۱- به کمک نتیجه‌ی تمرین ۹، حاده (تند) ، قائمه یا منفرجه (باز) بودن زاویه‌ی A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید.

الف) $BC = ۹ \;,\; AC = ۶ \;,\; AB = ۱۰$

ب) $BC = ۹ \;,\; AC = ۴ \;,\; AB = ۸$

پ) $BC = ۱۷ \;,\; AC = ۱۵ \;,\; AB = ۸$

« **پاسخ** »

الف) $a = ۹ \;,\; b = ۶ \;,\; c = ۱۰$

$$a^۲ = ۸۱ \;,\; b^۲ + c^۲ = ۱۳۶ \Rightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} < ۹۰^\circ$$

ب) $a = ۹ \;,\; b = ۴ \;,\; c = ۸$

$$a^۲ = ۸۱ \;,\; b^۲ + c^۲ = ۸۰ \Rightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} > ۹۰^\circ$$

پ) $a = ۱۷ \;,\; b = ۱۵ \;,\; c = ۸$

$$a^۲ = ۲۸۹ \;,\; b^۲ + c^۲ = ۲۸۹ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \widehat{A} = ۹۰^\circ$$

۲- به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC:

الف) $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ > b^۲ > c^۲$

ب) $\widehat{A} < ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ < b^۲ + c^۲$

پ) $\widehat{A} = ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ = b^۲ + c^۲$

« **پاسخ** »

الف) $$\widehat{A} > ۹۰^\circ \Leftrightarrow \operatorname{Cos} A < ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\operatorname{Cos} A < ۰ \Leftrightarrow -bc.\operatorname{Cos} A > ۰$$

$$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\operatorname{Cos} A > b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ > b^۲ + c^۲$$

ب) $$\widehat{A} < ۹۰^\circ \Leftrightarrow \operatorname{Cos} A > ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\operatorname{Cos} A > ۰ \Leftrightarrow -bc.\operatorname{Cos} A < ۰$$

$$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\operatorname{Cos} a < b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ < b^۲ + c^۲$$

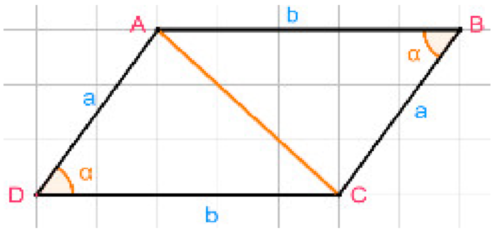
پ) $$\widehat{A} = ۹۰^\circ \Leftrightarrow \operatorname{Cos} A = ۰ \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\longrightarrow}} bc.\operatorname{Cos} A = ۰ \Leftrightarrow -bc.\operatorname{Cos} A = ۰$$

$$\underset{-(b^۲+c^۲)}{\overset{+(b^۲+c^۲)}{\rightleftarrows}} b^۲ + c^۲ - bc.\operatorname{Cos} A = b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

۳- ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن دو ضلع.

« **پاسخ** »

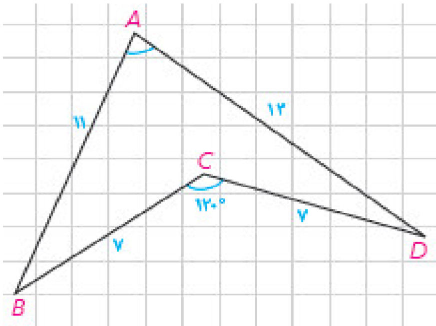
با توجه به خواص متوازی‌الاضلاع داریم:



$$S_{ABCD} = ۲S_{ABC} = ۲ \times \frac{۱}{۲} \times a \times b \times \text{Sin}\alpha$$
$$\Rightarrow S_{ABCD} = a.b\,\text{Sin}\alpha$$

۴- در شکل، اولاً اندازه‌ی زاویه‌ی A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید.

راهنمایی: B را به D وصل کنید.



« **پاسخ** »

مثلث BCD متساوی‌الساقین است و با توجه به اندازه‌ی زاویه C، اندازه‌ی دو زاویه دیگر هر کدام ۳۰° خواهد بود.

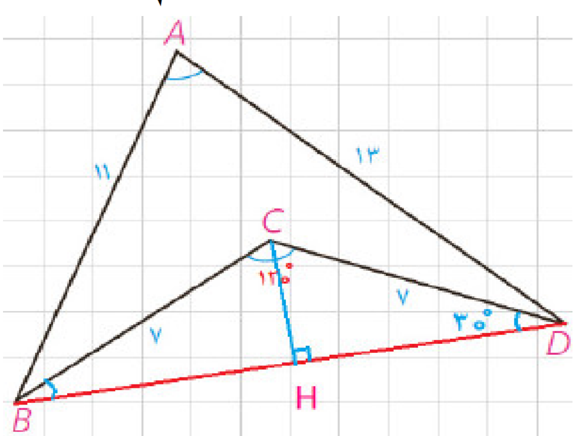
در این مثلث ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه CHD، $\widehat{CDH} = ۳۰°$ در نتیجه: $CH = \frac{۷}{۲}$

$$\left.\begin{array}{l} S_{BCD} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۲} \times BD = \frac{۷}{۴}BD \\ S_{BCD} = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۷ \times \sin ۱۲۰° = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۷}{۴}BD = \frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow BD = ۷\sqrt{۳}$$

$$P_{ABD} = \frac{۱۱ + ۱۳ + ۷\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۷\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱۱\right)\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱۳\right)}$$

$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۲ + \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(۱۲ - \frac{۷}{۲}\sqrt{۳}\right)\left(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳} + ۱\right)\left(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳} - ۱\right)}$$



$$S_{ABD} = \sqrt{\left(۱۴۴ - \frac{۱۴۷}{۴}\right)\left(\frac{۱۴۷}{۴} - ۱\right)} = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} \quad (۱)$$

$$S_{ABD} = \frac{۱}{۲} \times ۱۱ \times ۱۳ \times \sin A = \frac{۱۴۳}{۲}\sin A \quad (۲)$$

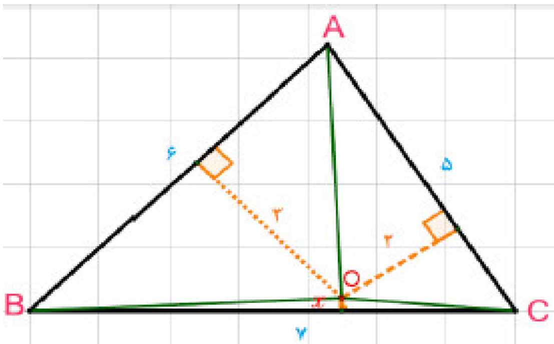
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۱۴۳}{۲}\sin A = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \widehat{A} = ۶۰$$

$$S_{ABCD} = S_{ABD} - S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳} - \frac{۴۹}{۴}\sqrt{۳} = \frac{۹۴}{۴}\sqrt{۳}$$

۵- در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصله‌ی ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟
راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.

« **پاسخ** »



$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$P_{ABC} = \frac{۵+۶+۷}{۲} = ۹$$

$$S_{ABC} = \sqrt{۹ \times ۲ \times ۳ \times ۴} = ۶\sqrt{۶}$$

$$S_{AOB} = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۳ = ۹$$

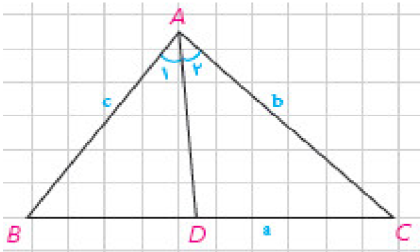
$$S_{AOC} = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۲ = ۵$$

$$S_{BOC} = \frac{۱}{۲} \times ۷ \times x = \frac{۷}{۲}x$$

$$۶\sqrt{۶} = ۹ + ۵ + \frac{۷}{۲}x \Rightarrow ۶\sqrt{۶} - ۱۴ = \frac{۷}{۲}x \Rightarrow x = \frac{۲}{۷}\left(۶\sqrt{۶} - ۱۴\right) \approx ۰/۲$$

۶- در شکل زیر AD نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبه‌ی طول نیمساز زاویه‌ی A به دست آورید.



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB.\,AC.\,\operatorname{Sin}A$$

$$= \frac{۱}{۲}\ldots \times \ldots \times \operatorname{Sin}\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲}\ldots \times \ldots \times \operatorname{Sin}\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.\,AC.\,\operatorname{Sin}A = AD.\,\operatorname{Sin}\frac{A}{۲}(\ldots + \ldots)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB.\,AC.\,\operatorname{Sin}A}{(\ldots + \ldots)\,\operatorname{Sin}\frac{A}{۲}} = \frac{۲AB.\,AC.\,\operatorname{Sin}\frac{A}{۲}\operatorname{Cos}\frac{A}{۲}}{(\ldots + \ldots)\operatorname{Sin}\frac{A}{۲}} \Rightarrow AD = \ldots$$

$$\Rightarrow (\text{نیمساز راس } A)\ d_a = \frac{۲bc.\,\operatorname{Cos}\frac{A}{۲}}{b + c}$$

« **پاسخ** »

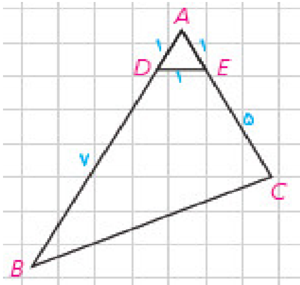
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\frac{۱}{۲}AB.\,AC.\,\operatorname{Sin}A = \frac{۱}{۲}AB \times AD \times \operatorname{Sin}\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲}AC \times AD \times \operatorname{Sin}\frac{A}{۲}$$

$$\Rightarrow AB.\,AC.\,\operatorname{Sin}A = AD.\,\operatorname{Sin}\frac{A}{۲}(AB + AC) \Rightarrow AD = \frac{AB.\,AC.\,\operatorname{Sin}A}{(AB + AC)\operatorname{Sin}\frac{A}{۲}}$$

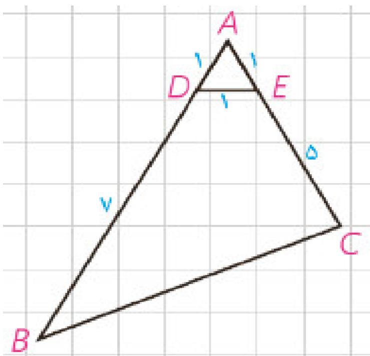
$$= \frac{۲AB.\,AC.\,\operatorname{Sin}\frac{A}{۲}\operatorname{Cos}\frac{A}{۲}}{(AB + AC)\operatorname{Sin}\frac{A}{۲}} \Rightarrow AD = d_a \Rightarrow (\text{نیمساز راس } A)d_a = \frac{۲bc.\,\operatorname{Cos}\frac{A}{۲}}{b + c}$$

۷- در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



« **پاسخ** »

با توجه به این‌که مثلث ADE متساوی‌الساقین است پس $\widehat{DAE} = ۶۰°$ در نتیجه:



$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC.AB.\operatorname{Cos}A$$

$$BC^۲ = ۳۶ + ۶۴ - ۲ \times ۶ \times ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۵۲$$

$$\Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۳}$$

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

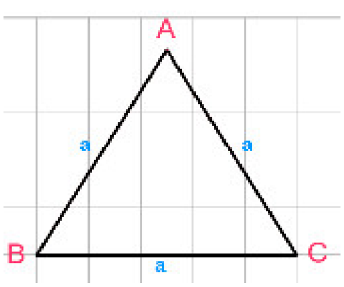
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}.AB.AC.\operatorname{Sin}A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۱^۲ = S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{BCED} = ۱۲\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$

۸- دستور محاسبه‌ی مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به دست آورید.

« **پاسخ** »

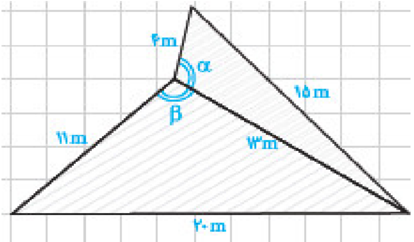


$$AB = AC = BC = a \Rightarrow P_{ABC} = \frac{۳a}{۲}$$

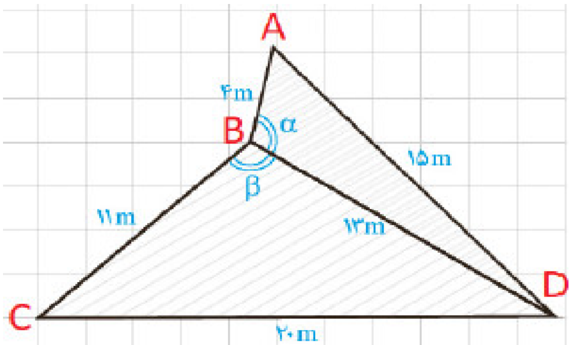
$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{۳a}{۲} \times \left(\frac{۳a}{۲} - a\right)^۳} = \sqrt{\frac{۳a}{۲} \times \left(\frac{a}{۲}\right)^۳}$$

$$= \sqrt{\frac{۳a^۴}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

۹- دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چه‌قدر می‌شود؟
نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد. $(\alpha = \beta)$



« **پاسخ** »

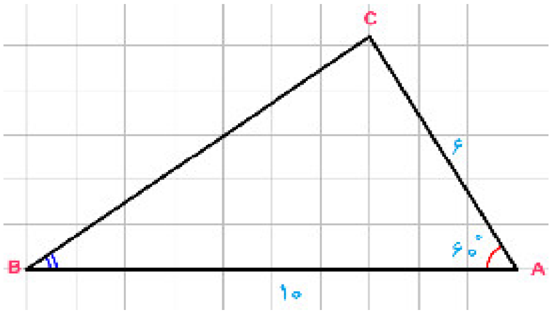


$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$
$$P_{ABD} = \frac{۴ + ۱۳ + ۱۵}{۲} = ۱۶m$$
$$P_{BCD} = \frac{۱۱ + ۱۳ + ۲۰}{۲} = ۲۲m$$

$$S_{ABD} = \sqrt{۱۶ \times ۱۲ \times ۳ \times ۱} = ۲۴m^{۲}$$
$$S_{BCD} = \sqrt{۲۲ \times ۱۱ \times ۹ \times ۲} = ۶۶m^{۲}$$
$$S_{ABCD} = ۲۴ + ۶۶ = ۹۰m^{۲}$$
$$\left.\begin{array}{l} S_{ABD} = \frac{۱}{۲}AB.BD.\sin\alpha \Rightarrow ۲۴ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱۳\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳} \\ S_{BCD} = \frac{۱}{۲}BC.DB.\sin\beta \Rightarrow ۶۶ = \frac{۱}{۲} \times ۱۱ \times ۱۳\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{۱۲}{۱۳} \end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$$

۱۰- در مثلث ABC، $AB = ۱۰$، $AC = ۶$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$. الف) طول BC را به دست آورید. ب) مساحت مثلث را تعیین کنید. پ) مقدار $\sin B$ را پیدا کنید.

« پاسخ »



الف) $BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC.AB.\cos A$

$BC^۲ = ۳۶ + ۱۰۰ - ۲ \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{۱}{۲} = ۷۶ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۹}$

ب) $\frac{۱}{۲}AC.AB.\sin A \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۱۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$

پ) $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \frac{\sin B}{۶} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}} \Rightarrow \sin B = \frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۹}} \Rightarrow \sin B = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$

۱۱- با پر کردن جاهای خالی با فرض این‌که در شکل مقابل AD نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

الف) چرا $DH = DH'$؟

ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times \ldots}{\frac{۱}{۲}DH \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} \quad (۱)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times \ldots}{\frac{۱}{۲}CD \times \ldots} = \frac{\ldots}{\ldots} \quad (۲)$$

از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

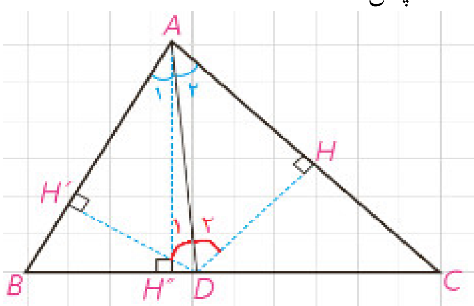
« پاسخ »

الف) راه اول:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}_۱ + \widehat{D}_۱ = ۹۰^\circ \\ \widehat{A}_۲ + \widehat{D}_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A}_۱ + \widehat{D}_۱ = \widehat{A}_۲ + \widehat{D}_۲ \xrightarrow{\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \ \widehat{D}_۱ = \widehat{D}_۲}$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \\ AD = AD \end{array}\right\} \rightarrow DH = DH'$$

راه دوم: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس $DH = DH'$



ب)

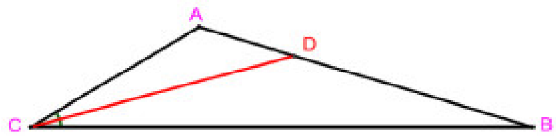
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times AB}{\frac{۱}{۲}DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \quad (۱)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times AH''}{\frac{۱}{۲}CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \quad (۲)$$

از مقایسه‌ی ۱ و ۲ نتیجه می‌شود: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

۱۲- در مثلث ABC، $AB = ۷$ و $AC = ۴$ و $BC = ۱۰$ است. طول نیمساز زاویه‌ی داخلی C را به دست آورید.

« **پاسخ** »



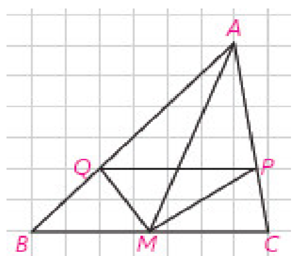
$$CD^۲ = AC.BC - AD.BC$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰}{۴} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰ + ۴}{۴} = \frac{BD + DA}{DA}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۴}{۴} = \frac{۷}{DA} \Rightarrow DA = \frac{۲۸}{۱۴} = ۲ \Rightarrow BD = ۷ - ۲ = ۵$$

$$CD^۲ = ۴ \times ۱۰ - ۲ \times ۵ = ۳۰ \Rightarrow CD = \sqrt{۳۰}$$

۱۳- در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند ؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$



« **پاسخ** »

در مثلث AMB پاره‌خط MQ نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره‌خط MP نیمساز زاویه $\widehat{AMC}$ است.

پس داریم:

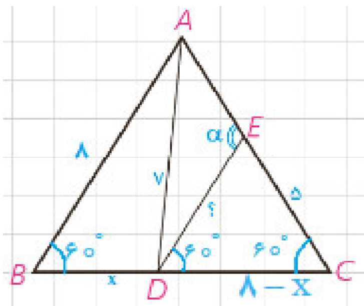
$$\left.\begin{array}{l} \frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{MB = MC} \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QB} \\ \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} PQ \parallel BC$$

۱۴- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ $(CD > BD)$

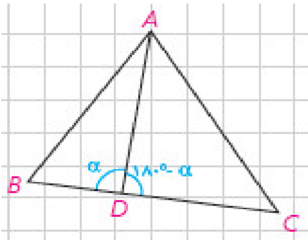
به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

« پاسخ »



$$AB = AC = BC = ۸ \, , \, AD = ۷ \, , \, DB = x$$
$$DC = x - ۸ \, , \, DB < DC$$
$$AB^{۲} . DC + AC^{۲} . DB = AD^{۲} . BC + DB . DC . BC$$
$$\Rightarrow ۶۴(۸ - x) + ۶۴x = ۴۹ \times ۸ + ۸x(۸ - x)$$
$$\Rightarrow ۶۴ \times ۸ - \cancel{۶۴x} + \cancel{۶۴x} = ۴۹ \times ۸ + ۸x(۸ - x)$$
$$\xrightarrow{\div ۸} ۶۴ = ۴۹ + ۸x - x^{۲} \Rightarrow x^{۲} - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x - ۵) = ۰ \Rightarrow x = ۳ \, , \, x = ۵$$
$$\xrightarrow{DB < DC} x = DB = ۳ \, , \, DC = ۵$$

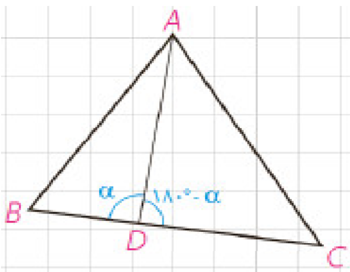
۱۵- در مثلث ABC، نقطه‌ی دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید:



$$AB^۲ . DC + AC^۲ . DB = AD^۲ . BC + DB . DC . BC$$ (قضیه‌ی استوارت)

به کمک قضیه‌ی استوارت، درستی قضیه‌ی میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

« **پاسخ** »



$$A\overset{\triangle}{B}D : AB^۲ = AD^۲ + DB^۲ - ۲AD . DB . Cos\alpha \xrightarrow{\times DC}$$

$$AB^۲ . DC = DC . AD^۲ + DC . DB^۲ - ۲DC . AD . DB . Cos\alpha \quad (۱)$$

$$A\overset{\triangle}{C}D : AC^۲ = AD^۲ + CD^۲ - ۲AD . DC . Cos(۱۸۰° - \alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^۲ . DB = DB . AD^۲ + DB . DC^۲ + ۲DB . AD . DC . Cos\alpha \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} AB^۲ . DC + AC^۲ . DB = DC . AD^۲ + DC . DB^۲ - \cancel{۲DC . AD . DB . Cos\alpha}$$

$$+ DB . AD^۲ + DB . DC^۲ + \cancel{۲DB . AD . DC . Cos\alpha} \Rightarrow AB^۲ . DC + AC^۲ . DB$$

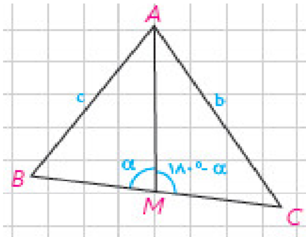
$$= AD^۲ \underbrace{(DC + DB)}_{BC} + BD . DC \underbrace{(DC + DB)}_{BC}$$

$$AB^۲ . DC + AC^۲ . DB = AD^۲ . BC + DB . DC . BC$$

$$DC = DB = \frac{a}{۲} , AC = b , \Rightarrow AB = c$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۲} \times c^۲ + \frac{a}{۲} \times b^۲ = AD^۲ \times a + \frac{a}{۲} \times \frac{a}{۲} \times a \Rightarrow \frac{a}{۲}(c^۲ + b^۲) = \frac{a}{۲}\left(۲AD^۲ + \frac{a^۲}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow b^۲ + c^۲ = ۲AD^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

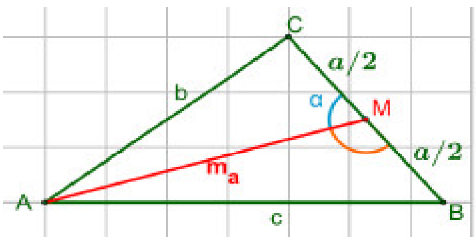


۱۶- در مثلث ABC، میانه‌ی AM را رسم کرده‌ایم $\left(MB = MC = \frac{a}{۲}\right)$. با نوشتن قضیه‌ی کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$ (قضیه‌ی میانه‌ها)

در حالت خاص $AB = ۴$ و $AC = ۶$ و $BC = ۸$، طول میانه AM را به دست آورید.

« **پاسخ** »



$$\overset{\triangle}{ACM} : b^۲ = \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + AM^۲ - ۲ \times \frac{a}{۲} \times m_a \times \cos\alpha$$

$$b^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ - a.AM.\cos\alpha \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{ABM} : c^۲ = \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ + AM^۲ - ۲ \times \frac{c}{۲} \times m_a \times \cos(۱۸۰^\circ - \alpha)$$

$$c^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ + a.AM.\cos\alpha \quad (۲)$$

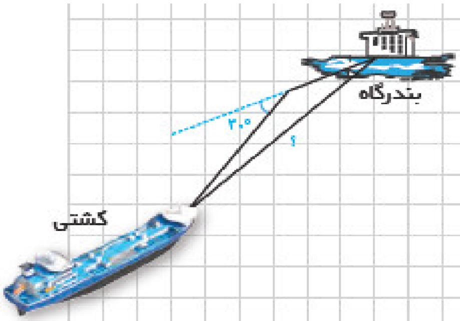
$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ - a.AM.\cos\alpha + \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ + a.AM.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲AM^۲$$

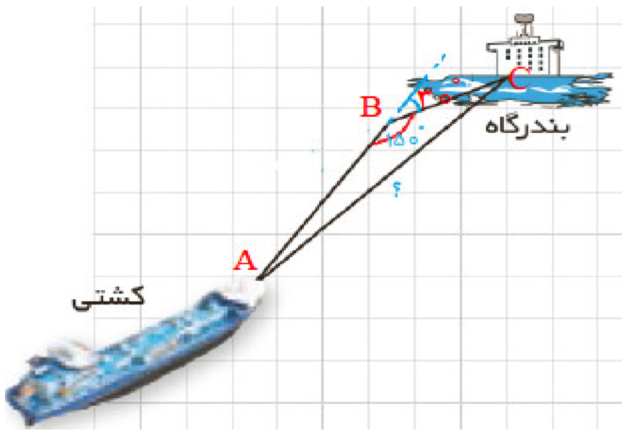
$AB = c = ۴ \ , \ AC = b = ۶ \ , \ BC = a = ۸$

$$b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲AM \Rightarrow AM = \frac{۲\left(b^۲ + c^۲\right) - a^۲}{۴} \Rightarrow AM = \frac{۲(۳۶ + ۱۶) - ۶۴}{۴} \Rightarrow AM = ۱۰$$

۱۷- یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با °۳۰ انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله‌ی بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



« **پاسخ** »



$$AB = ۶۰ \times ۱ = ۶۰\,km \;,\; BC = ۴۰ \times ۰/۵ = ۲۰\,km$$

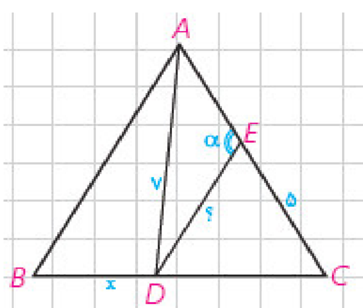
$$AC^{۲} = ۶۰^{۲} + ۲۰^{۲} - ۲ \times ۶۰ \times ۲۰ \times \cos ۱۵۰^\circ$$

$$= ۳۶۰۰ + ۴۰۰ - ۲ \times ۱۲۰۰ \times \left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

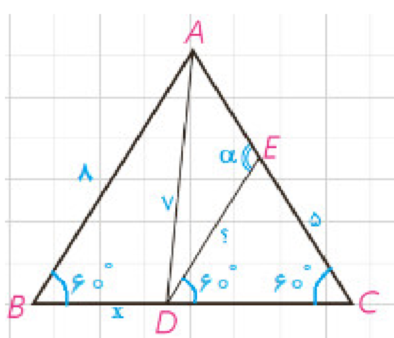
$$\Rightarrow AC^{۲} = ۴۰۰۰ + ۱۲۰۰\sqrt{۳} = ۴۰۰\left(۱۰ + ۳\sqrt{۳}\right)$$

$$\Rightarrow AC = ۲۰\sqrt{۱۰ + ۳\sqrt{۳}}$$

۱۸- در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطه‌ی D، که به فاصله‌ی ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟ $(CD > BD)$ نقطه‌ی E، که به فاصله‌ی ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه‌ی زاویه‌ی AED چند درجه است؟



« **پاسخ** »



$$۷^{۲} = x^{۲} + ۸^{۲} - ۲ \times x \times ۸ \times \sin ۶۰^\circ \Rightarrow ۴۹ = x^{۲} + ۶۴ - ۸x$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x - ۵)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۵ \;,\; x = ۳$$

$$\xrightarrow{BD < DC} BD = ۳ \;,\; DC = ۵$$

$DC = CE = ۵$ در نتیجه مثلث DCE متساوی‌الساقین است و چون یک زاویه °۶۰ دارد پس متساوی‌الاضلاع است یعنی $DE = ۵$. در مثلث DCE زاویه‌ی α یک زاویه خارجی است پس:

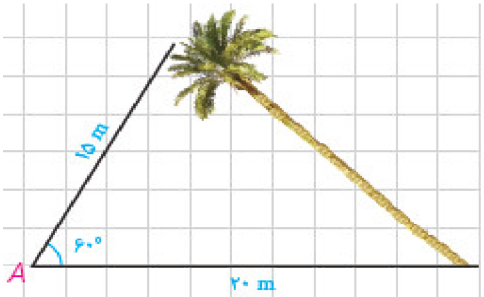
$$\alpha = ۶۰^\circ + ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۱۲۰^\circ$$

۱۹- یک درخت کج از نقطه‌ی A روی زمین، که در فاصله‌ی ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه‌ی °۶۰ دیده می‌شود. اگر فاصله‌ی A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:

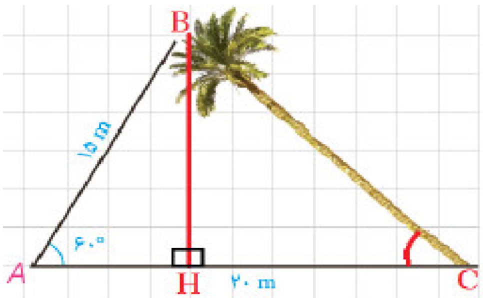
الف) طول درخت

ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

پ) فاصله‌ی نوک درخت از زمین



« **پاسخ** »



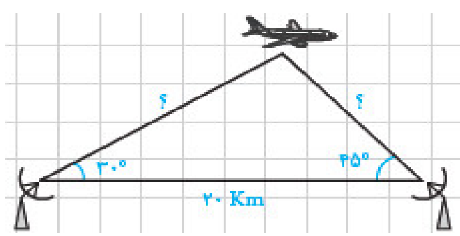
الف) $a^{۲} = ۲۰^{۲} + ۱۵^{۲} - ۲ \times ۲۰ \times ۱۵ \times \text{Cos}\,۶۰°$

$۴۰۰ + ۲۲۵ - ۳۰۰ \Rightarrow a^{۲} = ۳۲۵ \Rightarrow a = ۵\sqrt{۱۳}$

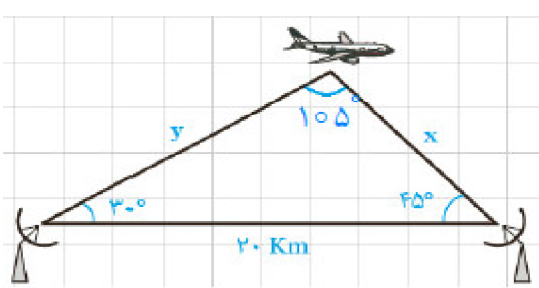
ب) $\dfrac{۵\sqrt{۱۳}}{\text{Sin}\,۶۰°} = \dfrac{۱۵}{\text{Sin}\,C} \Rightarrow \text{Sin}\,C = \dfrac{۱۵ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۵\sqrt{۱۳}} = \dfrac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۳}} \approx ۰/۷۲ \Rightarrow \hat{C} \approx ۴۶°$

پ) $\text{Sin}\,۶۰° = \dfrac{BH}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{۳}}{۲} = \dfrac{BH}{۱۵} \Rightarrow BH = \dfrac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$

۲۰- دو ایستگاه رادار، که در فاصله‌ی ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصله‌ی هواپیما را از دو ایستگاه به دست آورید.



« **پاسخ** »

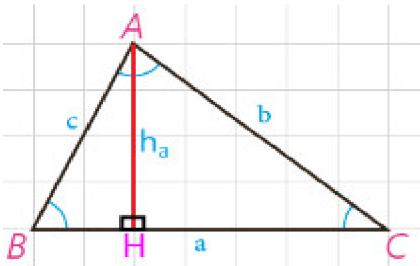


$$\frac{۲۰}{\text{Sin}\,۱۰۵°} = \frac{x}{\text{Sin}\,۳۰°} = \frac{y}{\text{Sin}\,۴۵°}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۲۰}{۰/۹۶} = \dfrac{x}{۰/۵} \Rightarrow x \approx ۱۰/۴۱۶ \\ \dfrac{۲۰}{۰/۹۶} = \dfrac{y}{۰/۷۰۷} \Rightarrow y \approx ۱۴/۷۲ \end{cases}$$

۲۱- ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ با ارتفاع $AH = h_a$ داریم: $\frac{۱}{h_a^۲} = \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲}$

« **پاسخ** »



$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{۱}{۲}bc \\ S &= \frac{۱}{۲}a.h_a \end{aligned}\right\} \Rightarrow bc = ah_a \xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}}$$

$$(bc)^۲ = (ah_a)^۲ \Rightarrow b^۲c^۲ = a^۲h_a^۲$$

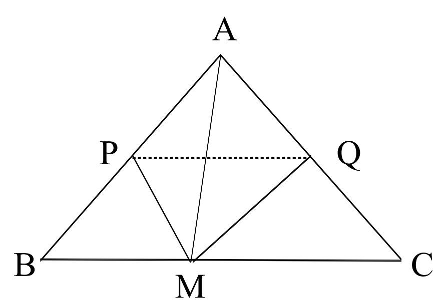
$$\Rightarrow b^۲c^۲ = (b^۲ + c^۲)h_a^۲ \Rightarrow b^۲c^۲ = b^۲h_a^۲ + c^۲h_a^۲ \xrightarrow{\div b^۲c^۲h_a^۲}$$

$$\frac{b^۲c^۲}{b^۲c^۲h_a^۲} = \frac{b^۲h_a^۲}{b^۲c^۲h_a^۲} + \frac{c^۲h_a^۲}{b^۲c^۲h_a^۲} \Rightarrow \frac{۱}{h_a^۲} = \frac{۱}{c^۲} + \frac{۱}{b^۲}$$

۲۲- در مثلث ABC میانه AM و نیم‌سازهای دو زاویه $A\hat{M}B$ و $A\hat{M}C$ را رسم کنید، این دو نیم‌ساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{aligned} \widehat{AMC} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MQ} \frac{MA}{MC} = \frac{AQ}{QC} \quad ۰/۲۵ \\ \widehat{AMB} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MP} \frac{MA}{MB} = \frac{AP}{PB} \quad ۰/۲۵ \end{aligned}\right\} \xrightarrow{MC=MB} \frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC \quad ۰/۲۵$$



۲۳- اندازه‌ی سه ضلع مثلثی $AB = ۱۶$ و $AC = ۲۲$ و $BC = ۱۹$ ، سانتی‌متر هستند. اندازه‌ی پاره‌خط هایی که نیم‌ساز درونی زاویه‌ی $\hat{A}$ بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را تعیین کنید.

« پاسخ »

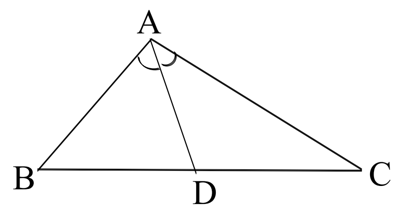
نیمساز زاویه $\hat{A}$ ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. بنابراین:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC + BD} = \frac{AB}{AC + AB} \rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC + AB}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{۱۹} = \frac{۱۶}{۳۸} \Rightarrow BD = ۸$$

$$\Rightarrow DC = ۱۹ - ۸ = ۱۱$$



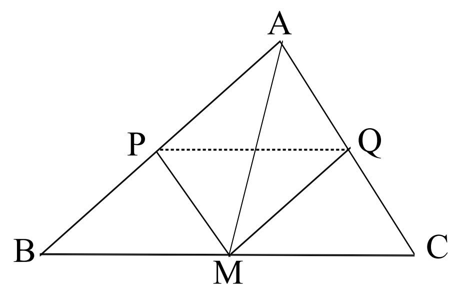
۲۴- در مثلث ABC میانه AM و نیمسازهای دو زاویه $A\hat{M}B$ و $A\hat{M}C$ را رسم کنید، این دو نیمساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازی‌اند.

« پاسخ »

$$\overset{\Delta}{AMC} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MQ} \frac{MA}{MC} = \frac{AQ}{QC} \quad ۰/۲۵$$

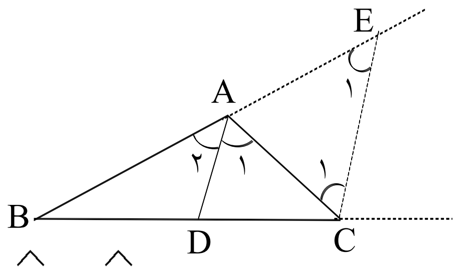
$$\xrightarrow{MC=MB} \underset{۰/۲۵}{\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} \underset{۰/۲۵}{PQ \parallel BC}$$

$$\overset{\Delta}{AMB} \xrightarrow[\text{نیمساز}]{MP} \frac{MA}{MB} = \frac{AP}{PB} \quad ۰/۲۵$$



۲۵- قضیه: ثابت کنید در هر مثلث نیم‌ساز هر زاویه‌ی داخلی، ضلع روبه‌رو آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

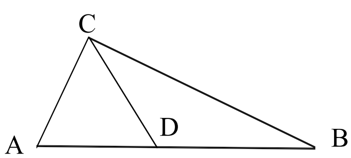
« **پاسخ** »



برهان: فرض کنیم AD نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A باشد ضلع‌های BA و BC را امتداد می‌دهیم و از رأس C خطی به موازات نیم‌ساز زاویه‌ی A (یعنی AD) رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند. ۰/۲۵ چون AD موازی CE است، اگر AC را به‌عنوان خط مورب در نظر بگیریم آن‌گاه: $(۱)\quad \widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱$ ، و اگر BE را به‌عنوان خط مورب آن‌ها در نظر بگیریم آن‌گاه $(۲)\quad \widehat{A}_۲ = \widehat{E}_۱$ ۰/۲۵ ، از طرفی طبق فرض مسأله، AD نیم‌ساز است در نتیجه: $(۳)\quad \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$ ، حال از رابطه‌های (۱) ، (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت: $\widehat{C}_۱ = \widehat{E}_۱$ ۰/۲۵ ، پس مثلث AEC متساوی‌الساقین است و $(۴)\quad AE = AC$ ۰/۲۵ ، در مثلث BEC ، AD موازی EC است، پس طبق قضیه‌ی تالس داریم: $(۵)\quad \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}$ ۰/۲۵ ، با توجه به رابطه‌ی (۴) اگر در رابطه‌ی (۵) به‌جای AE مساوی آن AC را جایگزین کنیم، خواهیم داشت: ۰/۲۵ $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ که حکم ثابت می‌شود.

۲۶- سه ضلع مثلثی $BC = ۶$, $AC = ۴$ و $AB = ۵$ سانتی‌متر می‌باشد. اندازه‌ی پاره‌خطهایی را که نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی C بر ضلع AB ایجاد می‌کند تعیین کنید.

« **پاسخ** »



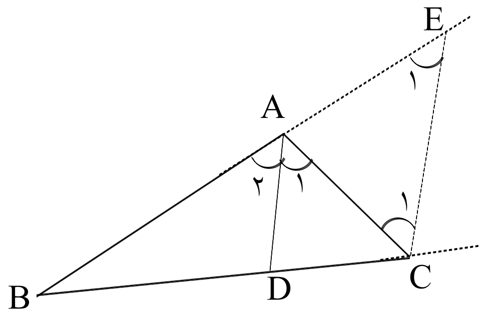
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} \ (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{۴}{۶} \Rightarrow \frac{AD}{AD + DB} = \frac{۴}{۴ + ۶} \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{۵} = \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow AD = ۲ \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow BD = AB - AD = ۳ \ (۰/۲۵)$$

۲۷- قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه‌ی داخلی، ضلع روبه رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

« **پاسخ** »



فرض: AD نیمساز زاویه‌ی داخلی A ، حکم: $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

برهان: ضلع‌های BA و BC را امتداد می‌دهیم و از رأس C خطی به موازات نیمساز زاویه‌ی A (یعنی AD) رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند.

$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel CE \text{ و مورب } AC \Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{C_1} \\ AD \parallel CE \text{ و مورب } BE \Rightarrow \widehat{A_2}=\widehat{E_1} \\ \text{فرض } \widehat{A_1}=\widehat{A_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{C_1}=\widehat{E_1}$$

پس مثلث AEC متساوی‌الساقین است و $AE = AC$ (۱)

از طرفی: $B\overset{\triangle}{E}C : AD \parallel CE \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AB}{AE}=\frac{BD}{DC}$ (۲)

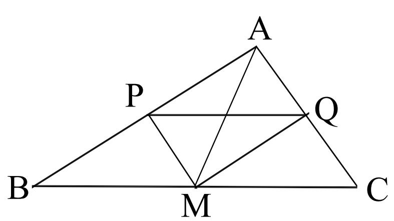
با توجه به رابطه‌ی (۱) اگر در رابطه‌ی (۲) به جای AE مساوی آن AC را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

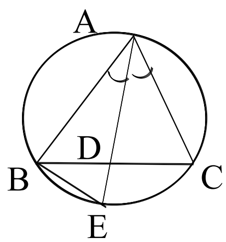
۲۸- در مثلث ABC میانه‌ی AM و نیمسازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC را رسم می‌کنیم، این دو نیمساز اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و O قطع می‌کنند. ثابت کنید دو خط PQ و BC موازیند.

« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} MP \text{ نیمساز } A\widehat{M}B \text{ در مثلث } AMB \text{ است} \Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{AM}{MA} \\ MQ \text{ نیمساز } A\widehat{M}C \text{ در مثلث } AMC \text{ است} \Rightarrow \frac{AQ}{QC}=\frac{AM}{MC} \\ AM \text{ میانه } \Rightarrow MC = MB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{عکس}} PQ \parallel BC$$

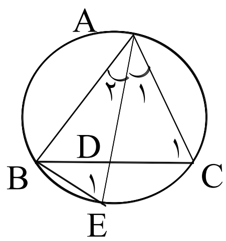


۲۹- در شکل زیر AD نیمساز زاویه $\widehat{BAC}$ است. ثابت کنید $AD^{۲} = AB.AC - BD.DC$.



« **پاسخ** »

نقطه D محل برخورد دو وتر AE و BC در داخل دایره است. پس:



$$AD.DE = BD.DC$$

از طرفی $DE = AE - AD$ پس:

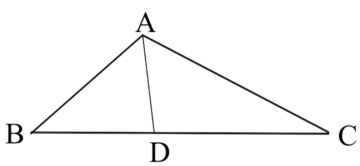
$$AD(AE - AD) = BD.DC \Rightarrow AD^{۲} = AD.AE - BD.DC \quad (۱)$$

از طرفی در دو مثلث $\widehat{ABE}$ و $\widehat{ADC}$ داریم:

$$\left(\widehat{E_۱} = \frac{AB}{۲} = \widehat{C_۱} \text{ و } \widehat{A_۱} = \widehat{A_۲}\right) \Rightarrow \widehat{ADC} \sim \widehat{ABE} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow AD.AE = AB.AC \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow AD^{۲} = AB.AC - BD.DC$$

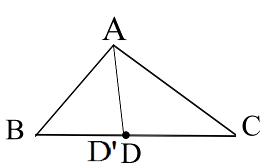
۳۰- اگر در مثلث ABC نقطه‌ی D روی BC طوری انتخاب شود که $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ باشد. آنگاه ؛ ثابت کنید: AD نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ می‌باشد.



« **پاسخ** »

راه حل: این مسئله را از راه برهان خلف ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم: AD نیمساز $\widehat{A}$ نباشد بلکه AD' نیمساز زاویه $\widehat{A}$ باشد داریم.



$$\left.\begin{array}{l} A \text{ نیمساز } AD' \Rightarrow \frac{BD'}{D'C} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{BD'}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \\ \text{فرض} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

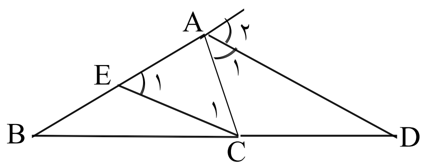
$$\frac{BD'}{BC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow BD' = BD \qquad (I)$$

ولی رابطه (I) نمی‌تواند، برقرار باشد. مگر، آنکه نقاط D و D' بر هم منطبق باشند، پس AD نیمساز زاویه $\widehat{A}$ است.

۳۱- ثابت کنید: نیمساز هر زاویه‌ی بیرونی از یک مثلث بر امتداد ضلع مقابل دو پاره خط پدید می‌آورد، که نظیر به نظیر با دو ضلع دیگر مثلث متناسبند.

« **پاسخ** »

راه حل: فرض کنیم نیمساز خارجی زاویه‌ی $\widehat{A}$ امتداد ضلع مقابل را در نقطه‌ی D قطع کند، از رأس C خطی موازی نیمساز AD را در E قطع کند.



$$CE \parallel AD \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} \quad (\text{I})$$

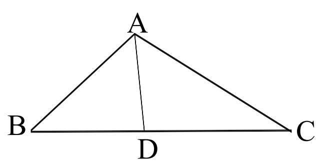
$$\left.\begin{array}{l} AD \parallel EC \\ \text{مورب}\,AC \\ \text{مورب}\,AB \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \widehat{C}_۱ = \widehat{A}_۲ \\ \Rightarrow \widehat{A}_۲ = \widehat{E}_۱ \end{array}\left.\right\} \xrightarrow{\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲}$$

$$\widehat{C}_۱ = \widehat{E}_۱ \Rightarrow AE = AC \xrightarrow{\text{از}\ (\text{I})} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

۳۲- محیط مثلثی ۴۳ سانتی‌متر و اندازه‌های پاره‌خطهایی که نیمساز یک زاویه درونی آن بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد. به ترتیب ۷/۲ و ۱۰/۸ سانتی‌مترند. سه ضلع مثلث را حساب کنید.

« **پاسخ** »

راه حل: فرض می‌کنیم AD نیمساز بوده و $BD = ۷/۲$ و $CD = ۱۰/۸$ باشد.



$$BC = ۱۸ \Rightarrow AB+AC = ۲۵$$

$$\text{نیمساز}\,AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow \frac{۷/۲}{۱۸} = \frac{AB}{۲۵} \Rightarrow$$

$$AB = ۱۰ \Rightarrow AC = ۱۵$$

۳۳- اگر در مثلث $\overset{\frown}{ABC}$ داشته باشیم، $AB > AC$ و AD نیمساز باشد، ثابت کنید: $BD > DC$.

« **پاسخ** »

راه‌حل: با توجه به قضیه‌ی نیمسازها داریم:

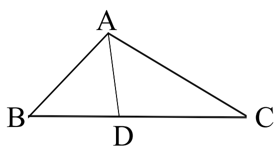
$$\left.\begin{array}{l} \text{نیمساز}\,AD \Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \\ \text{فرض} \Rightarrow AB > AC \end{array}\right\} \Rightarrow BD > DC$$

۳۴- اگر در مثلث $\overset{\frown}{ABC}$ نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ ضلع BC را در D قطع کند، آنگاه ؛ ثابت کنید:

$$BD = \frac{BC \times AB}{AB + AC}, \ DC = \frac{BC \times AC}{AB + AC}$$

« **پاسخ** »

راه‌حل: با توجه به قضیه‌ی نیمسازها داریم:



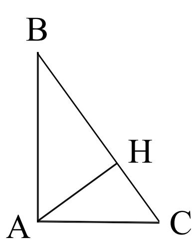
$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{BD}{BD + DC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow BD = \frac{BC \times AB}{AB + AC}$$

به همین ترتیب رابطه دوم را می‌توان ثابت کرد.

۳۵- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ارتفاع وارد بر وتر AH را رسم می‌کنیم. ثابت کنید: $AB^2 \ . \ CH = AC^2 \ . \ BH$

« **پاسخ** »



$$\left.\begin{array}{l} AB^2 = BH.BC \\ AC^2 = CH.BC \end{array}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH}{CH} \Rightarrow AB^2.CH = AC^2.BH$$

۳۶- در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC(A=۹۰) اگر P نصف محیط مثلث و S مساحت مثلث باشد ثابت کنید:

$S = P(P - a)$ یا $S = (P - b)(P - c)$

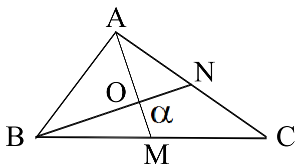
« **پاسخ** »

a وتر این مثلث قائم‌الزاویه است. داریم: $p(p - a) = \frac{a + b + c}{2}\left(\frac{a + b + c}{2} - a\right) = \frac{1}{2} bc = S$

به همین ترتیب حکم دوم را می‌توان ثابت کرد.

۳۷- اگر در مثلثی m_a و m_b میانه و α زاویه بین آنها باشد ثابت کنید: $S = \frac{۲}{۳} M_a . M_b . Sin\alpha$

« پاسخ »



اگر AM و BN میانه‌های مثلث ABC باشند مساحت مثلث AON برابر $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث ABC است.

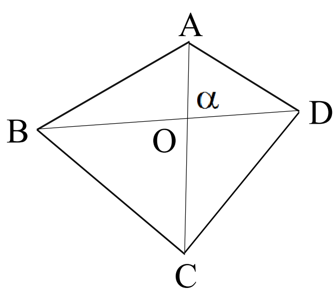
$$S_{ABC} = ۶\left(\frac{۱}{۲} OA.ON.Sin\alpha\right)$$

$$S_{ABC} = ۳\left(\frac{۲}{۳} AM.\frac{۱}{۳} BN.Sin\alpha\right)$$

$$S_{ABC} = \frac{۲}{۳} AM.BN.Sin\alpha$$

۳۸- ثابت کنید مساحت هر چهارضلعی برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر در سینوس زاویه بین آنها.

« پاسخ »



فرض کنیم O محل برخورد قطرهای چهارضلعی باشد و α زاویه‌ی بین دو قطر باشد. داریم:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{DOC} + S_{AOD}$$

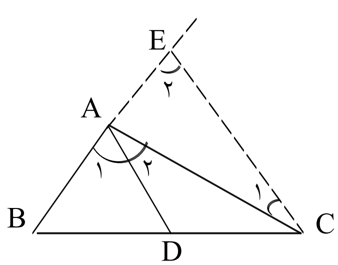
$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} OA.OB.Sin\alpha + \frac{۱}{۲} OB.OC.Sin\alpha +$$

$$\frac{۱}{۲} OD.OC.Sin\alpha + \frac{۱}{۲} OA.OD.Sin\alpha$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC.BD.Sin\alpha$$

۳۹- قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

« پاسخ »



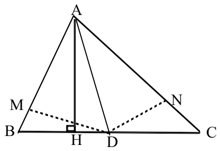
حکم: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

از رأس C خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند. داریم:

$$AD \| CE \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_۲ = \hat{C}_۱ \\ \hat{A}_۱ = \hat{E}_۲ \text{ و } \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \end{cases} \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{E} \Rightarrow AE = AC \ (۱)$$

$$AD \| CE \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{(۱)} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

۴۰- در مثلث ABC ، AH ارتفاع و AD نیمساز است. مساحت مثلث ABD و ACD را به ترتیب با S و 'S نشان می‌دهیم.



الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعده‌ی این مثلثها، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای آنها را M و N بنامید. DM و DN چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده‌ی مثلثهای ABD و ADC ، نسبت $\frac{S}{S'}$ را به دست آورید.

از مقایسه‌ی نسبتها در بند (الف) و (پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

« پاسخ »

الف) $\frac{S}{S'}=\frac{\frac{۱}{۲}AH\times BD}{\frac{۱}{۲}AH\times DC}=\frac{BD}{DC}$

ب) DM , DN مساویند زیرا فاصله‌ی هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه برابر است.

پ) $\frac{S}{S'}=\frac{\frac{۱}{۲}DM\times AB}{\frac{۱}{۲}DN\times AC}=\frac{AB}{AC}$

از مقایسه رابطه الف و پ $\Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$

۴۱- سه ضلع مثلثی ۸، ۱۲، ۱۵ سانتی‌مترند. اندازه‌ی پاره‌خطهایی که نیمساز درونی زاویه‌ی بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد، را تعیین کنید.

« پاسخ »

فرض کنید $AB=۸$ و $AC=۱۲$ و $BC=۱۵$ و نیمساز زاویه‌ی A ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند.

نیمساز $AD \Rightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{۸}{۱۲}\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}\frac{BD}{BD+DC}=\frac{۸}{۸+۱۲}\Rightarrow\frac{BD}{۱۵}=\frac{۸}{۲۰}\Rightarrow BD=۶$

$DC=BC-BD \qquad DC=۱۵-۶=۹$