مثال ۱: اگر $f(x)=2x-4$ ، $fog(x)=3x^2-6x+14$ مطلوب $g(x)$؟

$$fog(x)=f(g(x))=3g-4=3x^2-6x+14$$

$$\Rightarrow 3g=3x^2-6x+18$$

$$\xrightarrow{\div 3} g=x^2-2x+6$$

مثال: در صورتی که $g(x)=2x-7$ ، $gof(x)=4x^2-5x+3$ مطلوب $f(x)$.

$$gof(x)=g(f(x))=2f-7=4x^2-5x+3$$

$$\Rightarrow 2f=4x^2-5x+10 \Rightarrow f=2x^2-\frac{5}{2}x+5$$

مثال: اگر $g(x)=x-2$ ، $fog(x)=3x+1$ مطلوب $f(x)$.

$$fog(x)=f(g(x))=f(\underbrace{x-2}_{t})=3x+1$$

$$x-2=t \Rightarrow x=t+2$$

$$\Rightarrow f(t)=3(t+2)+1 \Rightarrow f(t)=3t+7$$

$$\Rightarrow f(x)=3x+7$$

مثال: با فرض $f(x)=x+1$ ، $gof(x)=x^2+5x$ مطلوب $g(x)$.

$$gof(x)=g(f(x))=g(\underbrace{x+1}_{t})=x^2+5x$$

$$x+1=t \Rightarrow x=t-1$$

$$\Rightarrow g(t)=(t-1)^2+5(t-1)=t^2-2t+1+5t-5$$

$$\Rightarrow g(t)=t^2+3t-4$$

$$\Rightarrow g(x)=x^2+3x-4$$

یادآوری:

① دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.

مثال: $f(x)=2x-1 \longrightarrow D_f=\mathbb{R}$ $\qquad g(x)=x^2-7x+3 \longrightarrow D_g=\mathbb{R}$

$h(x)=4 \longrightarrow D_h=\mathbb{R}$ $\qquad k(x)=-x \longrightarrow D_k=\mathbb{R}$

② دامنهٔ توابع گویا (کسری): مخرج $\neq 0$

مثال: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-4} \longrightarrow x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4$

مثال: $g(x)=\left(\dfrac{1}{x+5}-\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{2x}{x-3}$

$$\left.\begin{array}{l} x+5\neq 0 \rightarrow x\neq -5 \\ x\neq 0 \\ x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow D_g=\{x\neq 0, 3, -5\}$$

مثال: $h(x)=\dfrac{4x-1}{x^2-9}$ $\qquad x^2-9\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 9 \Rightarrow x\neq \pm 3$

③ دامنهٔ توابع رادیکالی فرجه زوج: زیر رادیکال ≥ 0

مثال: $f(x)=\sqrt{x-5} \longrightarrow x-5\geq 0 \longrightarrow x\geq 5$

مثال: $g(x)=\sqrt{2x+7} \longrightarrow 2x+7\geq 0 \Rightarrow 2x\geq -7 \xRightarrow{\div 2} x\geq -\dfrac{7}{2}$

مثال: $h(x)=\sqrt{6-3x} \longrightarrow 6-3x\geq 0 \Rightarrow -3x\geq -6 \xRightarrow{\div(-3)} x\leq 2$

دقت

دامنه fog :

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

مثال : اگر $f(x)=\frac{3}{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$ دامنه $fog(x)$ را بدست آورید.

دامنه f : $x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$

دامنه g : $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x\geq -1 \mid \sqrt{x+1}\neq 2\}=\{x\geq -1 \mid x\neq 3\}=[-1,+\infty)-\{3\}$$

توان ۲

$x+1\neq 4$

$x\neq 3$

مثال : دامنه تابع fog را با فرض $f(x)=x^2-5$ و $g(x)=\sqrt{x+6}$ بدست آورید.

$D_f=\mathbb{R}$

دامنه g : $x+6\geq 0 \Rightarrow x\geq -6$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x\geq -6 \mid \mathbb{R}\}=\{x\geq -6\}=[-6,+\infty)$$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{x+2}$ دامنه gof را بیابید.

دامنه f : $x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$

دامنه g : $x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\geq 1 \mid \underbrace{\sqrt{x-1}\geq -2}_{\text{همیشه برقرار است}}\}=\{x\geq 1\}=[1,+\infty)$$

مثال: درصورتی که $f(x)=\sqrt{3-2x}$ و $g(x)=\dfrac{6}{3x-5}$ مطلوب است $D_{f\circ g}$.

دامنهٔ f: $3-2x\geq 0 \Rightarrow -2x\geq -3 \xrightarrow{\div(-2)} x\leq \dfrac{3}{2}$

دامنهٔ g: $3x-5\neq 0 \Rightarrow 3x\neq 5 \Rightarrow x\neq \dfrac{5}{3}$

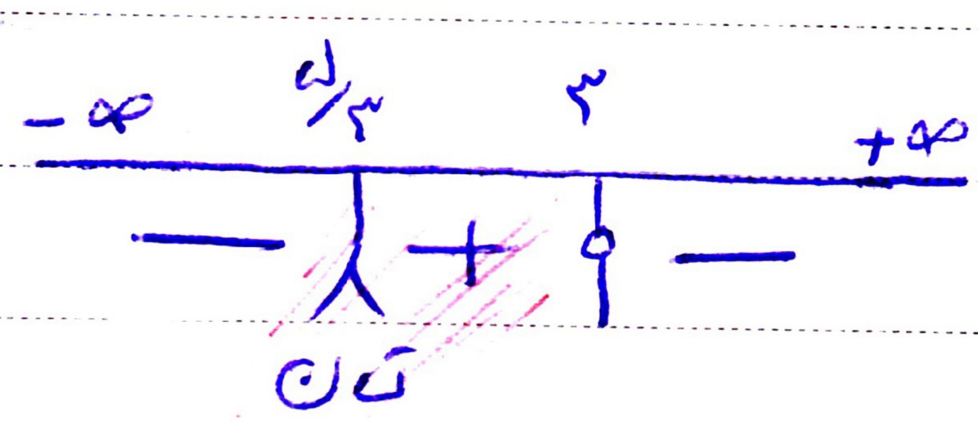
$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$=\left\{x\neq \frac{5}{3} \;\middle|\; \frac{6}{3x-5}\leq \frac{3}{2}\right\}$$

$$\frac{6}{3x-5}-\frac{3}{2}\leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{12-9x+15}{6x-10}\leq 0 \Rightarrow \frac{-9x+27}{6x-10}\leq 0$$

3 , $5/3$



$$D_{f\circ g}=\left(-\infty,\frac{5}{3}\right)\cup[3,+\infty)$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$ مطلوب است $D_{g\circ f}$, $D_{f\circ g}$

دامنهٔ g: $2-x\geq 0 \Rightarrow -x\geq -2 \xrightarrow{\div(-)} x\leq 2$

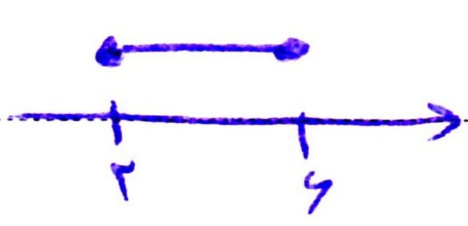
دامنهٔ f: $x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$

$$D_{g\circ f}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\geq 2 \mid \sqrt{x-2}\leq 2\} = \{x\geq 2 \mid x\leq 6\}=[2,6]$$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-2\leq 4$

$\longrightarrow x\leq 6$



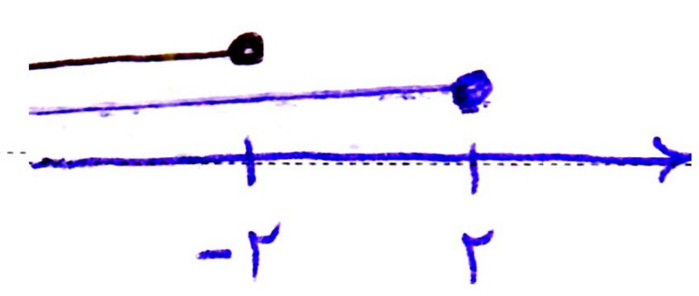
$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\leq 2 \mid \sqrt{2-x}\geq 2\}$$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 2-x\geq 4$

$\longrightarrow -x\geq 2$

$\xrightarrow{\div(-)} x\leq -2$

$$=\{x\leq 2 \mid x\leq -2\}=(-\infty,-2]$$



مثال: در صورتی که $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{x}$ مطلوب است $D_{g\circ f}$.

$D_f=\mathbb{R}$, $D_g=\{x\geq 0\}$

$D_{g\circ f}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in \mathbb{R} \mid \sin x\geq 0\}=[2k\pi , 2k\pi+\pi]$

رسم نمودار به کمک تبدیل و انتقال

مثال: با توجه به نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ نمودار توابع زیر را رسم کنید

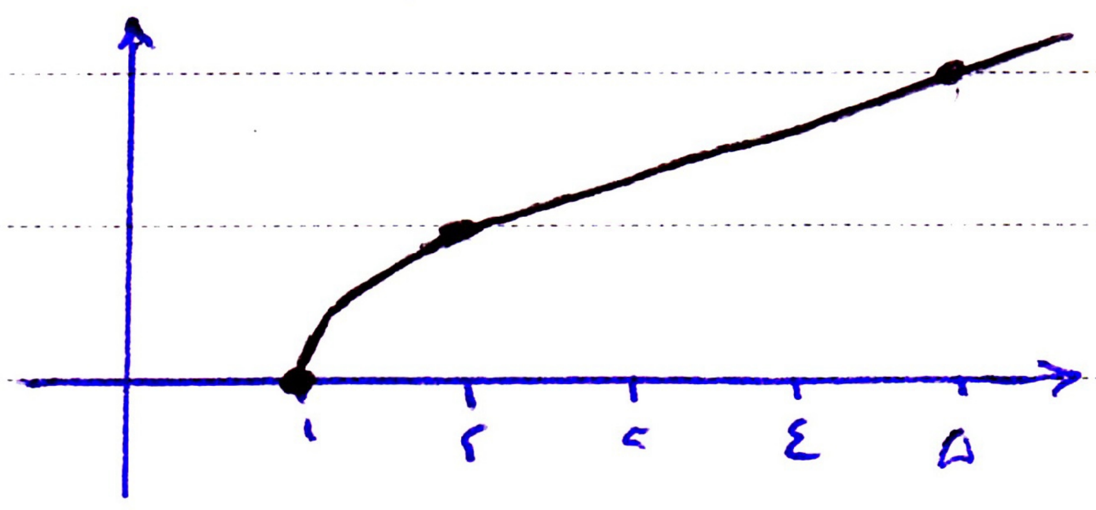
الف) $y=\sqrt{x-1}$

$\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2

$\xrightarrow{+1}$

x	1	2	5
y	0	1	2



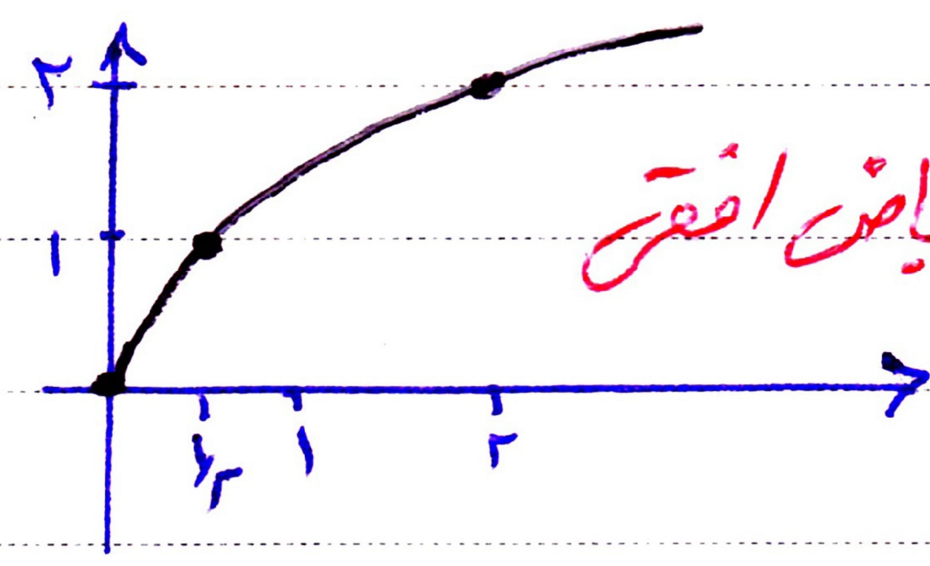
ب) $y=\sqrt{2x}$

$\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2

$\xrightarrow{\div 2}$

x	0	1/2	2
y	0	1	2



انقباض افقی

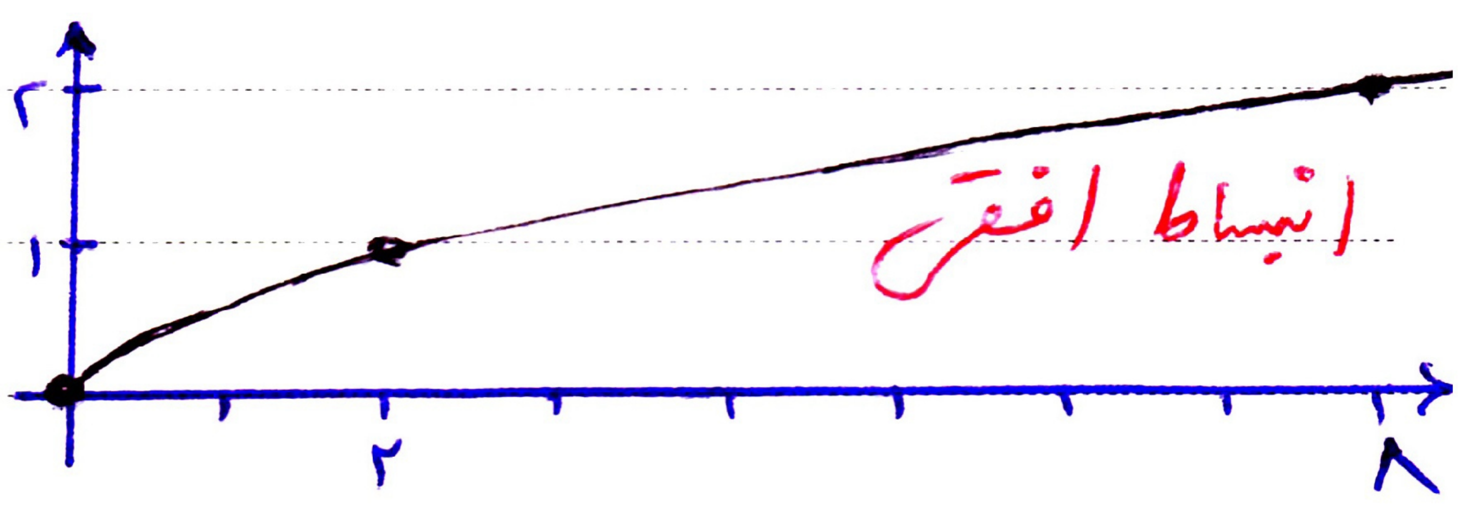
ب) $y=\sqrt{\frac{1}{2}x}$

$\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2

$\xrightarrow{\times 2}$

x	0	2	8
y	0	1	2



انبساط افقی

توجه: اگر عمل درون تابع در k ضرب شود

اگر $k>1$ باشد ← انقباض افقی

اگر $0<k<1$ باشد ← انبساط افقی

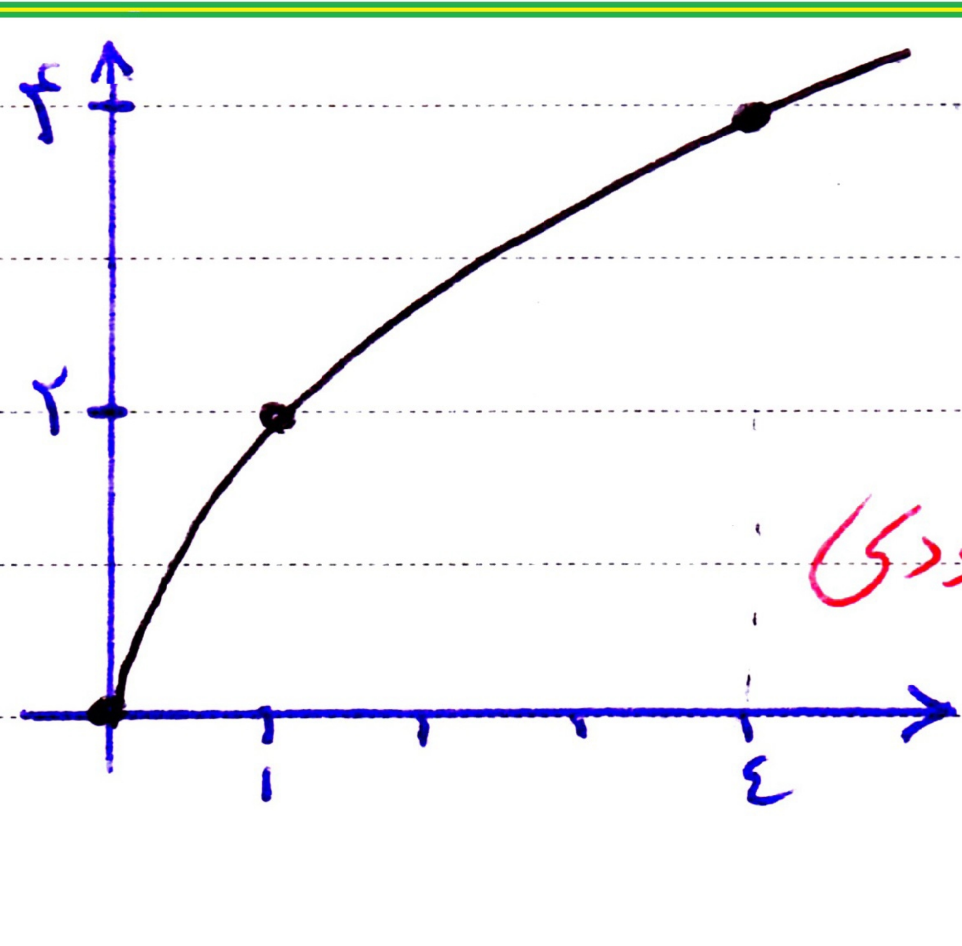
ت) $y=2\sqrt{x}$

$\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2

$\xrightarrow{\times 2}$

x	0	1	4
y	0	2	4



انبساط عمودی

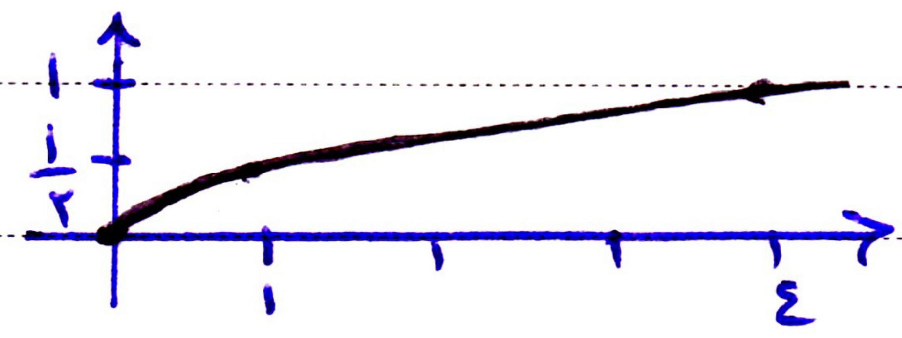
ث) $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$\sqrt{x}$

x	0	1	4
y	0	1	2

$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$

x	0	1	4
y	0	$\frac{1}{2}$	1



انقباض عمودی

توضیح: اگر عمل بیرونی تغییر در k ضرب شود:
- اگر $k>1$ باشد ← انبساط عمودی
- اگر $0<k<1$ باشد ← انقباض عمودی

مثال: تابع $y=f(x)$ با دامنهٔ $[-1,2]$ مفروض است. دامنهٔ هر تابع را تعیین کنید.

الف) $y=f(x-3)$

عمل درونی -3 است $\xrightarrow[\text{دامنه}]{\text{لجبازی روی}}$ $[-1,2]\xrightarrow{+3}[2,5]=D$

ب) $y=f(\frac{x}{2})$

عمل درونی $\div 2$ است $\xrightarrow{\text{لجبازی}}$ $[-1,2]\xrightarrow{\times 2}[-2,4]=D$

پ) $y=f(1-2x)$

$1-2x=t \Rightarrow -2x=t-1 \Rightarrow x=\frac{t-1}{-2}$ (طولها)

طولها را منهای یک کرده سپس بر منفی دو تقسیم کن

$[-1,2]\xrightarrow{-1}[-2,1]\xrightarrow{\div(-2)}\cancel{[1,-\frac{1}{2}]}\Rightarrow[-\frac{1}{2},1]=D$

مثال: تابع $y=f(x)$ با برد (R) $[2,5]$ مفروض است. برد هر تابع چیست؟

الف) $y=3f(x)$

عمل بیرونی در ۳ ضرب کردن: $[2,5]\xrightarrow{\times 3}[6,15]=R$

ب) $y=-2f(x)+7$

$[2,5] \xrightarrow{\times(-2)} [-10,-4] \xrightarrow{+7} [-3,3]=R$

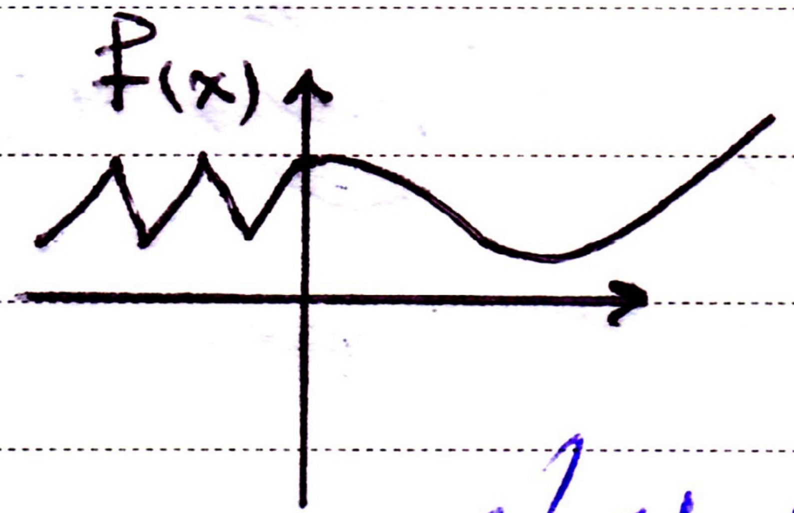
مثال: تابع $y=f(x)$ با دامنهٔ $[1,4)$ و بُرد $(-2,3]$ مفروض است. دامنه و برد تابع $y=5f(2x+1)-2$ را بیابید.

دامنه: $2x+1=t \Rightarrow 2x=t-1 \Rightarrow x=\frac{t-1}{2}$

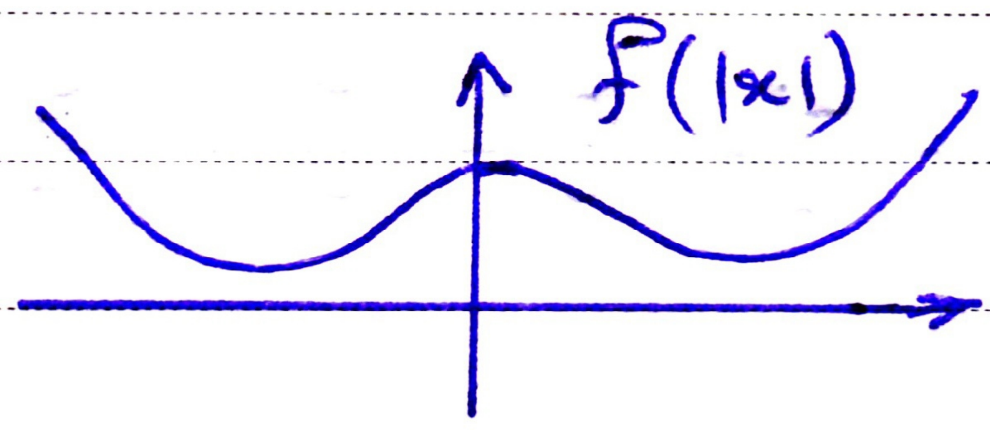
$[1,4) \xrightarrow{-1} [0,3) \xrightarrow{\div 2} [0,\frac{3}{2})=D$

بُرد: $(-2,3] \xrightarrow{\times 5} (-10,15] \xrightarrow{-3} (-13,12]=R$

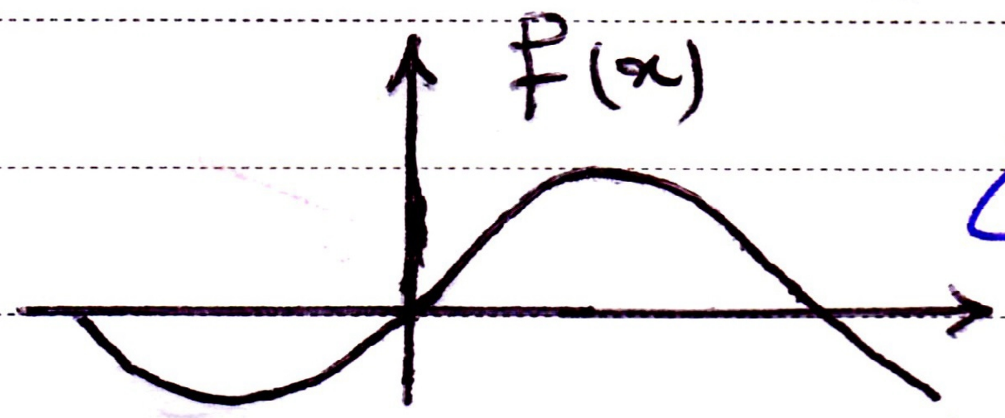
مثال مهم: با توجه به نمودار $y=f(x)$ نمودار تابع $y=f(|x|)$ را رسم کنید.



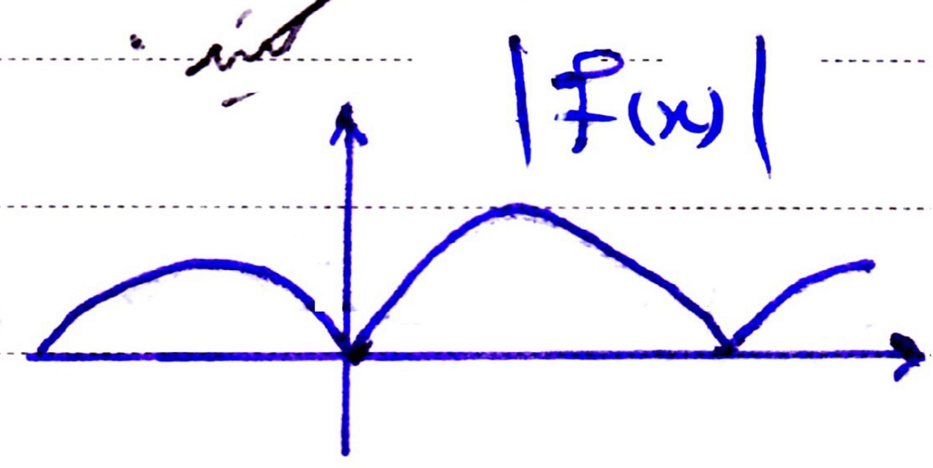
سمت راست محور عرضها را بدون هیچ تغییری رسم کنید. سپس سمت چپ قرینهٔ آن را رسم کنید



مثال مهم: با توجه به نمودار $y=f(x)$ نمودار تابع $y=|f(x)|$ را رسم کنید.



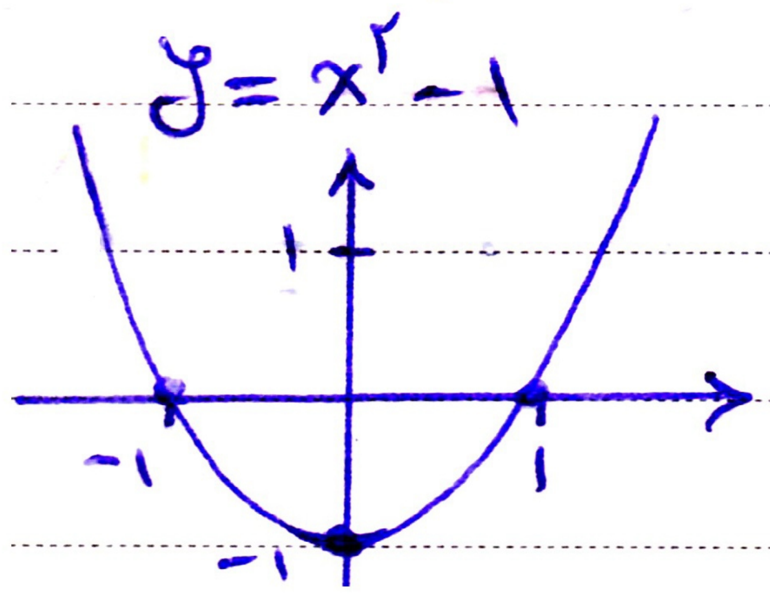
قسمت بالای محور xها بدون هیچ تغییری رسم می‌شود و آنهایی که زیر محور xها هستند به طور آینه‌وار بالا می‌آیند

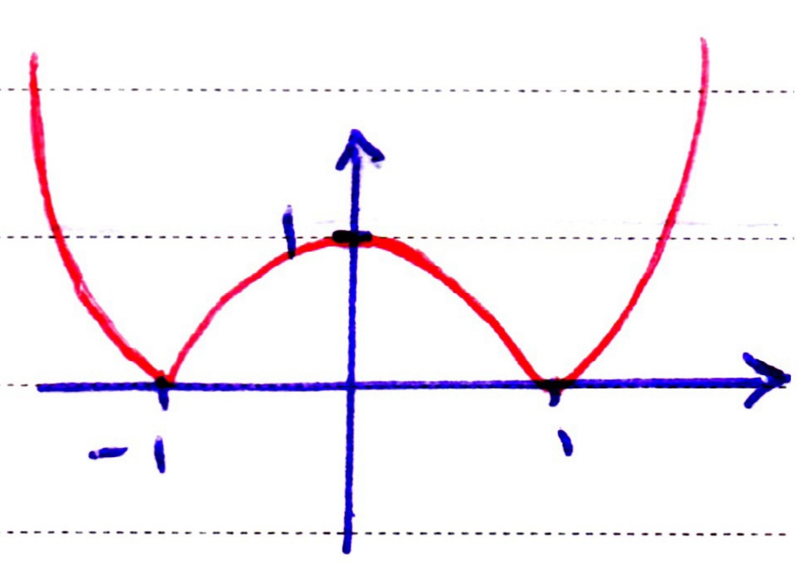


مثال: نمودار $y=|x^2-1|$ را رسم کنید

ابتدا نمودار $y=x^2-1$ را رسم می‌کنیم

x	-1	0	1
y	0	-1	0





حل تمرین ص ۲۳ شماره ۱۲ کتاب درسی :

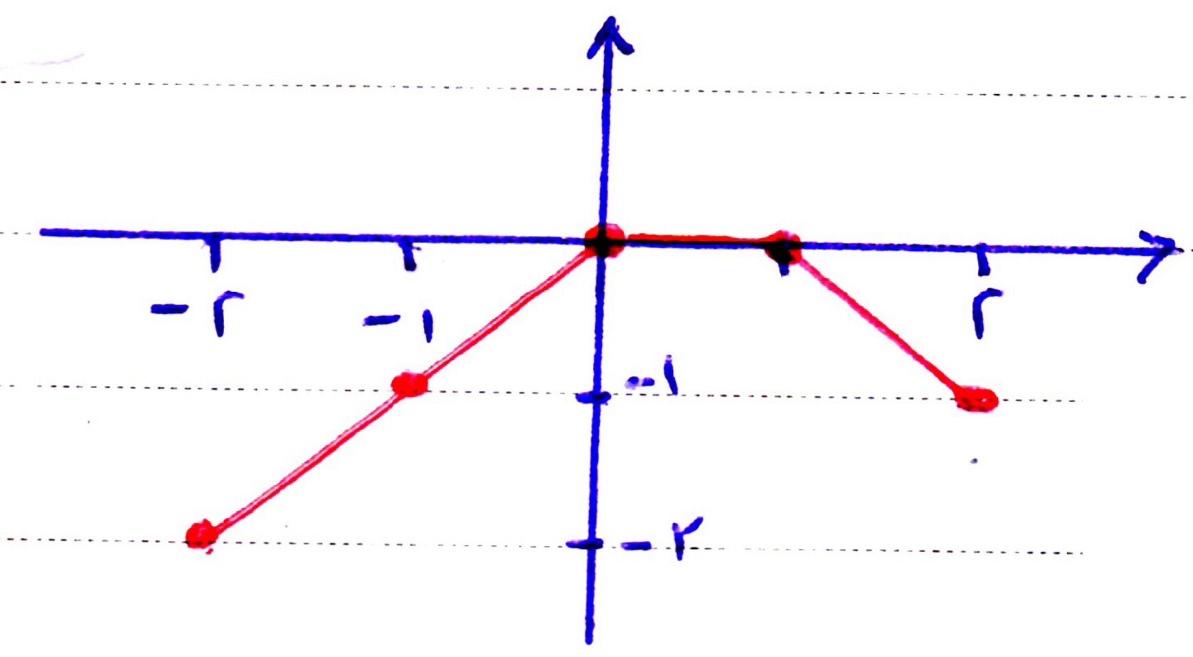
ابتدا از روی شکل نقاط معروف را بیابید

x	-4	-2	0	2	4
y	-2	0	2	2	0

الف) $y = \frac{1}{2} f(2x) - 1$

$\xrightarrow[\times\frac{1}{2} \text{ و } -1]{\div 2}$

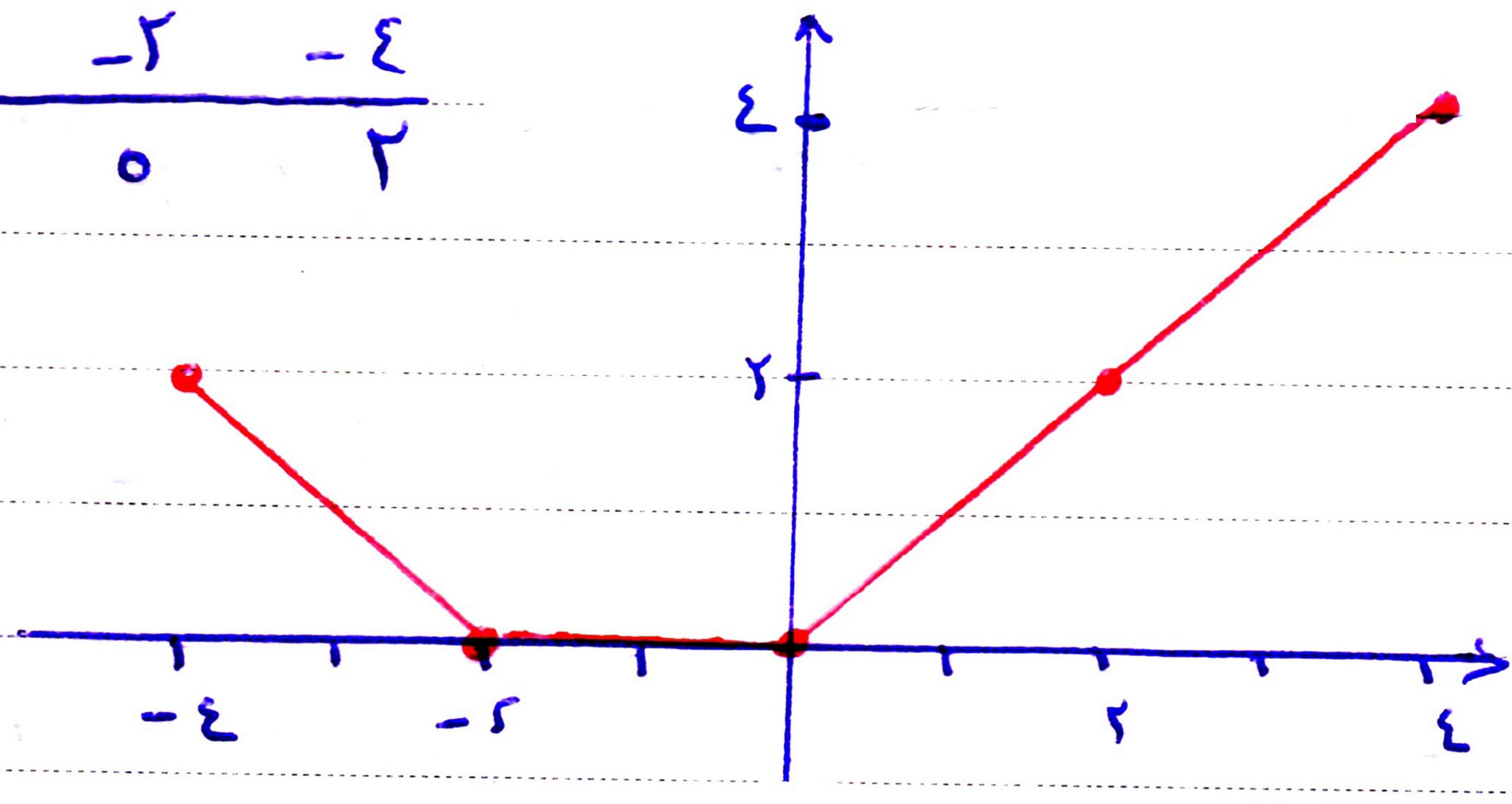
x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	0	0	-1



ب) $y = -f(-x) + 2$

$\xrightarrow[\times(-) \text{ و } +2]{\div(-)}$

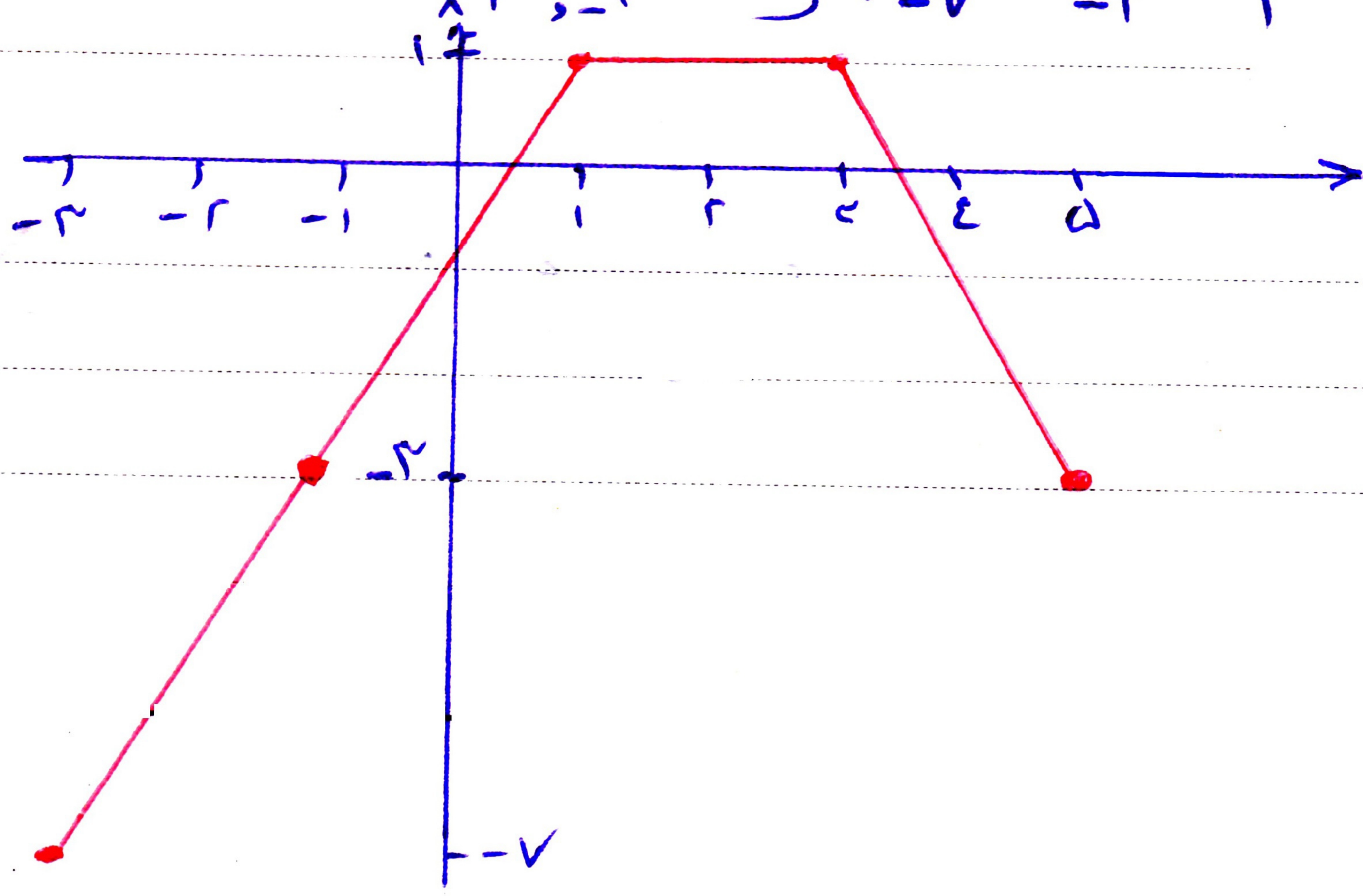
x	4	2	0	-2	-4
y	4	2	0	0	2



ب) $y = 2 f(x-1) - 3$

$\xrightarrow[\times 2 \text{ و } -3]{+1}$

x	-3	-1	1	3	5
y	-7	-3	1	1	-3

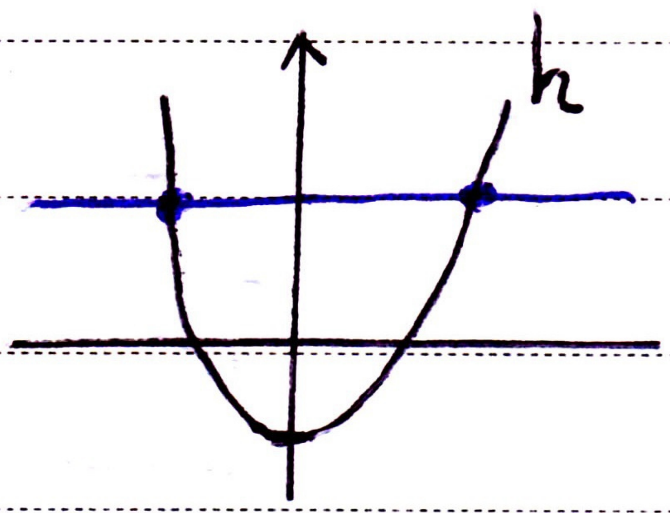


تابع وارون :

تابع f را وارون پذیر گوییم هرگاه عرض تکراری نداشته باشد (یک به یک باشد)

مثال : $f=\{(-1,2),(0,4),(7,2)\} \longrightarrow 1 \not\to 1 \; f \Rightarrow$ f وارون پذیر نیست

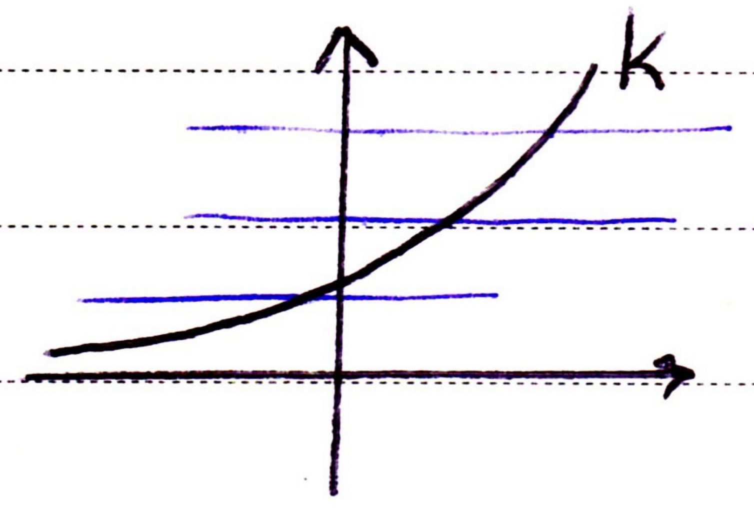
$g=\{(3,5),(2,-5),(4,0)\} \longrightarrow 1-1 \; g \Rightarrow$ g وارون پذیر است



$\Rightarrow 1 \not\to 1 \; h$

$\Rightarrow$ h وارون پذیر نیست

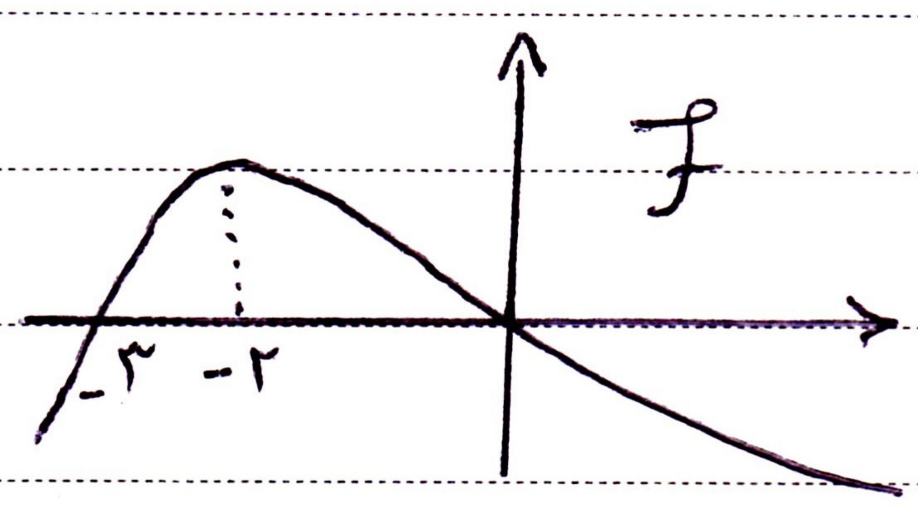
نمودارهایی یک به یک هستند که خطوط افقی آنها را در بیش از یک نقطه قطع نکنند.



$\Rightarrow 1-1 \; k$

$\Rightarrow$ k وارون پذیر است

مثال : دامنه تابع روبه رو را چنان محدود کنید که وارون پذیر باشد



پاسخ : اگر دامنه تابع محدود به $[-2,+\infty)$ یا $(-\infty,-2]$ شود، وارون پذیر است.

مثال : با محدود کردن دامنه هریک از توابع زیر، تابع یک به یک بسازید.

الف) $f(x)=|x-2|+3x \Rightarrow$ اگر دامنه تابع $[2,+\infty)$ یا $(-\infty,2]$ اختیار شود تابع یک به یک است.

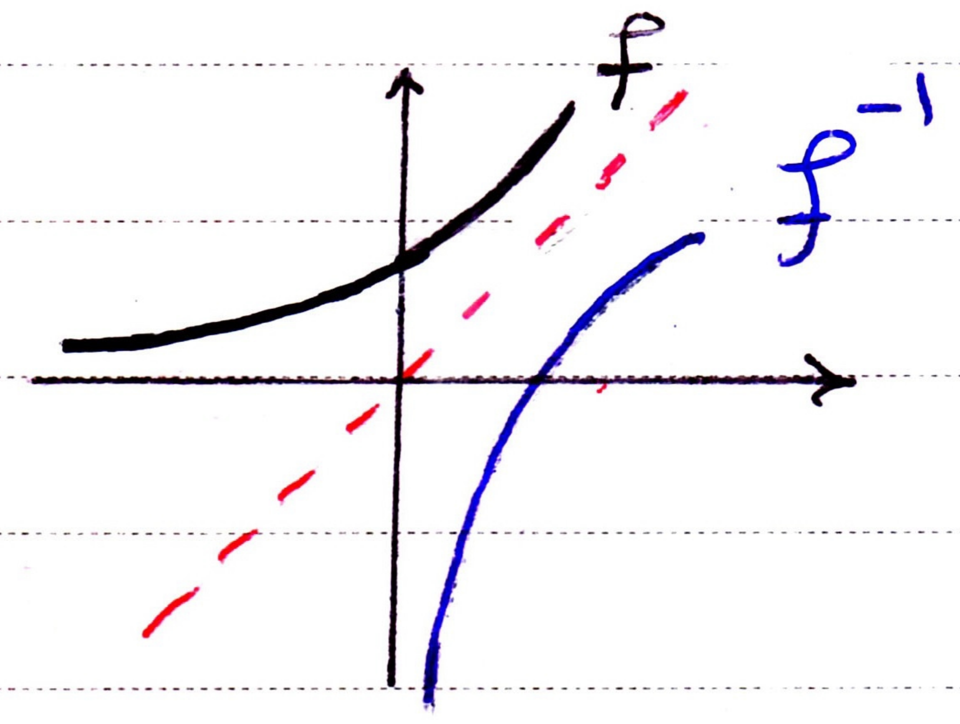
ب) $g(x)=x^2-6x+1$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow$ اگر دامنه تابع محدود به $[3,+\infty)$ یا $(-\infty,3]$ شود تابع یک به یک است.

یافتن ضابطهٔ تابع وارون :

مثال: $f=\{(3,5),(2,-5),(4,0)\} \longrightarrow f^{-1}=\{(5,3),(-5,2),(0,4)\}$

مثال:



نیمساز نواحی اول و سوم را با نقطه چین رسم کرده سپس قرینهٔ f را نسبت به نیمساز رسم می کنیم.

مثال: $f(x)=2x+1$

$$\Longrightarrow 2x+1=y \Rightarrow 2x=y-1 \xRightarrow{\div 2} x=\frac{y-1}{2} \xrightarrow{\text{تعویض نقش}} y=\frac{x-1}{2}$$

$$\longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

مثال: $g(x)=\frac{-8x+3}{2}$

$$\Longrightarrow \frac{-8x+3}{2}=y \xRightarrow{\times 2} -8x+3=2y \Rightarrow -8x=2y-3$$

$$\xRightarrow{\div(-8)} x=\frac{2y-3}{-8} \xrightarrow{\text{تعویض نقش}} y=\frac{2x-3}{-8} \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{2x-3}{-8}$$

مثال: $f(x)=\sqrt{x+2}$

$$\Longrightarrow \sqrt{x+2}=y \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+2=y^2 \Longrightarrow x=y^2-2$$

$$\xrightarrow{\text{ت ن}} y=x^2-2 \longrightarrow f^{-1}(x)=x^2-2$$

مثال: $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$

$$\Longrightarrow -5-\sqrt{3x+1}=y \Longrightarrow -\sqrt{3x+1}=y+5$$

$$\xRightarrow{\text{توان ۲}} 3x+1=(y+5)^2 \Longrightarrow 3x+1=y^2+10y+25$$

$$\Longrightarrow 3x=y^2+10y+24 \xrightarrow{\div 3} x=\frac{y^2+10y+24}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{ت ن}} y=\frac{x^2+10x+24}{3} \Longrightarrow g^{-1}(x)=\frac{x^2+10x+24}{3}$$

نکته: دو تابع f و g را وارون یکدیگر گوییم هرگاه $fog(x)=x$ و $gof(x)=x$ باشد.

مثال: در هر مورد نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=-\sqrt{x-8}$ و $g(x)=8+x^2 \ , \ x\leq 0$

$$fog(x)=f(g(x))=-\sqrt{\cancel{8}+x^2-\cancel{8}}=-\sqrt{x^2}=-(-x)=x$$

$$gof(x)=g(f(x))=8+\left(-\sqrt{x-8}\right)^2=\cancel{8}+x-\cancel{8}=x$$

$\Rightarrow$ f و g وارون یکدیگرند

ب) $f(x)=\frac{-7}{2}x-3$ و $g(x)=-\frac{2x+6}{7}$

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{-\cancel{7}}{2}\times\left(-\frac{2x+6}{\cancel{7}}\right)-3=\frac{2x+6}{2}-3=x+3-3=x$$

$$gof(x)=g(f(x))=-\frac{2\left(\frac{-7}{2}x-3\right)+6}{7}=-\frac{-7x-6+6}{7}=-\frac{-7x}{7}=x$$

$\Longrightarrow$ f و g وارون یکدیگرند

پ) $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\frac{x+4}{3}$

$$fog(x)=f(g(x))=\cancel{3}\left(\frac{x+4}{\cancel{3}}\right)-4=x+4-4=x$$

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{3x-4+4}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

$\longrightarrow$ f و g وارون یکدیگرند

ت) $f(x)=\frac{-8x+3}{2}$ و $g(x)=\frac{3-2x}{8}$

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{-\cancel{8}\left(\frac{3-2x}{\cancel{8}}\right)+3}{2}=\frac{-3+2x+3}{2}=\frac{2x}{2}=x$$

$$gof(x)=g(f(x))=\frac{3-\cancel{2}\left(\frac{-8x+3}{\cancel{2}}\right)}{8}=\frac{3+8x-3}{8}=\frac{8x}{8}=x$$

$\Longrightarrow$ f و g وارون یکدیگرند

نکته: اگر $f(a)=b$ آنگاه $f^{-1}(b)=a$ است.

مثال: در صورتی که $f(x)=2x-7$ باشد $f^{-1}(5)$ را بیابید.

$$f^{-1}(5)=x \Rightarrow f(x)=5 \Rightarrow 2x-7=5 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow x=6$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $(fog)^{-1}(5)=?$

$$(fog)^{-1}(5)=x \Rightarrow fog(x)=5$$

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{1}{8}x^3-3 \Rightarrow \frac{1}{8}x^3-3=5 \Rightarrow \frac{1}{8}x^3=8$$

$$\xrightarrow{\times 8} x=64 \Rightarrow x=4$$

ب) $(f^{-1}of^{-1})(6)=?$

$$f^{-1}of^{-1}(6)=x \Rightarrow fof(x)=6$$

$$fof(x)=f(f(x))=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{8}x-3\right)-3=\frac{1}{64}x-\frac{3}{8}-3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{64}x-\frac{3}{8}-3=6 \Rightarrow \frac{1}{64}x=9+\frac{3}{8}$$

$$\xrightarrow{\times 64} x=576+24 \Rightarrow x=600$$

مثال: اگر $f(x)=2x+1$ ، $g(x)=x+3$ مطلوب است:

الف) $(f\circ g)^{-1}(7)=?$

$$(f\circ g)^{-1}(7)=x \Rightarrow f\circ g(x)=7$$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=2(x+3)+1=2x+6+1=2x+7 \Rightarrow$$

$$2x+7=7 \Rightarrow 2x=0 \xRightarrow{\div 2} x=0$$

ب) $(g^{-1}\circ f^{-1})(2)=?$

$$g^{-1}\circ f^{-1}(2)=x \Rightarrow (f\circ g)^{-1}(2)=x \Rightarrow f\circ g(x)=2$$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=2(x+3)+1=2x+7$$

$$\Rightarrow 2x+7=2 \Rightarrow 2x=-5 \xRightarrow{\div 2} x=-\frac{5}{2}$$