وارون یک تابع و تابع یک به یک

وارون تابع: اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج مرتب‌های تابع f را جابه‌جا کنیم، یک رابطه‌ی جدید به دست می‌آید که به آن وارون تابع f گفته و با نماد f^{-1} (می‌خوانیم f_inverse) نمایش می‌دهیم.

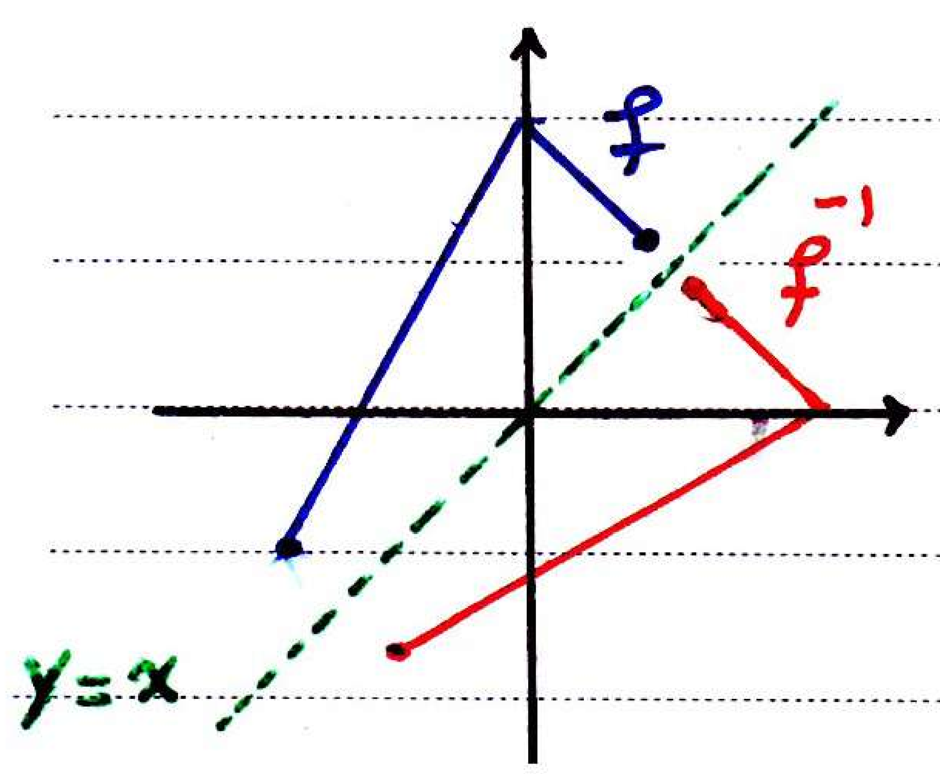
مثال: وارون هر یک از توابع زیر را بنویسید.

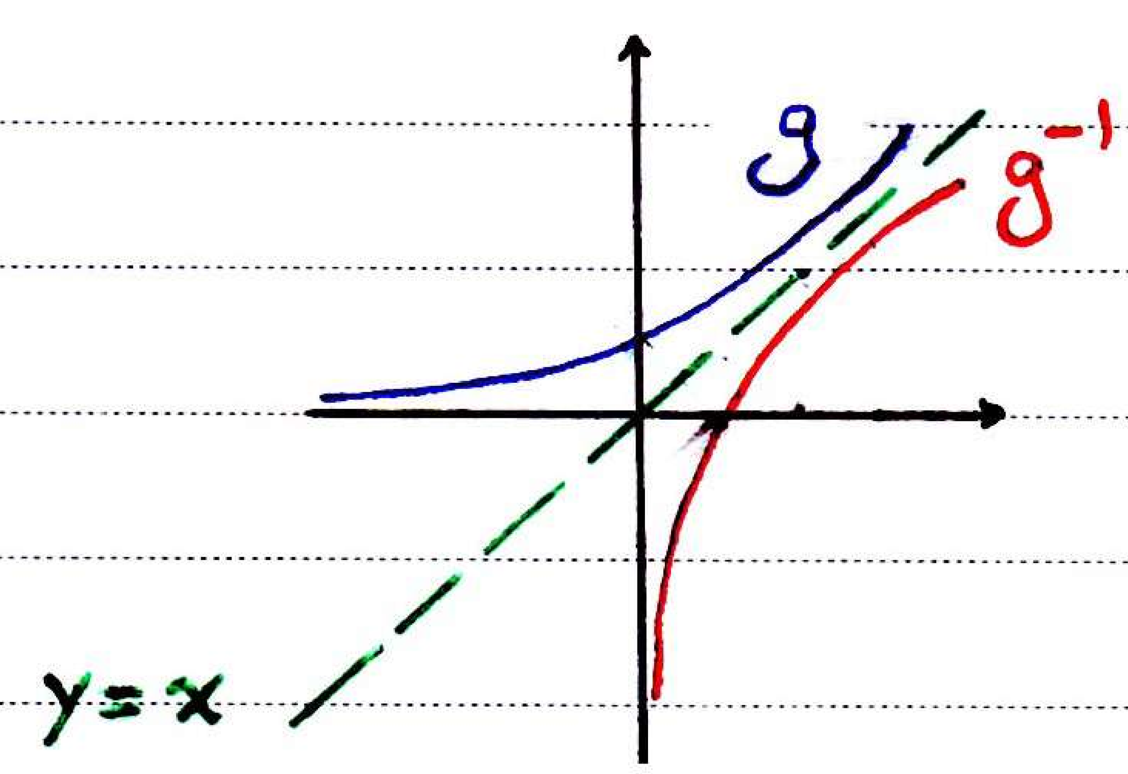
الف) $f=\{(1,0),(2,-1),(4,1)\} \Longrightarrow f^{-1}=\{(0,1),(-1,2),(1,4)\}$

ب) $g=\{(2,1),(4,0),(-1,1)\} \Longrightarrow g^{-1}=\{(1,2),(0,4),(1,-1)\}$

توجه: وارون هر تابع الزاماً یک تابع نیست، به عنوان نمونه در مثال قبل f^{-1} تابع است ولی g^{-1} تابع نیست زیرا دارای مؤلفه‌ی اول تکراری است.

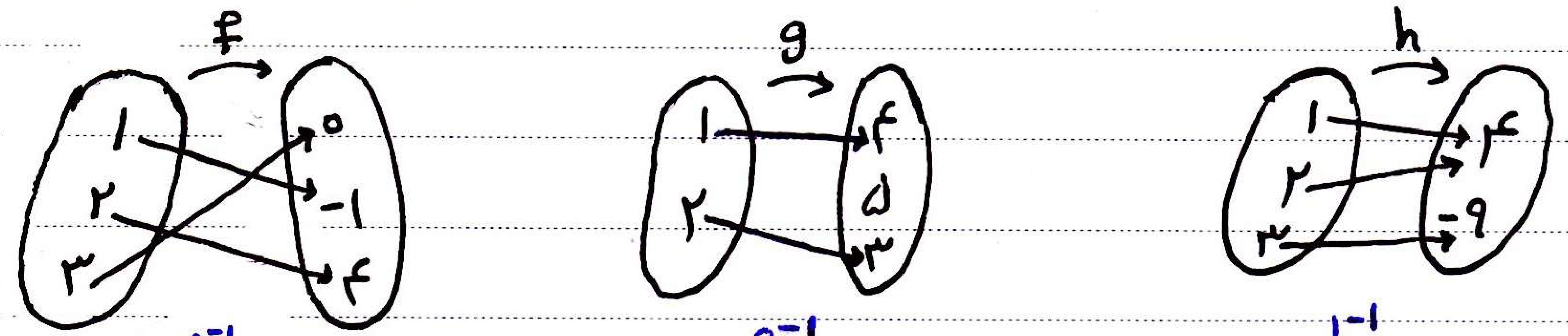
رسم نمودار وارون یک تابع: کافیست قرینه‌ی نمودار تابع را نسبت به خط $y=x$ نیم‌ساز نواحی اول و سوم، رسم کنیم.

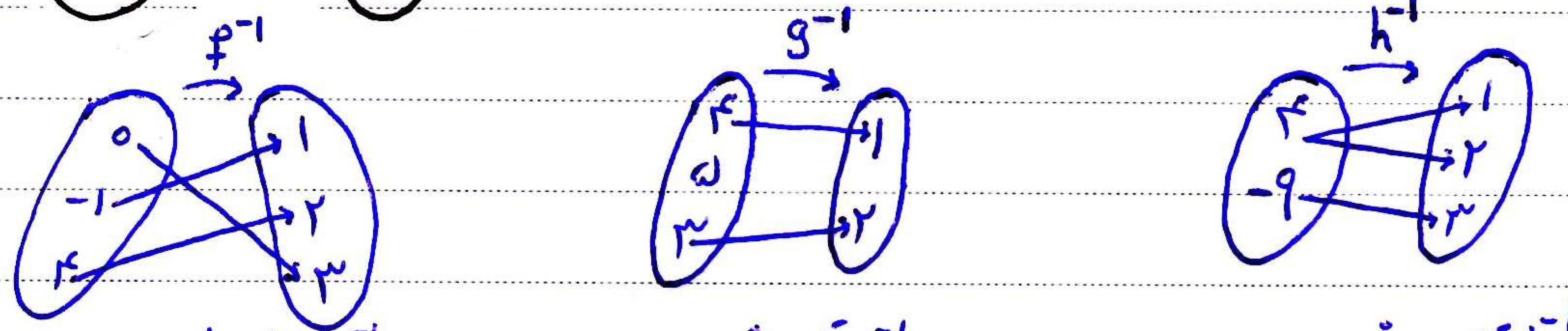




توجه: در توابع رسم شده‌ی صفحه قبل، f^{-1} تابع نیست ولی g^{-1} تابع است.

وارون توابع با نمودار پیکانی: کافیست جهت پیکان عوض شود. به طور مثال:





f^{-1} تابع است — g^{-1} تابع نیست — h^{-1} تابع نیست

وارون توابع ضابطه‌ای:

کافیست در معادله‌ی $y=f(x)$ ، x را برحسب y محاسبه کرده سپس با جابجا کردن x و y ، ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ را بدست آوریم.

مثال: $f(x)=2x+1$

$\Rightarrow 2x+1=y$

$\Rightarrow 2x=y-1$

$\Rightarrow x=\dfrac{y-1}{2} \xrightarrow{\text{جابجا کردن } x \text{ و } y} y=\dfrac{x-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{2}$ تابع است

مثال: $g(x)=x^2-1$

$\Rightarrow x^2-1=y$

$\Rightarrow x^2=y+1$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{y+1} \xrightarrow{\text{جابجا کردن } x \text{ و } y} y=\pm\sqrt{x+1} \Rightarrow g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x+1}$ تابع نیست

دقت کن: اگر وارون تابع f (یعنی f^{-1}) تابع باشد، آنگاه f^{-1} را تابع وارون گوییم و در اصطلاح گوییم f وارون پذیر است.

* بنابراین در مثال های قبل تابع $g(x)$ وارون پذیر نیست (g^{-1} تابع نیست) ولی تابع f وارون پذیر است و تابع وارون آن $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$ است.

مثال: تابع وارون هر یک از توابع وارون پذیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{-7x+3}{5}$

$$\frac{-7x+3}{5}=y \Rightarrow -7x+3=5y \Rightarrow -7x=5y-3 \Rightarrow x=\frac{5y-3}{-7}$$

$$\xrightarrow{\text{جابجایی } x \text{ و } y} y=\frac{5x-3}{-7} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{5x-3}{-7}$$

ب) $g(x)=\sqrt[3]{x-1}+2$

$$\sqrt[3]{x-1}+2=y \Rightarrow \sqrt[3]{x-1}=y-2 \longrightarrow x-1=(y-2)^3 \Rightarrow x=(y-2)^3+1$$

$$\xrightarrow{\text{جابجایی } x \text{ و } y} y=(x-2)^3+1 \Rightarrow g^{-1}(x)=(x-2)^3+1$$

پ) $h(x)=\frac{x+1}{x-2}$

$$\frac{x+1}{x-2}=y \Rightarrow x+1=xy-2y \Rightarrow x-xy=-2y-1 \Rightarrow x(1-y)=-2y-1 \Rightarrow x=\frac{-2y-1}{1-y}$$

$$\xrightarrow{\text{جابجایی } x \text{ و } y} y=\frac{-2x-1}{1-x} \Rightarrow h^{-1}(x)=\frac{-2x-1}{1-x}$$

نوجه: طبق تعریف وارون تابع، اگر $(a,b) \in f$ ، آنگاه $(b,a) \in f^{-1}$ است. به عبارت دیگر از $f(a)=b$ نتیجه می‌شود $f^{-1}(b)=a$.

مثال: با فرض $f=\{(1,2),(3,-1),(2,4)\}$ و $g=\{(1,2),(4,-1),(2,0)\}$

مطلوبست:

الف) $f^{-1}(-1)$ $\xrightarrow{f(3)=-1} f^{-1}(-1)=3$

ب) $g^{-1}(0)$ $\xrightarrow{g(2)=0} g^{-1}(0)=2$

پ) $f(g^{-1}(2)) = f(1) = 2$

ت) $g(f^{-1}(4)) = g(2) = 0$

مثال: به ازای چه مقدار از a ، نمودار تابع وارون تابع $f(x)=x^3+a$ از نقطه‌ی $(2,-1)$ می‌گذرد؟

$(2,-1) \in f^{-1} \Rightarrow (-1,2) \in f \Rightarrow f(-1)=2$

$\xrightarrow{f(x)=x^3+a} (-1)^3+a=2 \Rightarrow -1+a=2 \Rightarrow a=3$

روزی شخصی در حال نماز خواندن در محلی بود و مجنون بدون اینکه متوجه شود از بین او و سجاده اش عبور کرد . مرد نمازش را قطع کرد و داد زد هی ! چرا بین من و معبودم فاصله انداختی ؟

مجنون به خود آمد و گفت : من که عاشق لیلی هستم تو را ندیدم ، تو که خود را عاشق آفریدگار لیلی می خوانی چگونه مرا دیدی!

تابع یک به یک :

دیدیم که بعضی از توابع وارون پذیرند یعنی وارون آنها تابع است.
این نوع توابع را تابع های یک به یک گوییم.

به تابعی که در زوج های مرتب متفاوت خود، مؤلفه های دوم تکراری نداشته باشد، تابع یک به یک گوییم.
به عبارت دیگر به ازای طول های متمایز، عرض های متفاوت تعریف شده باشد.

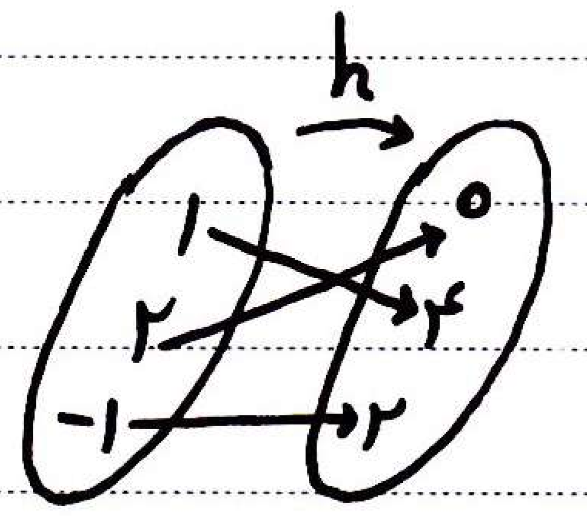
مثال: کدام یک از توابع زیر، تابع یک به یک اند؟

الف) $f=\{(-1,2),(2,3),(3,-1),(4,5)\}$ ⟵ f یک به یک است.

ب) $g=\{(2,3),(6,4),(7,-1),(5,3)\}$

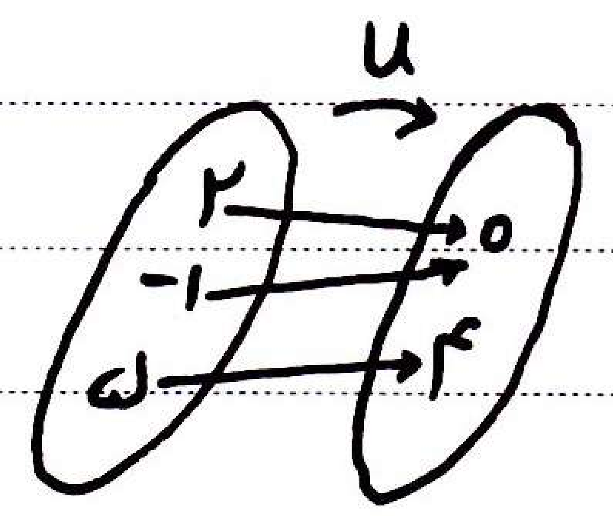
g یک به یک نیست زیرا:
برای دو طول متمایز ۲ و ۵ ، عرض یکسان تعریف شده است.

پ)



⟵ h یک به یک است.

ت)



⟵ u یک به یک نیست زیرا برای دو طول متمایز ۲ و ۱- عرض یکسان تعریف شده است.

مثال : چند تابع یک به یک از مجموعه‌ی $A=\{1,2,3,4\}$ به مجموعه‌ی $B=\{-2,0,2,4,6\}$ می توان تعریف کرد؟

می‌دانیم که x از A و y از B انتخاب می‌شوند. بنابراین:

تعداد حالات انتخاب y : ۵ (x=1) ، ۴ (x=2) ، ۳ (x=3) ، ۲ (x=4) $\xrightarrow{\times}$ ۱۲۰

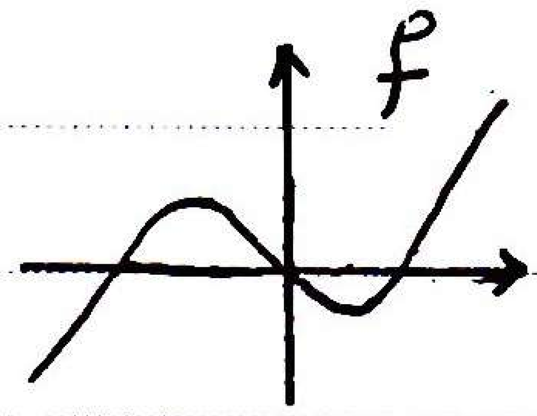
۱۲۰ تابع یک به یک از A به B قابل تعریف است.

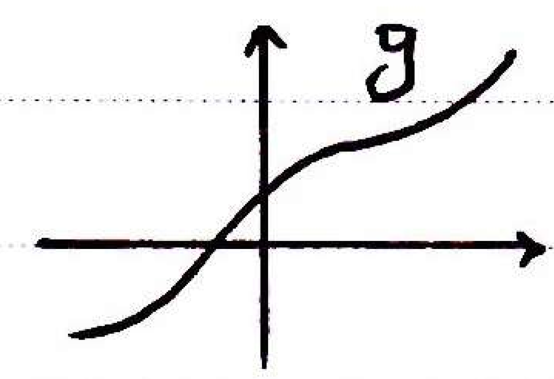
مثال : به ازای چه مقدار از m تابع $f=\{(-1,3),(2,4),(m-4,3),(7,m^2)\}$ تابع یک به یک است؟

دو زوج مرتب $(m-4,3)$ و $(-1,3)$ دارای عرض های یکسان هستند.
به شرطی f یک به یک است که طول های این دو، برابر باشند، پس:

$m-4=-1 \Rightarrow m=3$

توجه : به لحاظ نمودار هندسی، در صورتی تابع یک به یک است، که هر خط افقی آن را در بیش از یک نقطه قطع نکند.

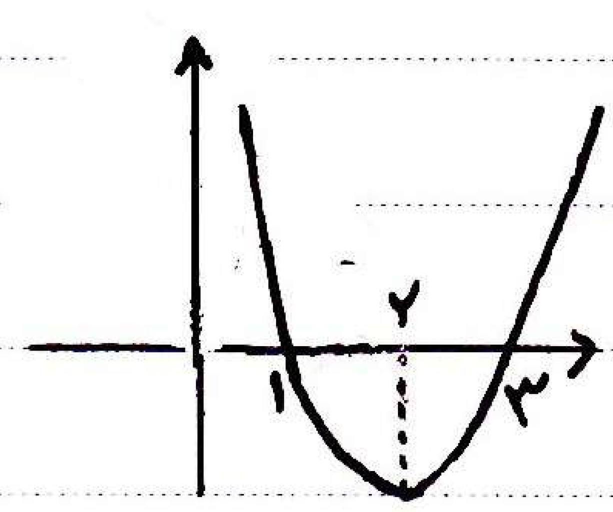




f یک به یک نیست زیرا وجود دارد خط افقی که آن را در بیش از یک نقطه قطع کند.

ولی تابع g یک به یک است زیرا وجود ندارد خط افقی که آن را در بیش از یک نقطه قطع کند.

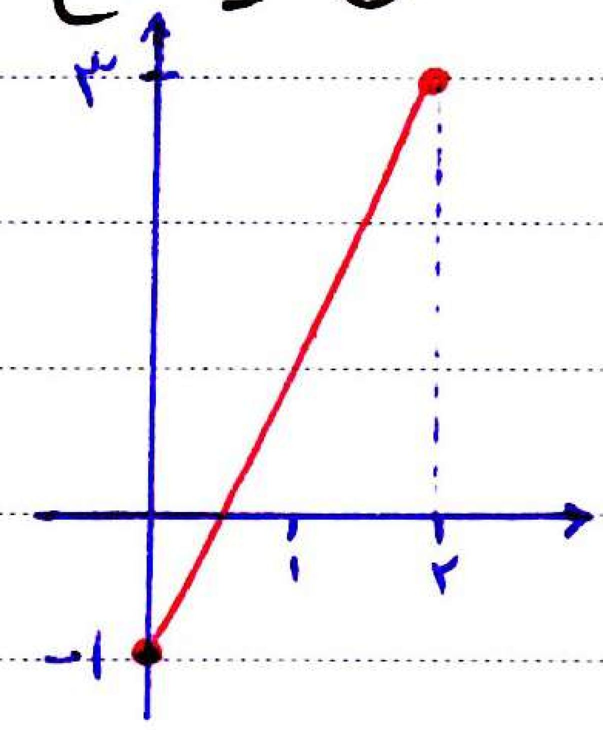
مثال : با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل، دامنه‌ی f را چنان محدود کنید که f یک به یک باشد.



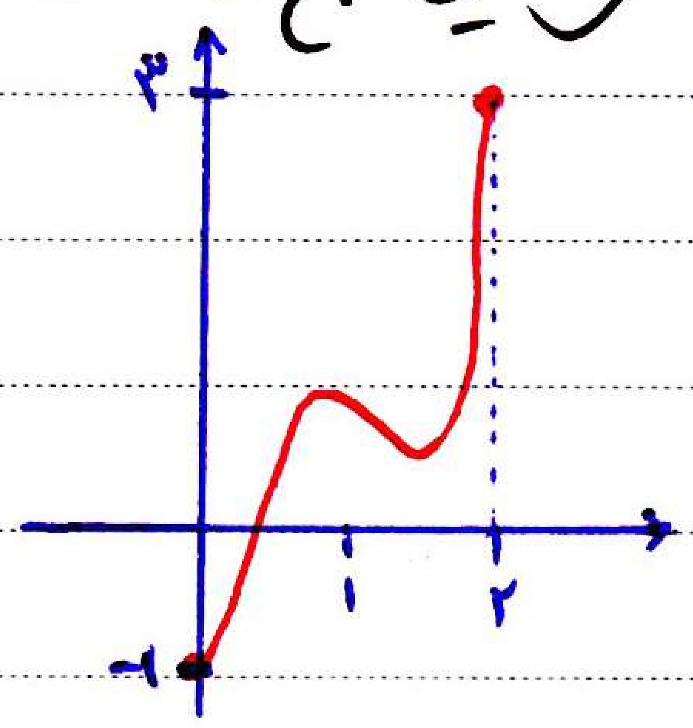
برای این سؤال بی‌شمار پاسخ می‌توان نوشت. بطور مثال اگر دامنه‌ی تابع به صورت $(-\infty,2]$ یا $[2,+\infty)$ یا $(-\infty,1)$ یا $(2.5,+\infty)$ یا ... تعریف شود f یک به یک است.

مثال: نمودار تابعی با دامنه [۰,۲] و برد [-۱,۳] را رسم کنید.

الف) به شرطی که این تابع یک به یک باشه.



ب) به شرطی که این تابع یک به یک نباشه.



نحوهٔ اثبات یک به یک بودن توابع ضابطه‌ای:

با فرض $f(a)=f(b)$ شروع به ساده کردن تساوی می‌کنیم اگر فقط به تساوی $a=b$ رسیدیم، گوییم تابع یک به یک است.

مثال: نشان دهید توابع زیر یک به یک اند.

الف) $f(x)=2x+5$

$f(a)=f(b) \Rightarrow 2a+\cancel{5}=2b+\cancel{5} \Rightarrow 2a=2b \xRightarrow{\div 2} a=b \longrightarrow$ f یک به یک است

ب) $g(x)=\dfrac{x-1}{2+x}$

$g(a)=g(b) \Rightarrow \dfrac{a-1}{2+a}=\dfrac{b-1}{2+b} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2a\cancel{-2}+\cancel{ab}-b=2b\cancel{-2}+\cancel{ab}-a$

$\Rightarrow 2a+a=2b+b \Rightarrow 3a=3b \xRightarrow{\div 3} a=b \longrightarrow$ g یک به یک است

ب) $h(x)=\sqrt{x^3-1}$

$h(a)=h(b) \Rightarrow \sqrt{a^3-1}=\sqrt{b^3-1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^3\cancel{-1}=b^3\cancel{-1} \Rightarrow a^3=b^3$

$\xrightarrow{\text{ریشه سوم}} a=b \Rightarrow$ h یک به یک است

مثال: آیا تابع $f(x)=x^2+3$ یک به یک است؟

$f(a)=f(b) \Rightarrow a^2+3=b^2+3 \Rightarrow a^2=b^2 \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} a=\pm b \rightarrow$ یک به یک نیست

توجه: برای این که نشان دهیم یک تابع یک به یک نیست، کافیست نشان دهیم دو طول متمایز آن دارای عرض یکسان هستند.

به عنوان نمونه در مثال قبل $f(x)=x^2+3$ داریم:

x	1	-1
y	4	4

$\Rightarrow$ f یک به یک نیست

مثال: نشان دهید توابع زیر یک به یک نیستند.

الف) $f(x)=2|x|-5$

x	1	-1
y	-3	-3

$\Rightarrow$ f یک به یک نیست

ب) $g(x)=x-[x]$

x	$1/5$	$2/5$
y	$0/5$	$0/5$

$\Rightarrow$ g یک به یک نیست

پ) $h(x)=\sin x$

x	0°	180°
y	0	0

$\Rightarrow$ h یک به یک نیست

ت) $p(x)=x^2-3x+1$

x	0	3
y	1	1

$\Rightarrow$ p یک به یک نیست

حرف آخر: تابع وقتی وارون پذیر است که یک به یک باشد

به عبارت دیگر ، اگر تابعی یک به یک نباشد ، گوییم : تابع وارون پذیر نیست.

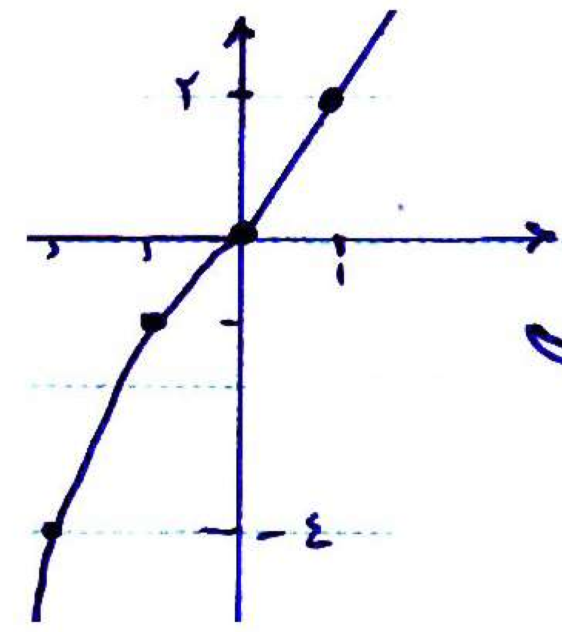
حل چند نمونه سوال

۱- به کمک رسم شکل یک به یک بودن توابع زیر را بررسی کنید .

الف) $f(x)=\begin{cases}2x & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$

x	0	1
y	0	2

x	0	-1	-2
y	0	-1	-4



یک به یک است

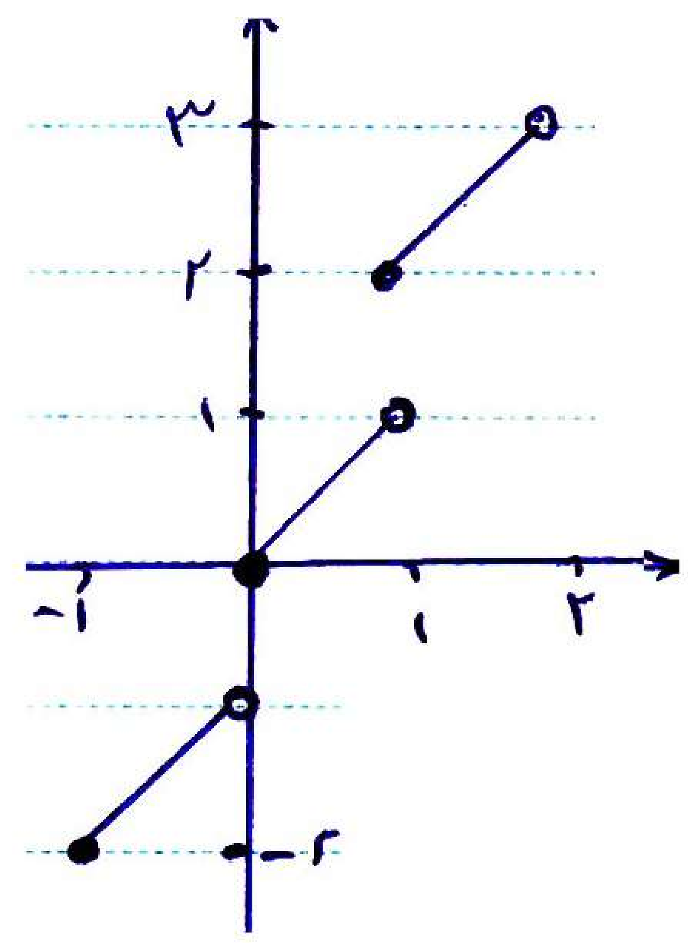
ب) $g(x)=x+[x]\quad,\quad -1\leq x<2$

$g(x)=\begin{cases}x-1 & -1\leq x<0\\ x & 0\leq x<1\\ x+1 & 1\leq x<2\end{cases}$

x	-1	0
y	-2	-1

x	0	1
y	0	1

x	1	2
y	2	3



g یک به یک است .

۲- آیا تابع $f(x)=\frac{2}{5}$ وارون تابع $g(x)=\frac{5}{2}$ است ؟ خیر

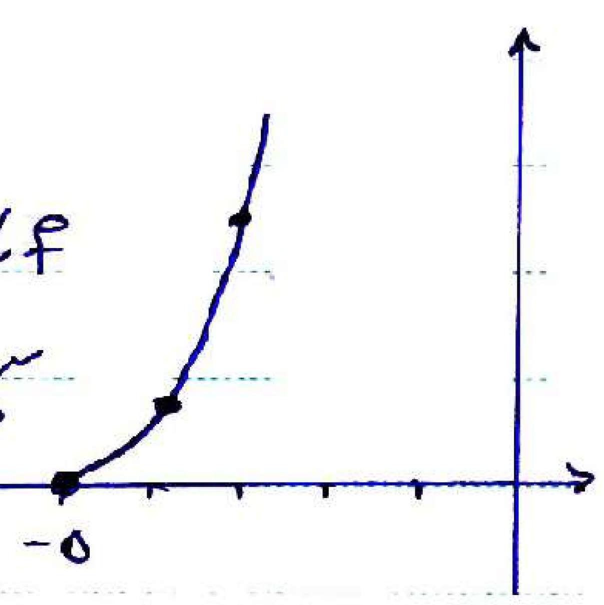
۳- به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند بدست آورید.

الف) $f(x)=(x+5)^2\quad,\quad x\geq -5$

x	-5	-4	-3
y	0	1	4

$(x+5)^2=y$
$\Rightarrow x+5=\sqrt{y}$
$\Rightarrow x=\sqrt{y}-5$
$\Rightarrow y=\sqrt{x}-5 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}-5$

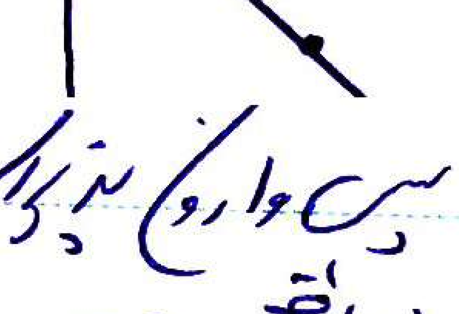
f یک به یک است
پس وارون پذیر است



ب) $f(x)=-|x-1|+1\quad,\quad x\geq 2$

$x\geq 2 \longrightarrow f(x)=-(x-1)+1 \Rightarrow f(x)=-x+2$

x	2	3
y	0	-1

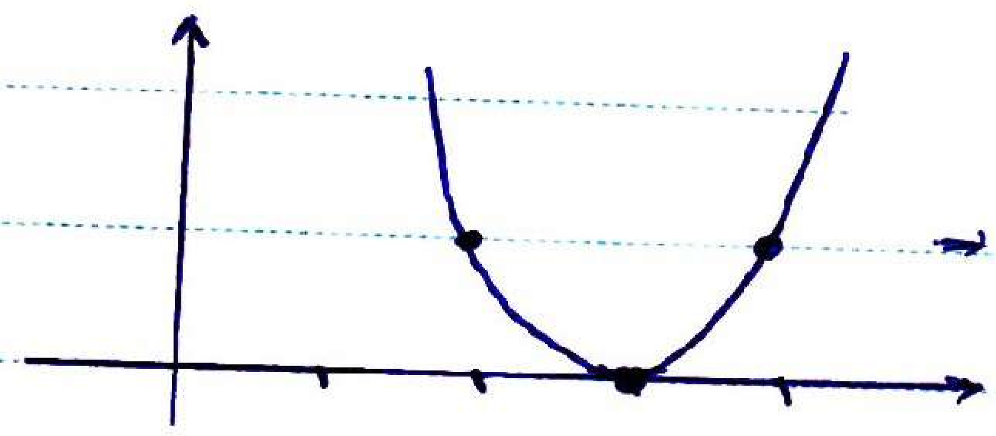


یک به یک است پس وارون پذیر است .

$-x+2=y \Rightarrow -x=y-2 \Longrightarrow x=-y+2 \xRightarrow{\text{ت ن}} y=-x+2 \Longrightarrow f^{-1}(x)=-x+2$

ب) $f(x)=(x-3)^2$

x	۲	۳	۴
y	۱	۰	۱



یک به یک نیست ⇐ وارون پذیر نیست

ت) $f(x)=\sqrt{x+2}-3$

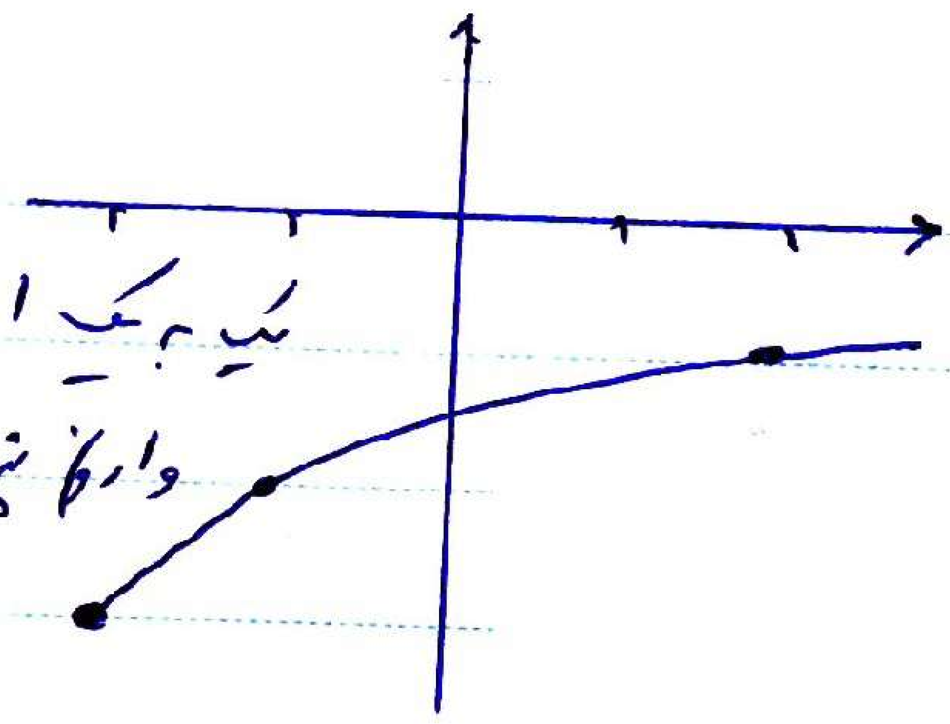
x	-2	-1	2
y	-3	-2	1

$\sqrt{x+2}-3=y \rightarrow \sqrt{x+2}=y+3$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x+2=(y+3)^2 \rightarrow x=(y+3)^2-2$

$\xrightarrow{\text{تعویض}} y=(x+3)^2-2 \Rightarrow f^{-1}(x)=(x+3)^2-2$

یک به یک است پس وارون پذیر است



۴- اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه $h(t)=100-5t^2$ بدست می‌آید.

الف) دامنه و برد h را بدست آورید. ب) چرا h تابعی یک به یک است؟ پ) تابع وارون h را بنویسید.

الف) زمان شروع $t=0$ است.

$100-5t^2=0 \Rightarrow 5t^2=100 \Rightarrow t^2=20 \Rightarrow t=\sqrt{20}$ زمان پایان یعنی برخورد سنگ به زمین:

$\Rightarrow D_h=[0,\sqrt{20}]$ ، $R_h=[0,100]$

ب) $h(a)=h(b) \Rightarrow 100-5a^2=100-5b^2 \Rightarrow -5a^2=-5b^2 \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow a=b$

h یک به یک است ⟸ وارون پذیر است

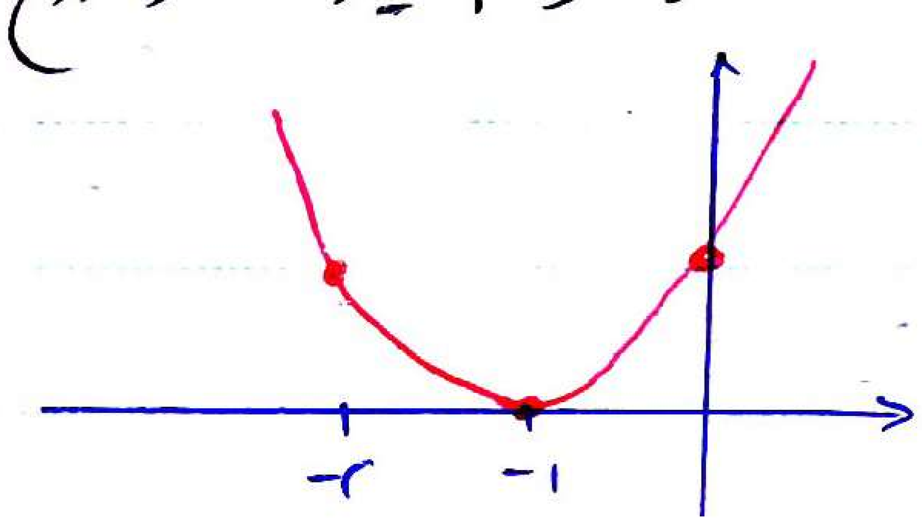
پ) $100-5t^2=y \Rightarrow -5t^2=y-100 \Rightarrow t^2=\frac{y-100}{-5} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{y-100}{-5}}$

$\longrightarrow y=\sqrt{\frac{t-100}{-5}} \Rightarrow h^{-1}(t)=\sqrt{\frac{t-100}{-5}}$

۵- نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x ، $x<f(x)$.

$f(x)=(x+1)^2$

x	-2	-1	0
y	۱	۰	۱



۶- وارون تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

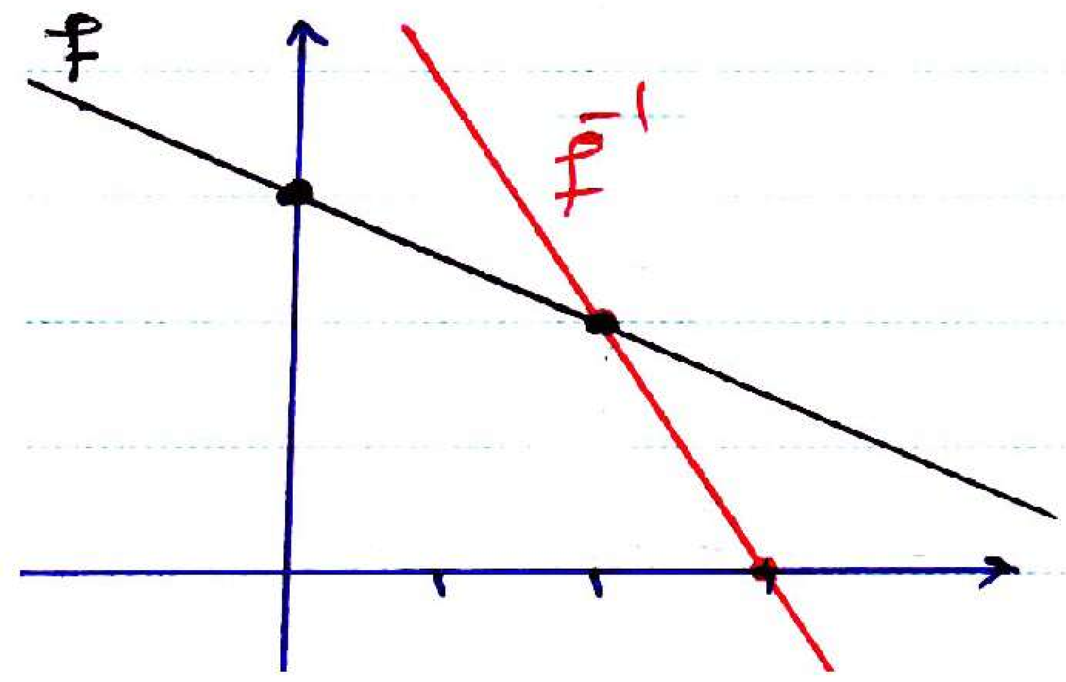
$-\frac{1}{2}x + 3 = y \Longrightarrow -\frac{1}{2}x = y - 3 \xrightarrow{\times(-2)} x = -2y + 6 \xrightarrow{\text{تبدیل}} y = -2x + 6 \Rightarrow f^{-1}(x) = -2x + 6$

$f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

x	۰	۲
y	۳	۲

$f^{-1}(x) = -2x + 6$

x	۳	۲
y	۰	۲



۷- اگر $f(x) = 2x - 5$ ، مطلوب است $f^{-1}(9)$.

$2x - 5 = 9 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7 \longrightarrow f^{-1}(9) = 7$

در صورتی که $f(1) = 2f(-1) = 4$ باشد مطلوب است: $\frac{2 + f^{-1}(2)}{f(1) - 2}$

$\hookrightarrow f(1) = 4 \quad , \quad f(-1) = 2$

$\downarrow$

$f^{-1}(2) = -1$

$\text{کسر} = \frac{2 + (-1)}{4 - 2} = \frac{1}{2}$