
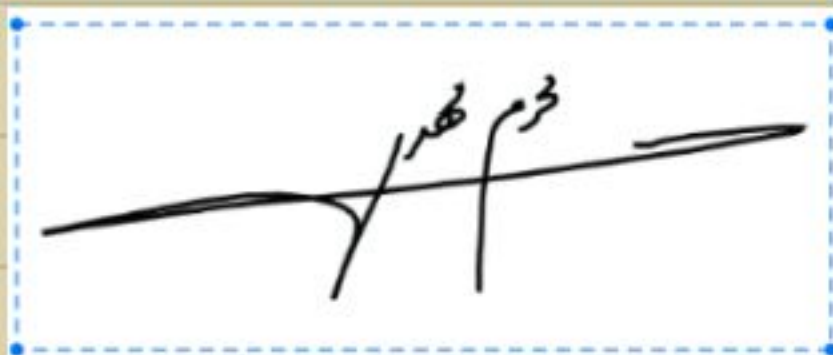


به نام خداوند بخشنده مهربان

حل فعالیت ها و کار در کلاسها و تمرینهای درس پنجم از فصل پنجم


حسابان!
 پیوستگی
 درس

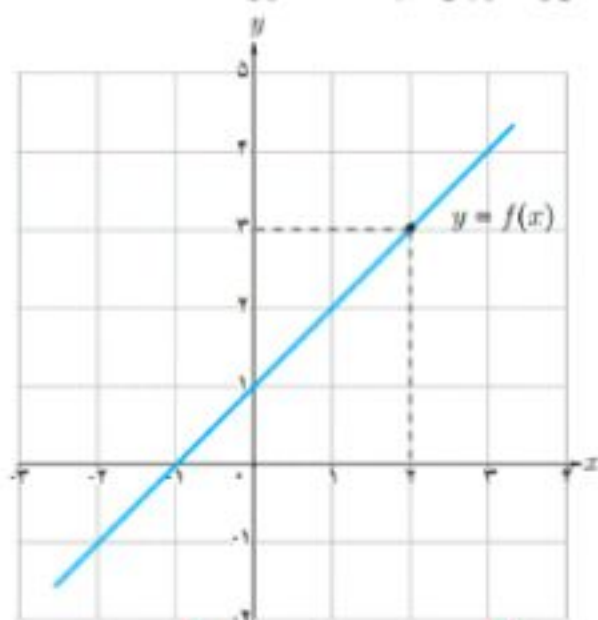


09213102271-09125102271-@moharrammahdi

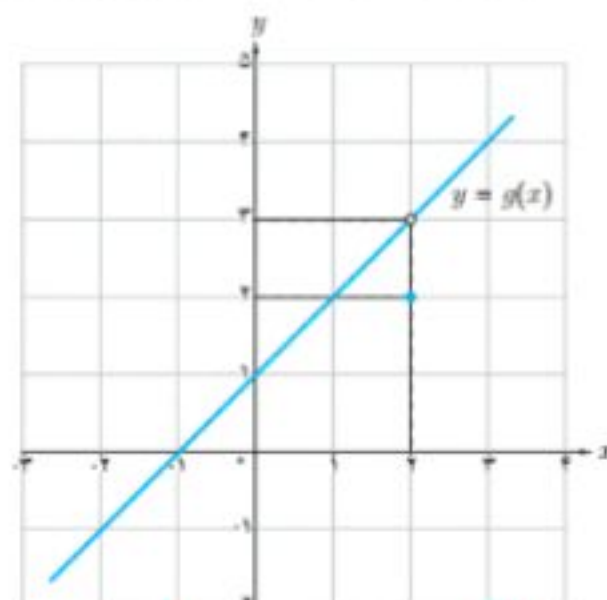
صفحه ۱۴۵

فعالیت

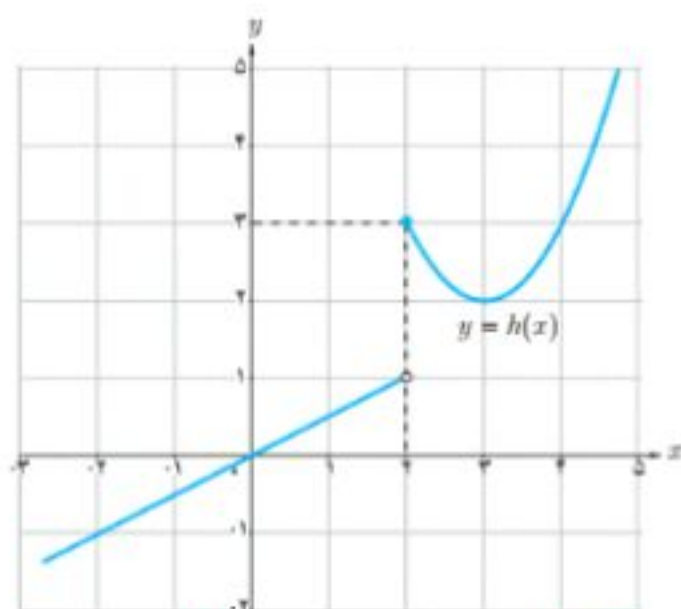
الف) با توجه به نمودارها، مقادیر زیر هر نمودار را (در صورت وجود) به دست آورید.



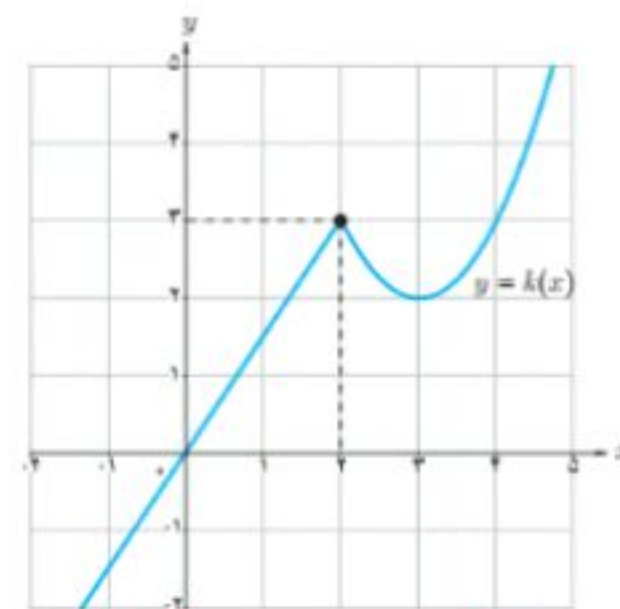
$f(2) = 3$ $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$



$g(2) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$

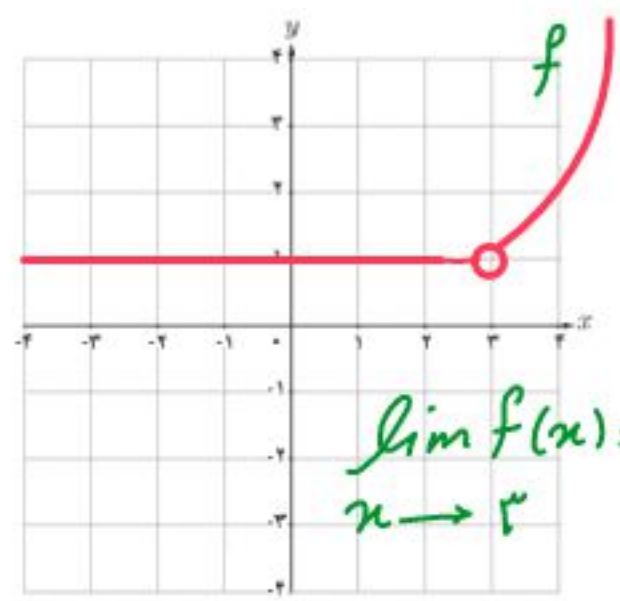


$h(2) = 3$ $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \text{وجود ندارد}$



$k(2) = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = 3$

ب) برای کدام یک از توابع، حد تابع در ۲ با مقدار تابع در ۲ برابر است؟ $f(x)$ و $k(x)$
 ب) در نمودار کدام یک از توابع، در نقطه‌ای به طول ۲، گسستگی وجود ندارد؟ $k(x)$ و $f(x)$



$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$

۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=3$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=3$ پیوسته نیست)

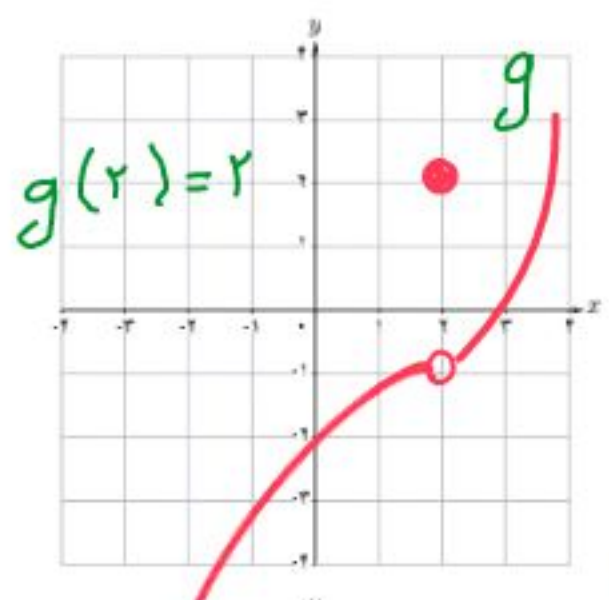
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

$a=2$

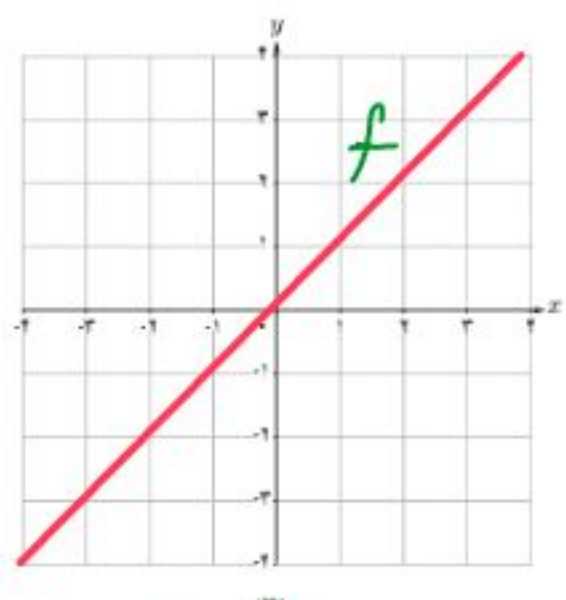
۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به جز در دو نقطه.

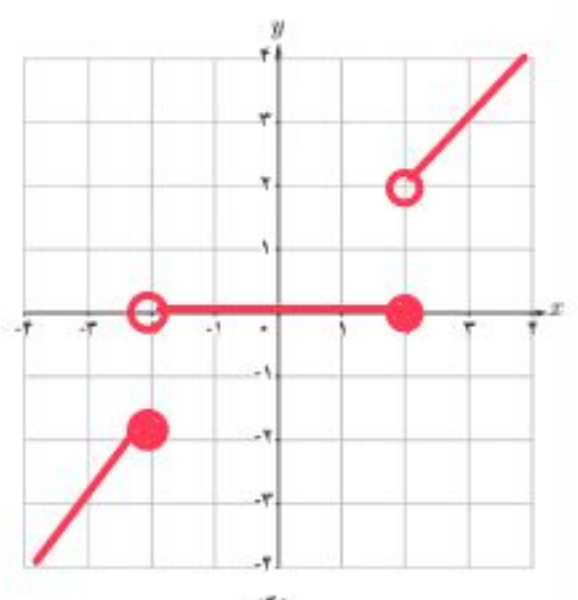
(۱)



$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1$



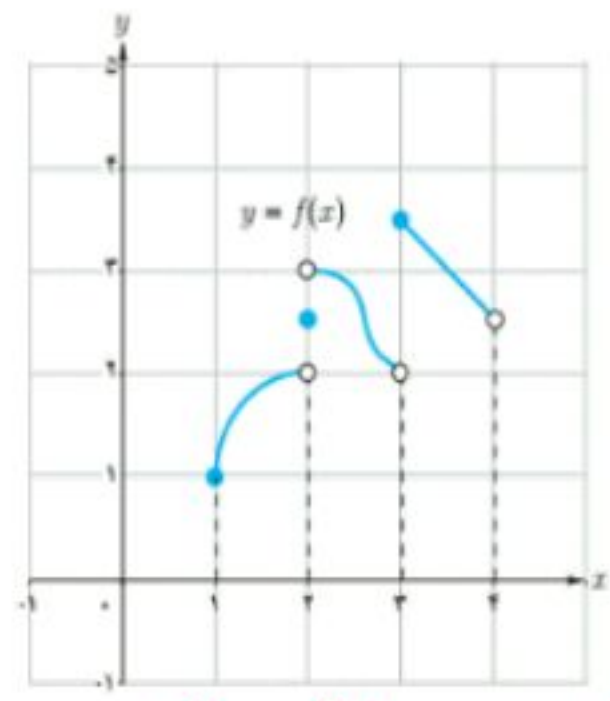
$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = k$



(۴)

(۲)

(۳)



نمودار تابع f به صورت روبه‌رو رسم شده است.

الف) تابع f در کدام یک از نقاط مجموعه $\{1, 2, 2/5, 3, 4\}$ ناپیوسته است.

ب) آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$ برقرار است؟ *بله*

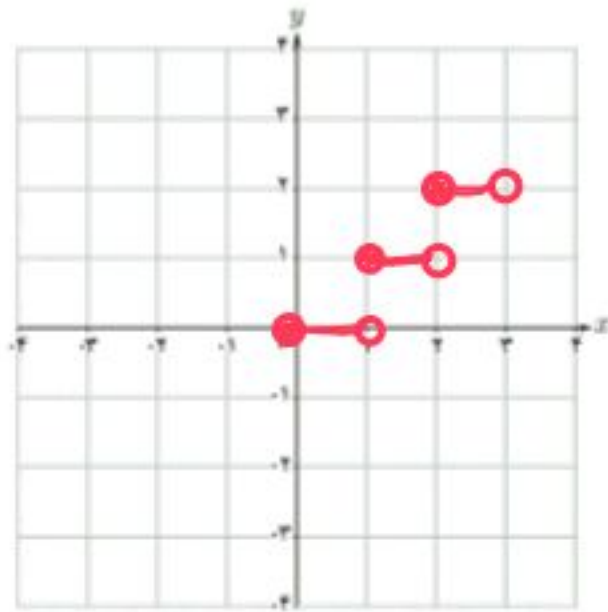
پ) آیا تساوی $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$ برقرار است؟ *خیر*

ت) در کدام نقطه a از مجموعه $\{1, 2, 2/5, 3, 4\}$ تساوی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ برقرار است؟

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = 1$

$\{1, 2/5, 3\}$

۲, ۵ ۳, ۵

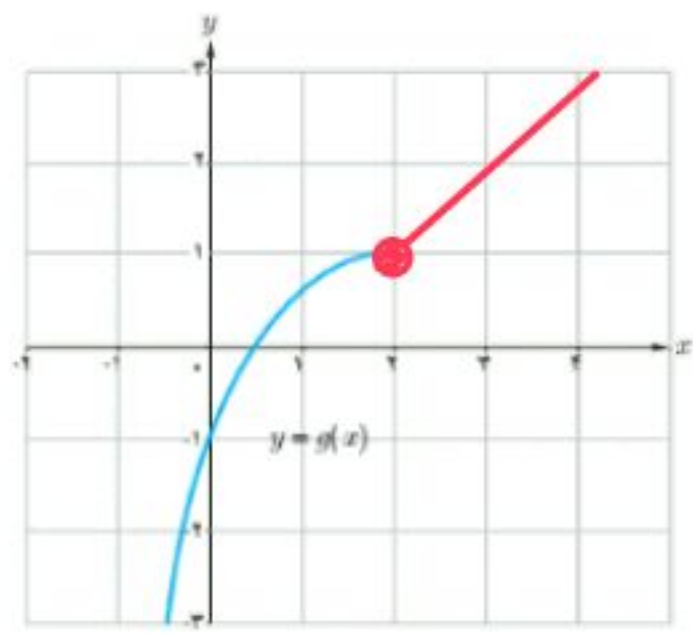
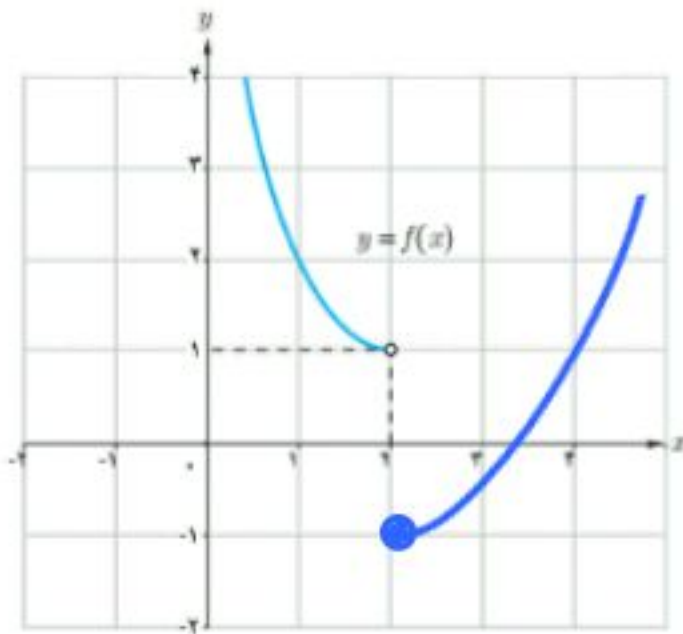


الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام یک از نقاط مجموعه $\{0, \frac{1}{2}, 2\}$ ،

- ۱) تابع f پیوسته است. ← $\frac{1}{2}$
- ۲) تابع f پیوستگی راست دارد. ← 0
- ۲) تابع f پیوستگی چپ دارد. ← $\frac{1}{2}$

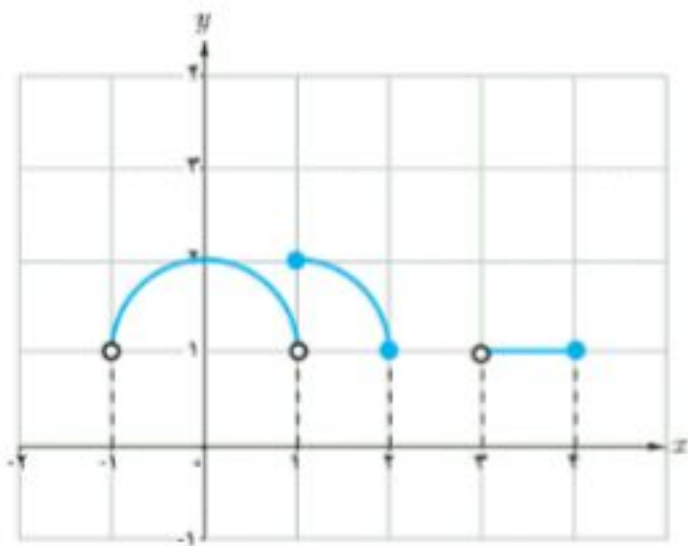
ب) در شکل های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده اند. در نقطه $x=2$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که:

- ۱) تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.
- ۲) تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.



پیوستگی روی بازه های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.

- ✓ تابع f را در بازه $[a, b]$ پیوسته گوئیم هرگاه تابع f در (a, b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته باشد.
- ✓ تابع f را در بازه $(a, b]$ پیوسته گوئیم هرگاه تابع f در بازه (a, b) پیوسته باشد و در b از چپ پیوسته باشد.



در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست هستند؟

- الف) تابع f بر بازه $[1, 2]$ پیوسته است. ✓
- ب) تابع f بر بازه $[3, 4]$ پیوسته است. ✗
- پ) تابع f بر بازه $[0, 2]$ پیوسته است. ✗

← در $(0, 2)$ پیوسته نیست

الف)

در $(1, 2)$ پیوسته است. ✓

در 1 از راست پیوسته است. ✓

در 2 از چپ پیوسته است. ✓

ب)

در $(3, 4)$ پیوسته است. ✓

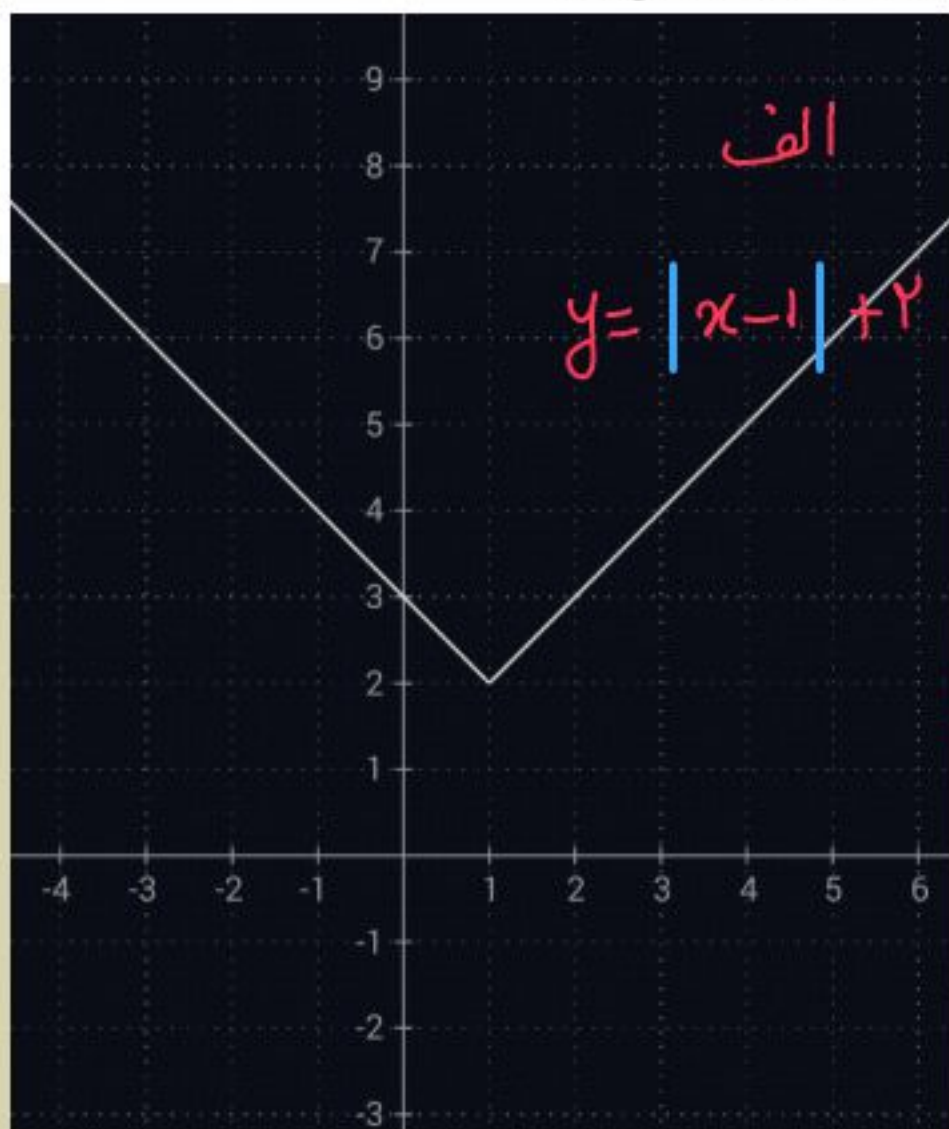
در 4 از چپ پیوسته است. ✓

در 3 از راست پیوسته نیست. ✗

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y = |x - 1| + 2$

ب) $y = [x] + [-x]$



تابع $\Rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است

(ب) $y = x - [x]$

$-2 < x < -1 \rightarrow y = x + 2$

x	-2	-1
y	0	1

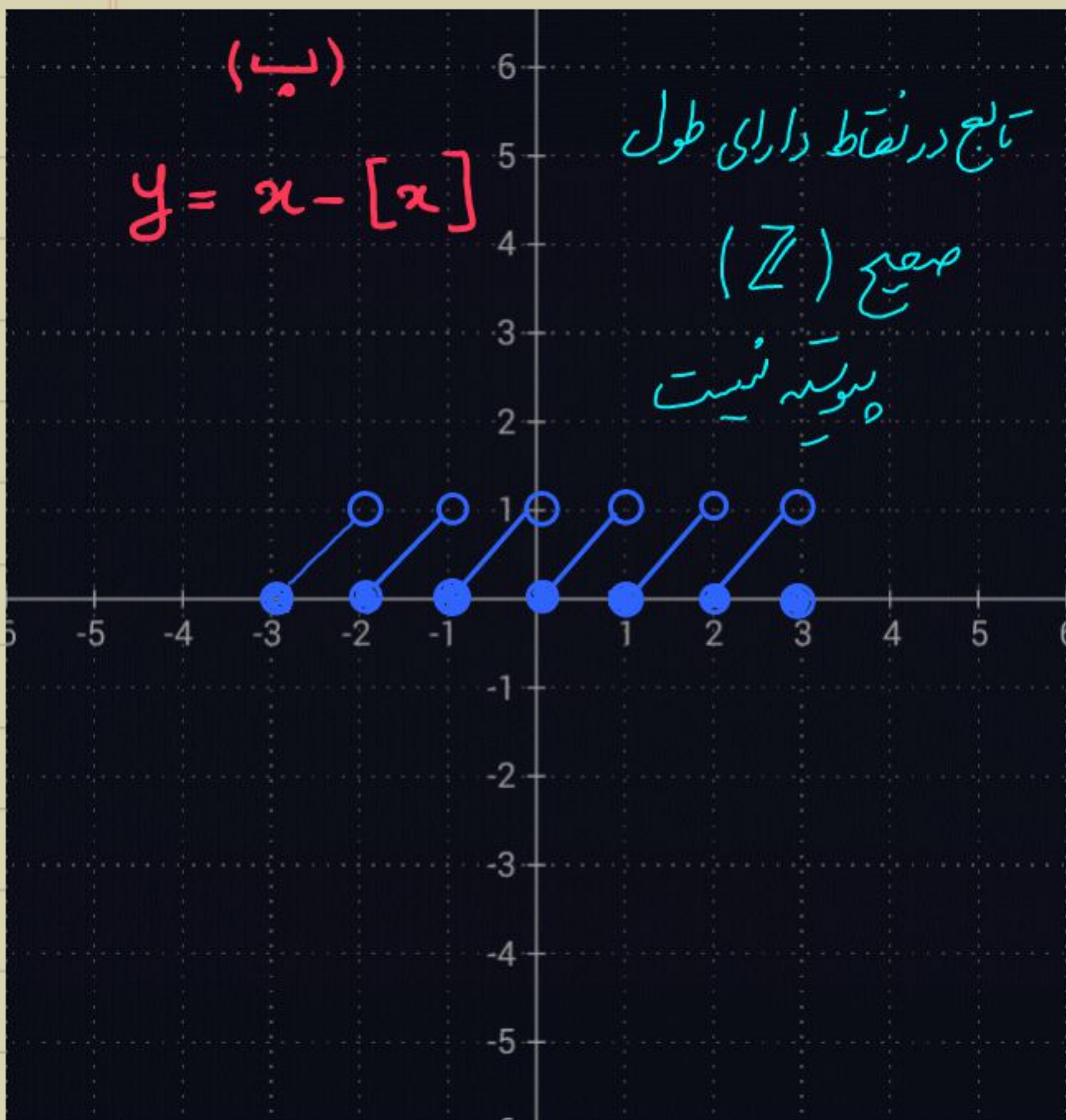
$-1 < x < 0 \rightarrow y = x + 1$

x	-1	0
y	0	1

$0 < x < 1 \rightarrow y = x$

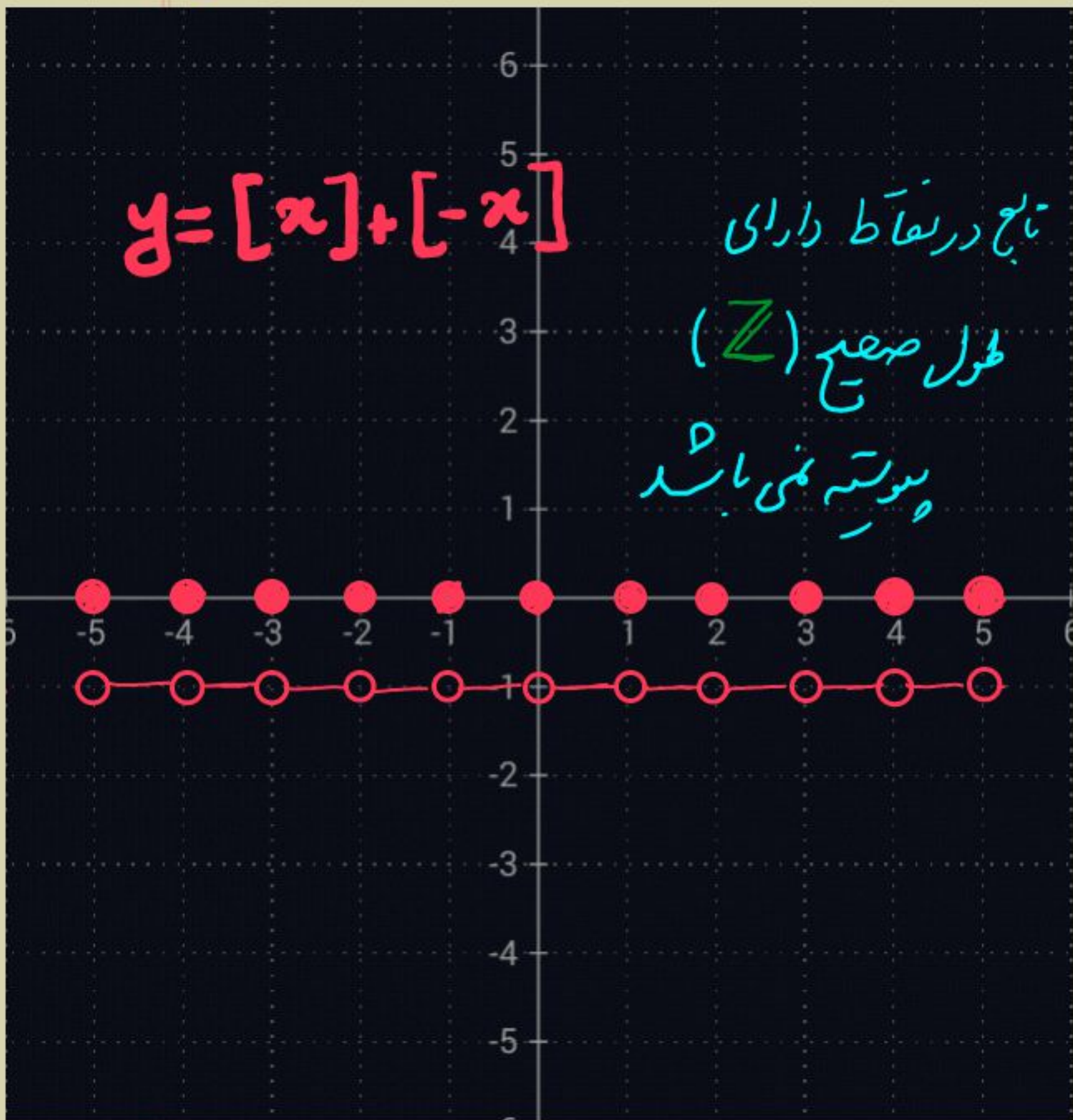
x	0	1
y	0	1

⋮

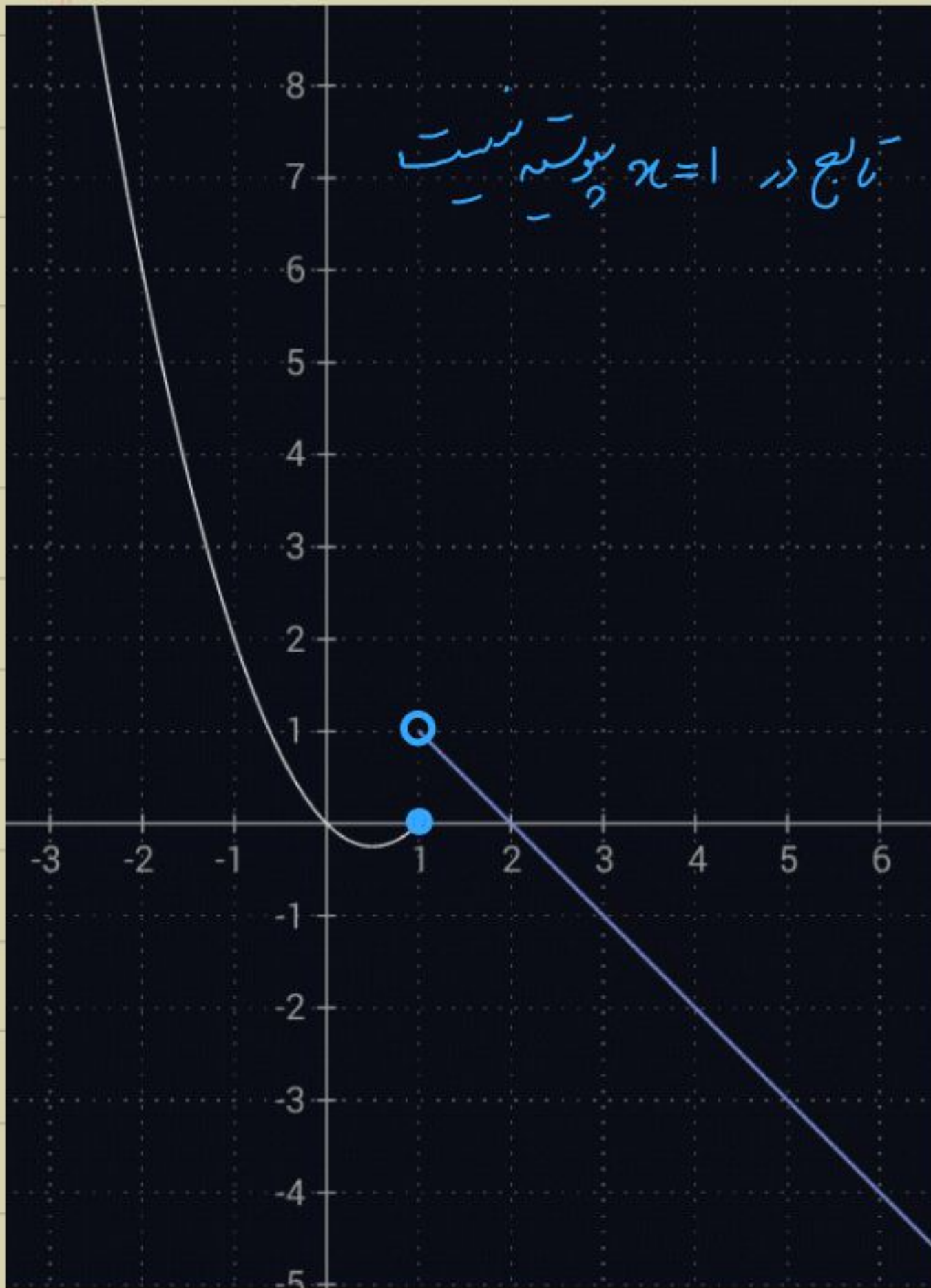


$$پ) y = [x] + [-x]$$

$$y = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\text{ب) } y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$$



۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x \neq 1 \text{ (ب)} \\ a & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 1 \\ a & x = 1 \text{ (الف)} \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$$

$$k(x) = ([x]-a)[x] \text{ (ت)}$$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0 < x < 1 \text{ (پ)} \\ [x]+a & x \geq 1 \end{cases}$$

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1 + 2 = 1$ حد راست

مقدار تابع $f(1) = a$

$\Rightarrow a = 1$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} = 1+2 = 3$ حد تابع

مقدار تابع $f(1) = a \Rightarrow a = 3$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = [1^+] + a = 1 + a$ حد راست

موجب $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$1 + a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$k(x) = ([x] - a)[x]$$

ت

حد راست $\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = ([1^+] - a)[1^+] = 1 - a$

حد چپ $\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = ([1^-] - a)[1^-] = 0$

مقدار تابع $k(1) = (1 - a)(1) = 1 - a$

$$1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a ، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{ب)}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ a & x = 0 \\ 2x + 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

$f(0) = 1$ مقدار تابع

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2(0) + 1 = 1$
حد راست

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a$ حد راست

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ حد چپ

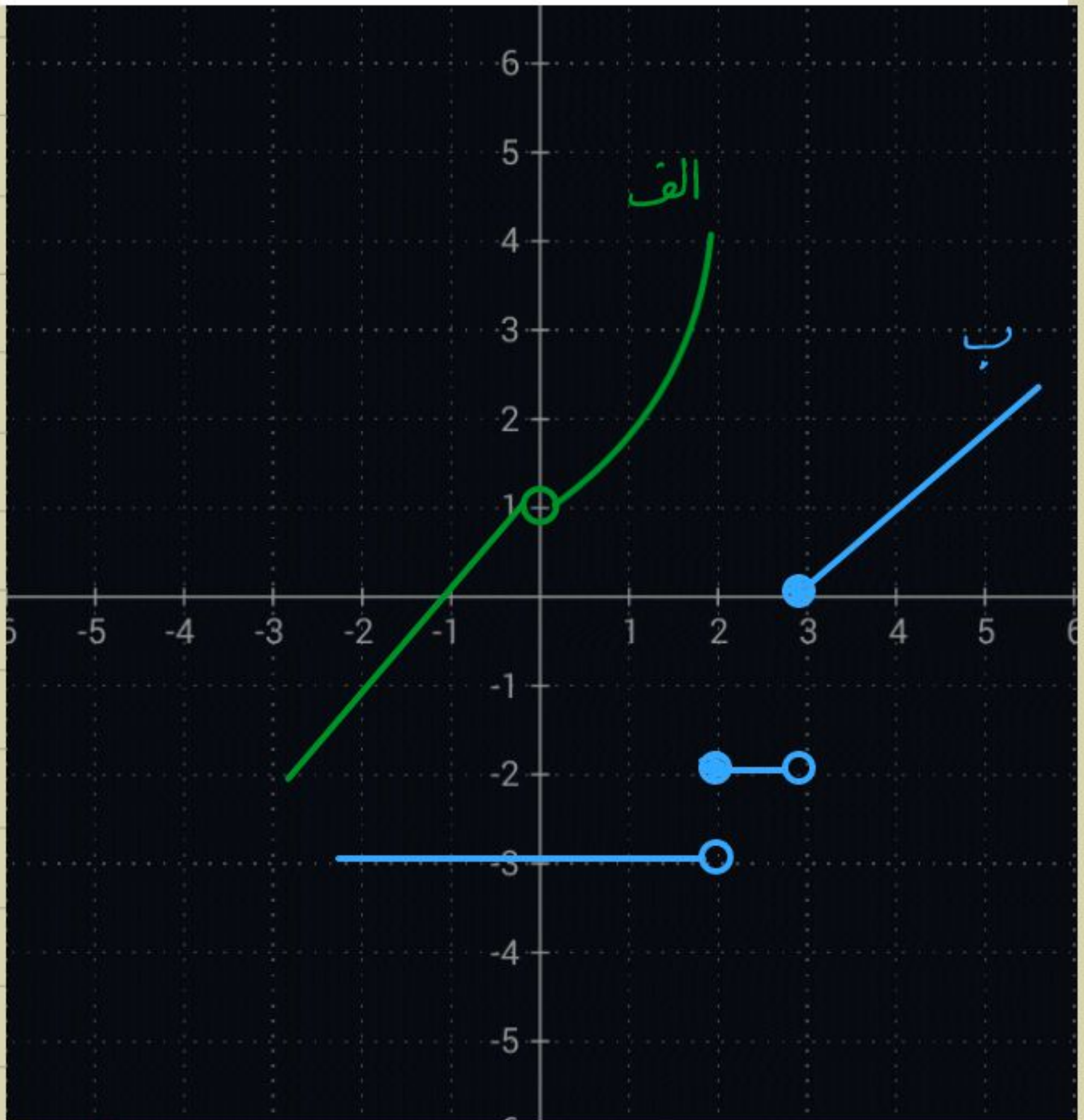
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -a$ حد چپ

$f(0) = a$ مقدار تابع

$-a = a = 1$ غیر ممکن

$a = 0 = 1$ غیر ممکن

- الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.
- ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.
- پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.



$$\text{پ) } f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 4 \\ x & -2 \leq x \leq 2 \\ -x^3 & x < -2 \end{cases}$$

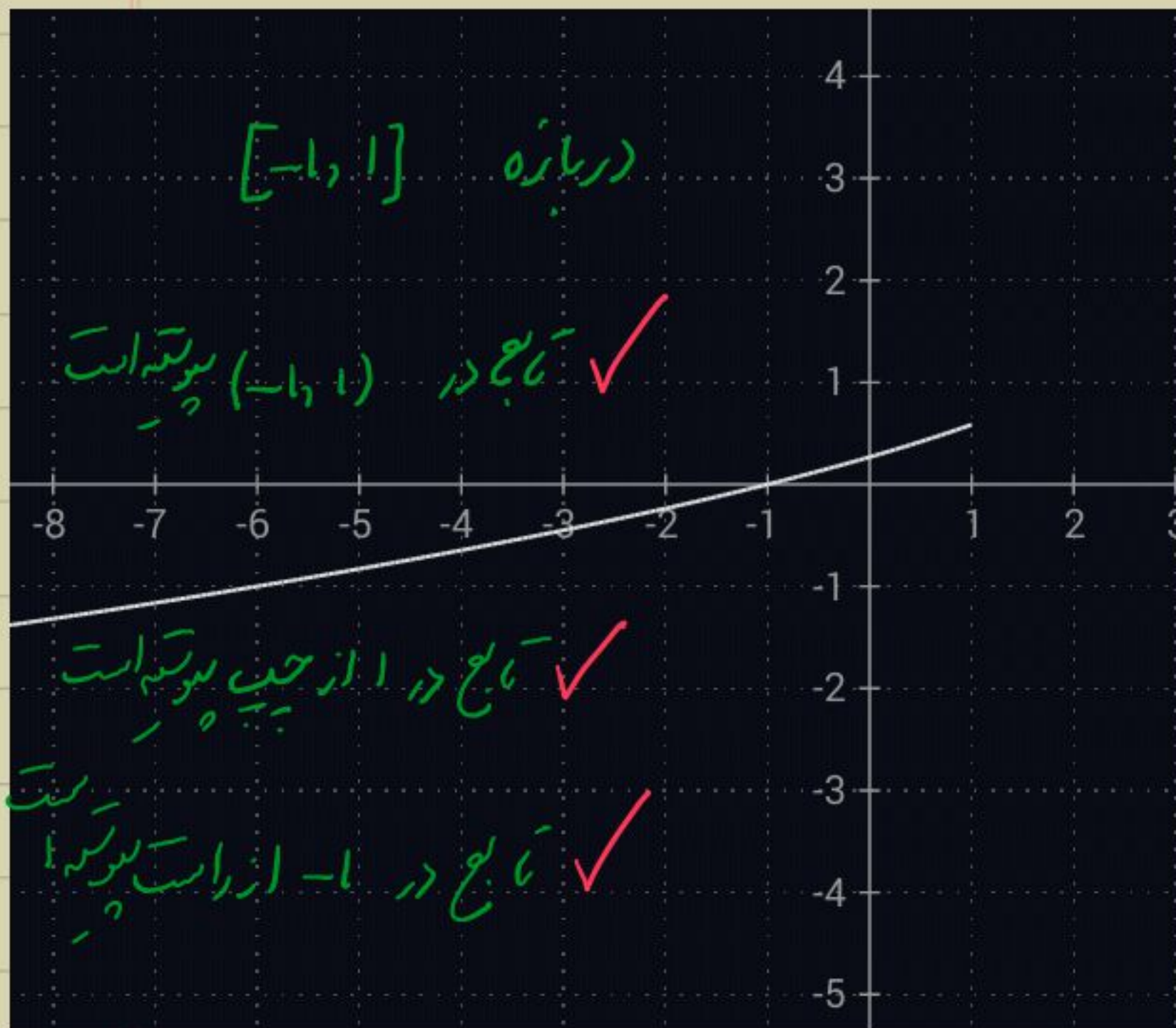
۵ تابع $f(x) = [x]$ در بازه $(2, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

تابع $f(x) = [x]$ در بازه‌های $(x, x+1)$
 $x \in \mathbb{Z}$

پیوسته است بنابراین داریم: حداکثر مقدار $k = 2+1 = 3$

۶ بازه بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

$$f(x) = -\sqrt{-x+3} + 2$$



مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع در $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & x > 0 \\ b - 1 & x = 0 \\ x - 2a & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 - 2a = -2a \quad \text{حد چپ}$$

$$f(0) = b - 1 \quad \text{مقدار تابع}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{2}{4} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2$$

$= \frac{1}{2}$ حد راست

$$-2a = \frac{1}{2} \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$b - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

*
نویس

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \Rightarrow \cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

سروز و سربلند با سید



09213102271-09125102271-@moharrammahdi

تهران

25 فروردین ماه سال 1400

حرم نهد

خدا ترا و مرا از بلا نگهدارد

تراز درد و مرا از دوا نگهدارد