳۵درجه می سازد.

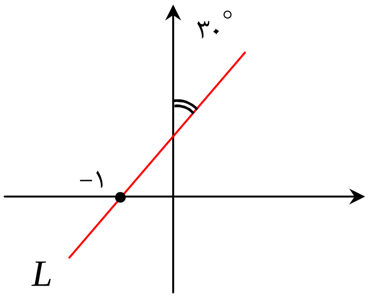
***

تمرین برای حل :

۲۴ : با توجه به شکل مقابل، معادله‌ی خط L را بدست آورید.



۲۵ : با توجه به شکل مقابل، معادله‌ی خط L را بدست آورید.



توجه : اگر معادله‌ی خطی به صورت $ax+by+c=0$ باشد. شیب خط به شکل زیر است.

$$\boxed{m=-\frac{x \text{ ضریب }}{y \text{ ضریب }}=-\frac{a}{b}}$$

۲۶ : زاویه‌ای که خط $\sqrt{3}x-3y+1=0$ با جهت مثبت محور طول ها می سازد را تعیین کنید.

۲۷ : خط $kx+(2k-1)y+2=0$ داده شده است. مقدار k را به قسمی تعیین کنید که این خط با جهت مثبت محور طول ها زاویه‌ی ۱۳۵ درجه بسازد.

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir   کانال تلگرام : @amerimath

درس سوّم : روابط بین نسبت های مثلثاتی

در ادامه به بررسی و شناخت روابط بین نسبت های مثلثاتی یک زاویه می پردازیم.

قسمت اوّل : روابط بین نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

پیش از این نسبت های مثلثاتی را در مثلث قائم الزاویه تعریف کردیم. بین این نسبت های مثلثاتی هر مثلث قائم الزاویه روابط مهم و کاربردی وجود دارد. برخی از این روابط برای زاویه‌ی حاده‌ی θ در هر مثلث قائم الزاویه به شرح زیر هستند.

۱) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

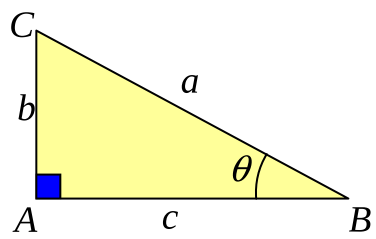
۲) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۳) $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۴) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

۵) $1 + \cot^2\theta = \dfrac{1}{\sin^2\theta}$

۶) $\tan\theta . \cot\theta = 1$



اثبات هر یک از این روابط به ترتیب زیر است.

اثبات ۱ :

$$\sin\theta = \frac{b}{a}$$

$$\cos\theta = \frac{c}{a}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = (\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

اثبات ۲ :

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{a.b}{a.c}=\frac{b}{c}=\tan\theta$$

اثبات ۳ :

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}}=\frac{a.c}{a.b}=\frac{c}{b}=\cot\theta$$

اثبات ۴ :

$$1+\tan^2\theta=1+(\frac{b}{c})^2=1+\frac{b^2}{c^2}=\frac{b^2+c^2}{c^2}=\frac{a^2}{c^2}=(\frac{a}{c})^2=(\frac{1}{\cos\theta})^2=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

اثبات ۵ :

$$1+\cot^2\theta=1+(\frac{c}{b})^2=1+\frac{c^2}{b^2}=\frac{b^2+c^2}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}=(\frac{a}{b})^2=(\frac{1}{\sin\theta})^2=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

اثبات ۶ :

$$\tan\theta.\cot\theta=(\frac{b}{c})(\frac{c}{b})=1$$

***

تمرین ۱ : ثابت کنید که سینوس و کسینوس هر زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم الزاویه ، همواره از یک کوچکترند.

حل : می دانیم که در هر مثلث قائم الزاویه هر ضلع زاویه‌ی قائمه از وتر کوچکتر است. لذا :

$$AC<BC\rightarrow\frac{AC}{BC}<1\rightarrow\sin\theta<1$$

$$AB<BC\rightarrow\frac{AB}{BC}<1\rightarrow\cos\theta<1$$

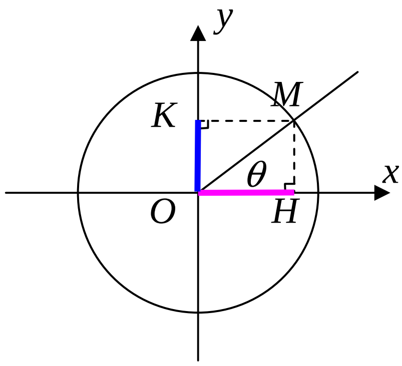
تمرین ۲ : در مثلث ABC که در آن $\angle A=90^\circ$ ، ثابت کنید: $\frac{\cos^2 B+\sin^2 C}{1-\sin^2 C}=2\tan^2 C$

قسمت دوّم : اتحاد های مثلثاتی

برای درک بهتر اتحادهای مثلثاتی و تعمیم روابط موجود در مثلث قائم الزاویه ، به تمام زاویه ها ، ابتدا مجدداً نسبت های مثلثاتی را در دایره‌ی مثلثاتی تعریف می کنیم.

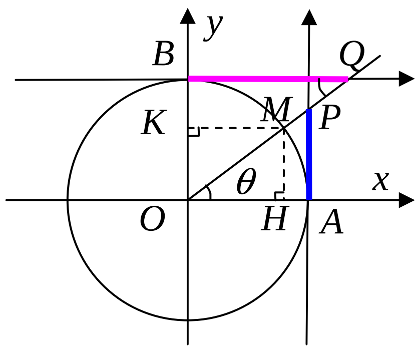
در هر دایره‌ی مثلثاتی نسبت های مثلثاتی هر زاویه مانند θ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\sin\theta = OK \quad \text{و} \quad \cos\theta = OH$$



حال اگر دو محور دیگر به دستگاه فوق مطابق شکل اضافه کنیم. خواهیم داشت.

$$\tan\theta = AP \quad \text{و} \quad \cot\theta = BQ$$



دلیل این تعریف به صورت زیر است.

چون دو مثلث OMH و OAP به حالت تساوی دو زاویه متشابهند، بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{MH}{OH} = \frac{AP}{OA} \xrightarrow{OA=۱} \frac{MH}{OH} = AP$$

از طرفی در OMH می توان نوشت :

$$\tan\theta = \frac{MH}{OH}$$

و لذا :

$$\tan\theta = AP$$

همچنین چون دو مثلث OMH و OBQ به حالت تساوی دو زاویه متشابهند، بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{OH}{MH} = \frac{BQ}{OB} \xrightarrow{OB=۱} \frac{OH}{MH} = BQ$$

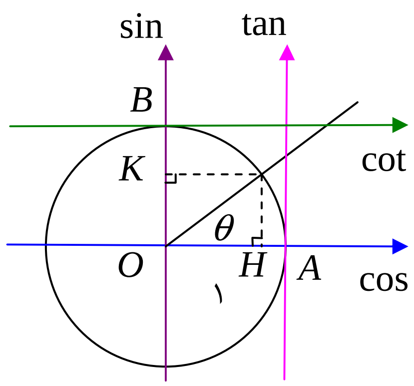
از طرفی در OMH می توان نوشت :

$$\cot\theta = \frac{OH}{MH}$$

و لذا :

$$\cot\theta = BQ$$

با توجه به این تعاریف است که نام محور ها را می توان به صورت زیر نیز در نظر گرفت.



تمرین۳ : زاویه‌ی۶۰ درجه را در دایره‌ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان دهید.

تمرین۴ : زاویه‌ی۱۲۰درجه را در دایره‌ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان دهید.

تمرین۵ : نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۳۵ درجه را به کمک دایره‌ی مثلثاتی تعیین کنید.

تمرین برای حل :

۶ : زاویه‌ی ۳۰۰ درجه را در دایره‌ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان دهید.

۷ : زاویه‌ی ۲۱۰ درجه را در دایره‌ی مثلثاتی مشخص و نسبت های مثلثاتی آن را روی شکل نشان دهید.

***

اتحاد های بنیادی مثلثات

با توجه به تعریف نسبت های مثلثاتی در دایره‌ی مثلثاتی ، می توان اتحاد های زیر را که تعمیم روابط موجود در مثلث قائم الزاویه می باشند را بیان نمود.

۵. $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	۳. $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	۱. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
۶. $\tan\alpha.\cot\alpha=1$	۴. $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	۲. $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

نتیجه : اگر α یک زاویه‌ی دلخواه باشد. در این صورت:

الف) $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

ب) $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

ج) $\tan\alpha=\dfrac{1}{\cot\alpha}$

د) $\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}$

تمرین ۸ : اگر $\tan\theta=3$ باشد، حاصل عبارت $\dfrac{3\sin\theta+4\cos\theta}{4\cos\theta-3\sin\theta}$ را به دست آورید.

تمرین ۹ : اگر $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ و زاویه‌ی θ در ربع دوّم قرار دارد. در این صورت سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

تمرین ۱۰ : اگر $\sin x=-\dfrac{3}{4}$ و $270^\circ<x<360^\circ$ ، آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

تمرین ۱۱ : اگر $\tan\theta+\cot\theta=5$ و زاویه‌ی θ در ربع اوّل دایره‌ی مثلثاتی قرار داشته باشد. حاصل هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف) $A=\sin\theta\times\cos\theta$

ب) $B=\sin\theta+\cos\theta$

تمرین ۱۲: حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$$

تمرین۱۳ : با فرض بامعنی بودن هر کسر، تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cos\theta}$$

تمرین۱۴ : با فرض بامعنی بودن هر کسر، تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(\frac{۱}{\cos\alpha}+\tan\alpha)(۱-\sin\alpha)=\cos\alpha$$

تمرین ۱۵ : تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sin^{۴}x-\cos^{۴}x=\sin^{۲}x-\cos^{۲}x$$

تمرین۱۶ : با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی های زیر را بررسی کنید.

الف) $\dfrac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\dfrac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

ب) $\tan\alpha=\dfrac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}$

ج) $۱-\dfrac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\sin x$

د) $\dfrac{۱}{\cos x}-\tan x=\dfrac{\cos x}{۱+\sin x}$

هـ) $\sin^{۴}x+\cos^{۴}x=۱-۲\sin^{۲}x\cos^{۲}x$

***

تمرین برای حل :

۱۷ : اگر $\sin\theta=-\frac{۴}{۵}$ و انتهای ضلع زاویه‌ی θ در ربع سوّم قرار دارد. در این صورت سایر نسبت های مثلثاتی این زاویه را تعیین کنید.

۱۸: اگر $\tan ۲۴۰^\circ=\sqrt{۳}$ باشد، آنگاه سایر نسبت های مثلثاتی زاویه‌ی ۲۴۰ درجه را تعیین کنید.

۱۹ : اگر $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۲}{۵}$ باشد، حاصل عبارت $\sin\alpha+\cos\alpha$ را محاسبه کنید.

۲۰ : درستی هر یک از تساوی های زیر را ثابت کنید.

۱) $\tan\alpha + \frac{\cos\alpha}{۱+\sin\alpha} = \frac{۱}{\cos\alpha}$

۲) $\frac{۱+\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{۱+\cos\theta} = \frac{۲}{\sin\theta}$

۳) $\sin^{۲} x + \frac{\sin^{۴} x}{۱-\sin^{۲} x} = \tan^{۲} x$

۴) $\tan x - \cot x = (\sin x - \cos x)(\frac{۱}{\sin x} + \frac{۱}{\cos x})$

***

تهیه کننده : جابر عامری دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

سایت : www.mathtower.ir کانال تلگرام : @amerimath