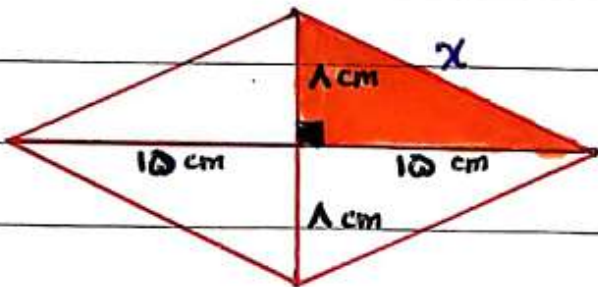


محیط یک لوزی که قطرهای آن ۳ و ۱۶ سانتی متر است را به دست آورید.



x : ضلع لوزی (وتر مثلث قائم الزاویه)

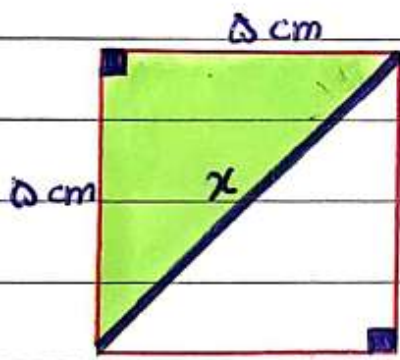
$$x^2 = 15^2 + 8^2$$

$$x^2 = 225 + 64 = 289$$

$$x = \sqrt{289} = 17 \text{ cm}$$

$$\text{محیط لوزی} = 4x = 4 \times 17 = 68 \text{ cm}$$

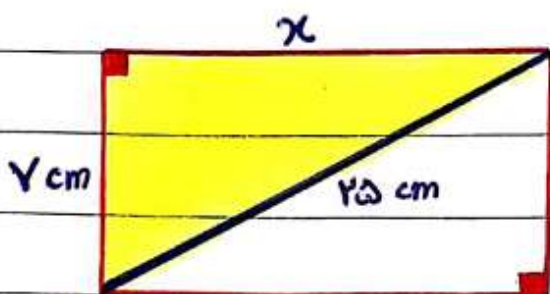
قطر مربعی به ضلع ۵ سانتی متر را به دست آورید.



x : قطر مربع (وتر مثلث قائم الزاویه)

$$x^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \rightarrow x = \sqrt{50}$$

طول مستطیلی را به دست آورید که اندازه عرض و قطر آن به ترتیب ۷ و ۲۵ سانتی متر



است.

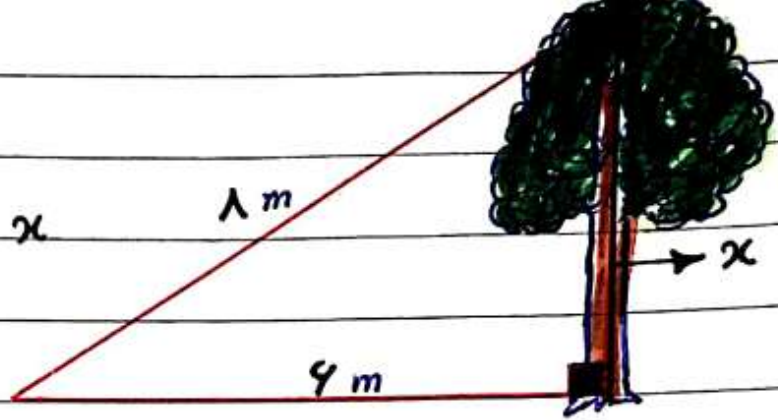
x طول مستطیل (ضلع قائم مثلث قائم الزاویه)

$$x^2 + 7^2 = 25^2 \rightarrow x^2 + 49 = 625 \rightarrow x^2 = 625 - 49 = 576$$

$$x = \sqrt{576} = 24$$

ارتفاع تقریبی درخت را حساب کنید.

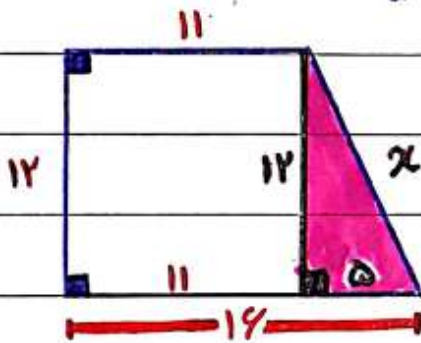
x ارتفاع درخت (ضلع قائم مثلث قائم الزاویه)



$$x^2 + 6^2 = 8^2$$

$$x^2 + 36 = 64 \rightarrow x^2 = 64 - 36 = 28 \rightarrow x = \sqrt{28} \approx 5,3$$

اندازه ضلع دوزنقه‌های قائم الزاویه زیر را به دست آورید.



$$x^2 = 12^2 + 5^2$$

$$x^2 = 144 + 25 = 169$$

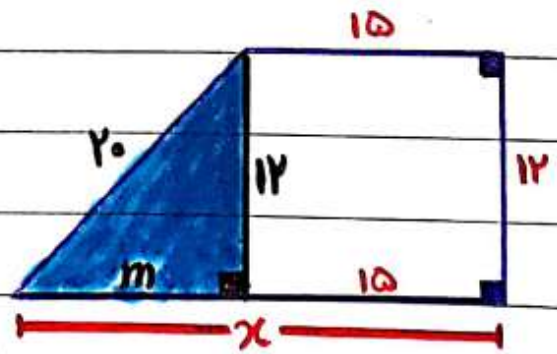
$$x = \sqrt{169} = 13$$

قسمتی از ضلع دوزنقه قائم الزاویه m 8

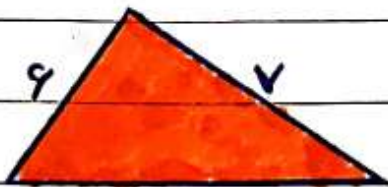
$$m^2 + 12^2 = 20^2 \rightarrow m^2 + 144 = 400$$

$$m^2 = 400 - 144 = 256$$

$$m = \sqrt{256} = 16 \rightarrow x = 15 + 16 = 31$$



کدام مثلث قائم الزاویه است؟ چرا؟ «رابطه فیثاغورس را در مورد مثلث بررسی می‌کنیم.»

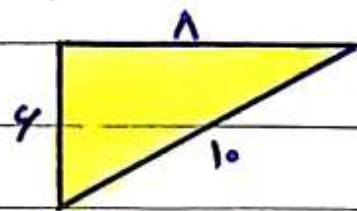


$$6^2 + 7^2 = 9^2$$

$$36 + 49 = 81$$

$$85 \neq 81$$

«مثلث بالا قائم الزاویه نیست.»



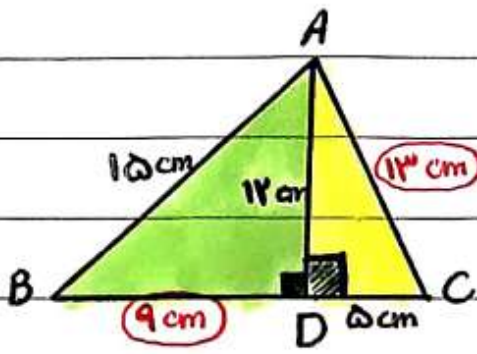
$$6^2 + 8^2 = 10^2$$

$$36 + 64 = 100$$

$$100 = 100$$

«مثلث بالا قائم الزاویه است.»

محیط مثلث ABC را حساب کنید.



برای محاسبه محیط مثلث، ابتدا باید اندازه دو ضلع BD و AC را به کمک رابطه فیثاغورس به دست آوریم.

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

در مثلث قائم الزاویه ADC داریم:

$$AC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \rightarrow AC = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

در مثلث قائم الزاویه ABD داریم:

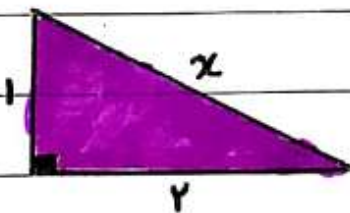
$$BD^2 + AD^2 = AB^2$$

$$BD^2 + 12^2 = 15^2 \rightarrow BD^2 = 225 - 144 = 81 \rightarrow BD = \sqrt{81} = 9 \text{ cm}$$

اکنون محیط مثلث ABC را به دست می آوریم:

$$P_{\text{مثلث ABC}} = AB + AC + BD + DC = 15 + 13 + 9 + 5 = 42 \text{ cm}$$

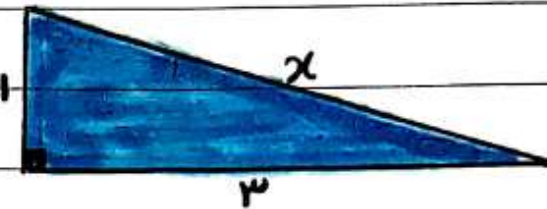
به کمک رابطه فیثاغورس، پاره خط هایی به طول $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{10}$ و $\sqrt{17}$ ساختن را



$$x^2 = 1^2 + 2^2$$

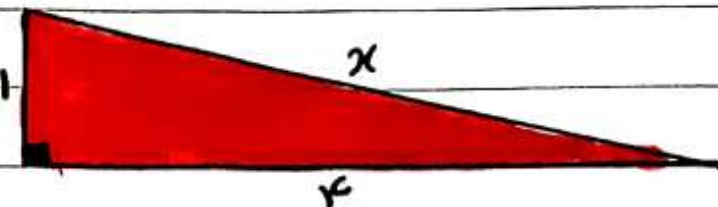
رسم کنید.

$$x^2 = 1 + 4 = 5 \rightarrow x = \sqrt{5}$$



$$x^2 = 1^2 + 3^2$$

$$x^2 = 1 + 9 = 10 \rightarrow x = \sqrt{10}$$

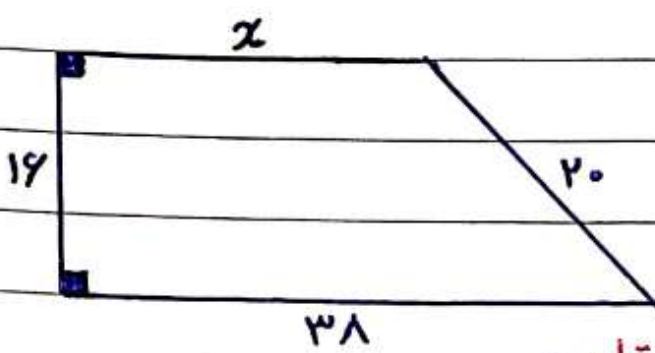


$$x^2 = 1^2 + 4^2$$

$$x^2 = 1 + 16 = 17 \rightarrow x = \sqrt{17}$$

حل یک مسئله

باتوجه به شکل، اندازه x را به دست آورید.

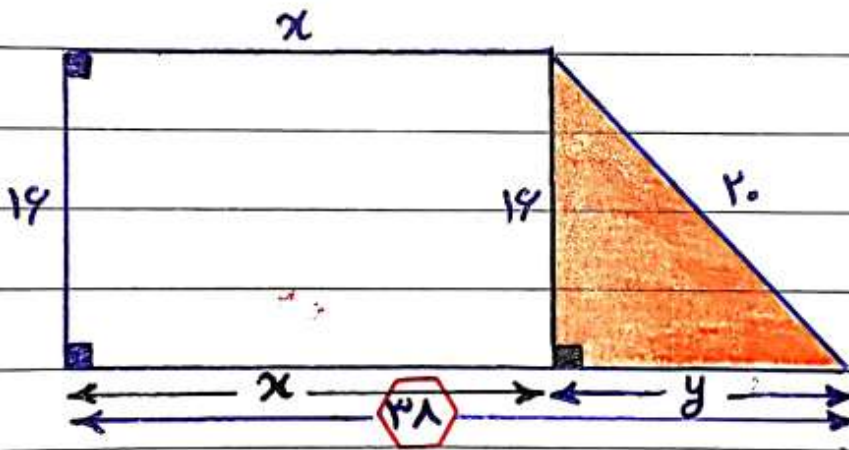


پاسخ: برای به دست آوردن اندازه x

شکل مقابل را که یک ذوزنقه قائم الزاویه

است را به دو قسمت (مثلث قائم الزاویه + مستطیل)

تقسیم کرده و به کمک رابطه فیثاغورس اندازه ضلع y را به دست می آوریم؛



$$y^2 + 14^2 = 20^2$$

$$y^2 + 256 = 400$$

$$y^2 = 400 - 256$$

$$y^2 = 144$$

$$y = \sqrt{144} = 12$$

الآن اگر به شکل مستطیل توجه کنید؛ اندازه x طول مستطیل است و برای

به دست آوردن آن کافی است، اندازه ضلع به دست آمده y (عدد ۱۲) را

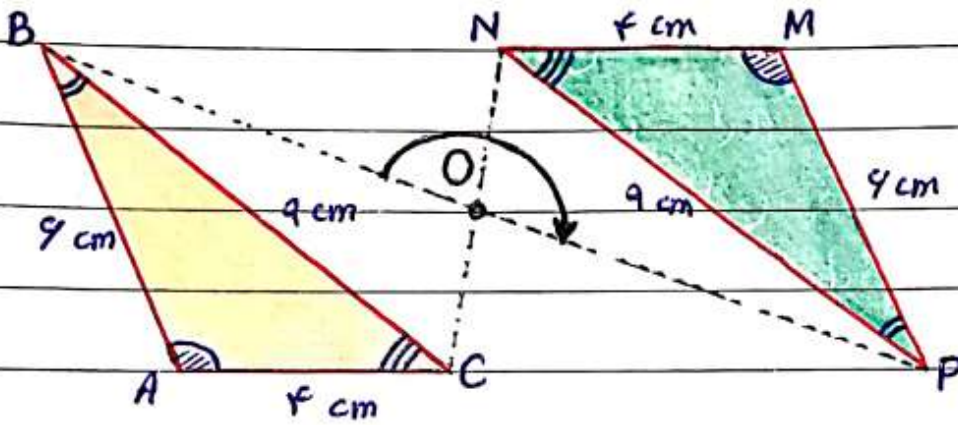
از قاعده بزرگ ذوزنقه (عدد ۳۸) کم کنیم؛

اندازه ضلع y - اندازه قاعده بزرگ ذوزنقه = اندازه ضلع x

$$x = 38 - 12 = 26$$

در این دویم (فصل ۶) ۸ شکل های هم نهشت

هرگاه بتوانیم شکلی را بایک یا چند تبدیل هندسی (انتقال، تقارن و دوران) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را پوشانند، می گوئیم دو شکل بایکدیگر هم نهشت اند.



در شکل بالا دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle MNP$ بایکدیگر دوران 180° درجه، هم نهشت می شوند.

مثلث ABC با دوران 180° درجه به مرکز نقطه O بروی مثلث MNP منطبق می شود.

مثلث MNP نیز با دوران 180° درجه به مرکز نقطه O بروی مثلث ABC منطبق می شود.

* بنابراین می گوئیم: مثلث ABC با مثلث MNP هم نهشت است یا $\triangle ABC \cong \triangle MNP$

وقتی دو شکل هم نهشت شدند، اجزای متناظر نیز برابرند، بنابراین:

« تساوی اضلاع »

$$AB = MP = 4 \text{ cm}$$

$$AC = MN = 4 \text{ cm}$$

$$BC = NP = 9 \text{ cm}$$

« تساوی زاویه ها »

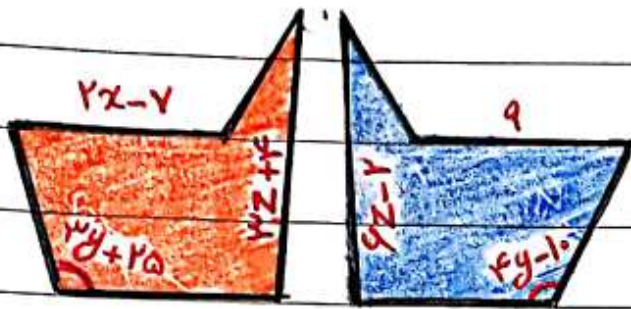
$$\hat{A} = \hat{M}$$

$$\hat{B} = \hat{P}$$

$$\hat{C} = \hat{N}$$

کاربرد تبدیلات هندسی: با استفاده از هم نهشتی شکل‌ها و نوشتن تساوی اجزای

متناظر، می‌توانیم ضلع یا زاویه مجهول را پیدا کنیم.



* در شکل زیر، دو شکل هم نهشت هستند.

الف) چه نوع تبدیلی صورت گرفته است؟

ب) اندازه x ، y و z را بدست آورید.

پاسخ الف) نوع تبدیل صورت گرفته «تقارن محوری» است.

پاسخ ب) برای به دست آوردن ضلع‌ها و زاویه مجهول، راهبرد تشکیل معادله، را برای

ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر به کار می‌گیریم:

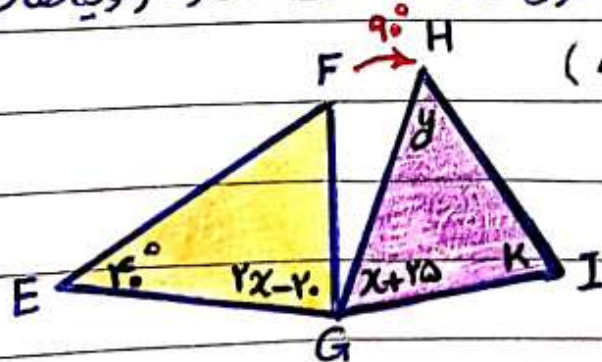
$$2x - 7 = 9 \rightarrow 2x = 9 + 7 = 16 \rightarrow x = \frac{16}{2} \rightarrow x = 8$$

$$4z - 2 = 3z + 4 \rightarrow 4z - 3z = 4 + 2 \rightarrow 3z = 6 \rightarrow z = 2$$

$$4y - 10 = 3y + 25 \rightarrow 4y - 3y = 25 + 10 \rightarrow y = 35$$

* مثلث HIG حاصل دوران 90 درجه مثلث EFG حول نقطه G است. اندازه زاویه‌های

مجهول را بیابید. $(\triangle EFG \cong \triangle HIG)$



$$\hat{E} = \hat{H} = y \rightarrow \hat{E} = \hat{H} = 40^\circ$$

$$\hat{F} = \hat{I} = k \rightarrow \hat{F} = \hat{I} = 180 - 110 = 70^\circ$$

$$\hat{G}_1 = \hat{G}_2 \rightarrow \hat{G}_1 = \hat{G}_2 = x + 25 = 70^\circ$$

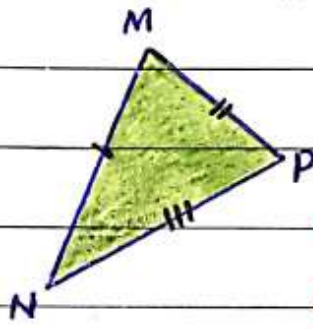
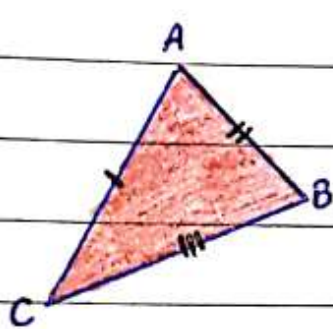
$$2x - 20 = x + 25 \rightarrow 2x - x = 20 + 25 \rightarrow x = 45$$

درس سوم (فصل ۶) : مثلث های هم نهشت

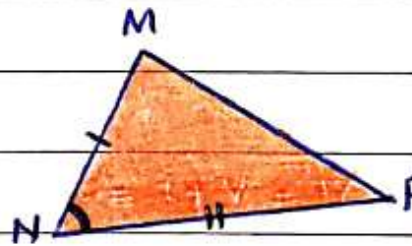
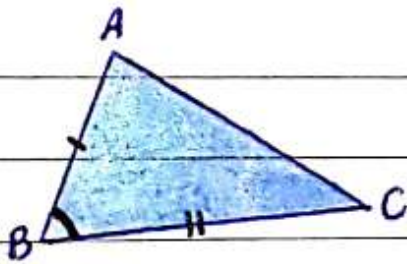
حالت های هم نهشتی دو مثلث عبارتند از :

- الف) تساوی سه ضلع هر دو مثلث که به اختصار حالت (ض، ض، ض) می گویند.
- ب) تساوی دو ضلع و زاویه بین هر دو مثلث که به اختصار حالت (ض، ز، ض) می گویند.
- ج) تساوی دو زاویه و ضلع بین هر دو مثلث که به اختصار حالت (ز، ض، ز) می گویند.

« ض : یعنی ضلع و ز : یعنی زاویه »
حالت الف) حالت (ض، ض، ض)

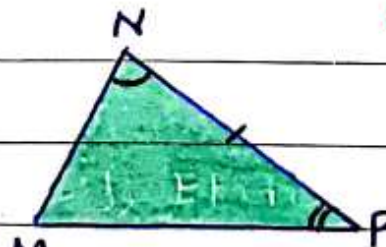
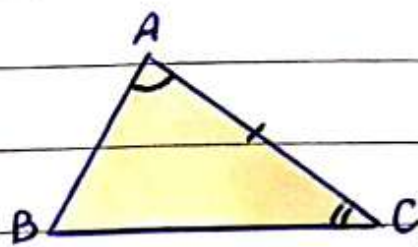


$$\left. \begin{array}{l} \text{ض } AC = MN \\ \text{ض } AB = MP \\ \text{ض } BC = NP \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$



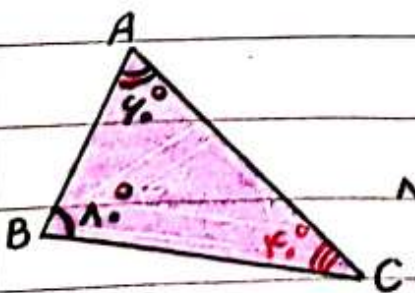
حالت ب) حالت (ض، ز، ض)

$$\left. \begin{array}{l} \text{ض } AB = MN \\ \text{ز } \hat{B} = \hat{N} \\ \text{ض } BC = NP \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$



حالت ج) حالت (ز، ض، ز)

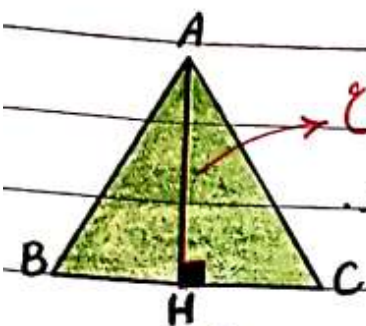
$$\left. \begin{array}{l} \text{ز } \hat{A} = \hat{N} \\ \text{ض } AC = NP \\ \text{ز } \hat{C} = \hat{P} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNP$$



$$\triangle ABC \not\cong \triangle MNP$$

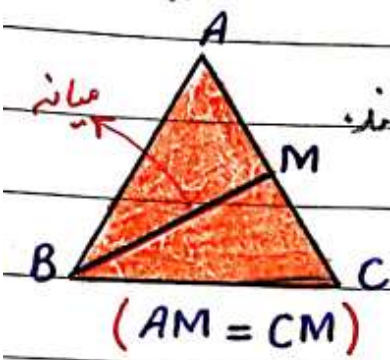
نکته: در هم نهشتی دو مثلث، حالت سه زاویه (ز، ز، ز) وجود ندارد، چون ممکن است دو مثلث زاویه های متناظر برابر داشته باشند ولی هم نهشت نباشند.

آشنایی با چند مفهوم هندسی :



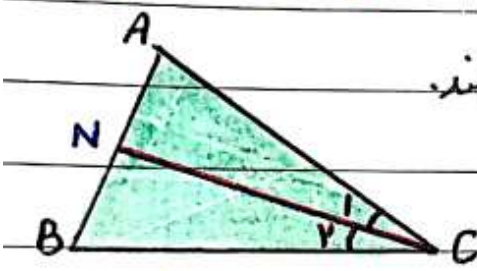
ارتفاع : پاره خطی که از رأس زاویه بر ضلع مقابل عمود می شود.

در شکل مقابل AH ارتفاع وارد بر ضلع BC است.



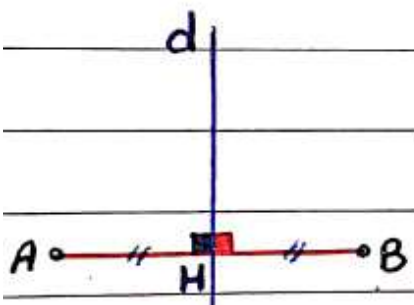
میان : پاره خطی که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل وصل می کند.

در شکل مقابل BM میان وارد بر ضلع AC است.



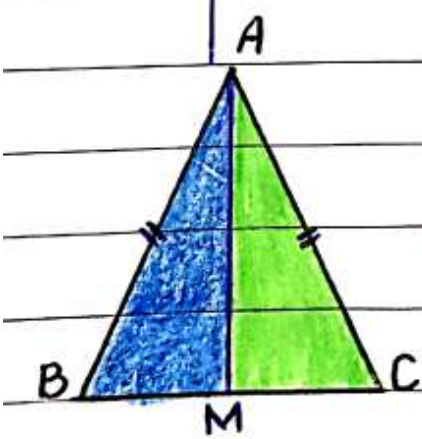
نیم ساز زاویه : نیم خطی که زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند.

در شکل مقابل CN نیمساز زاویه C است و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$.



عمود منصف یک پاره خط : منحنی است که بر یک پاره خط عمود می شود و آن را نصف می کند.

در شکل مقابل $d \perp AB$ و $AH = BH$.



* در شکل مقابل، مثلث ABC مساوی الساقین و AM

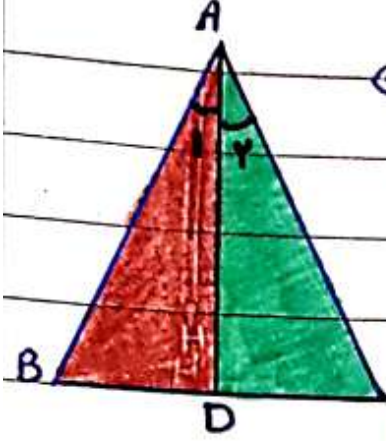
میان وارد بر قاعده است. ثابت کنید: $\Delta AMB \cong \Delta AMC$.

- $AM = AM$ ضلع مشترک
- $AB = AC$ مثلث مساوی الساقین
- $BM = CM$ خاصیت میان

(ض ض ض) $\Rightarrow \Delta AMB \cong \Delta AMC$

یادآوری : در مثلث مساوی الساقین ساق ها $(AB = AC)$ برابرند.

* در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه A در مثل متساوی الساقین



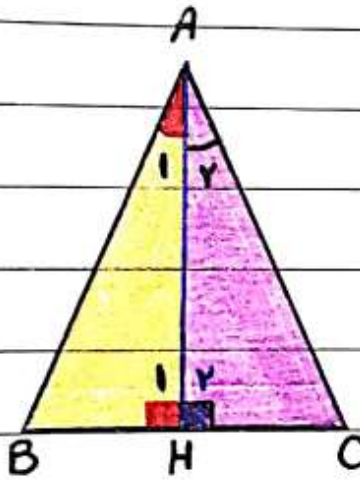
ABC است. آیا $BD = CD$ است؟ چرا؟

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \text{ (مثل متساوی الساقین)} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (AD نیمساز زاویه A)} \\ AD = AD \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta ABD \cong \Delta ACD \text{ (قضیة الضلع الزاویة)} \\ \Rightarrow BD = CD \end{array}$$

تساوی اجزای متناظر

نکته: وقتی دو مثلث هم نشسته شدند (باهر حالتی) تمام اجزای دو مثلث (ضلع و یا زاویه) برابرند.

نیز برابری شوند، (بر دلیل انطباق دو مثلث بر روی یکدیگر) که تساوی اجزای متناظر نام دارد.



* در شکل مقابل، AH نیمساز زاویه A و ارتفاع مثلث است.

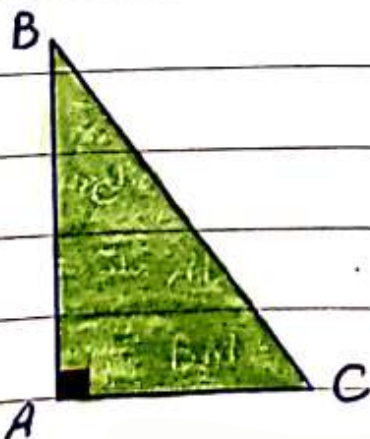
نشان دهید دو مثلث AHB و AHC هم نهضت اند.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (AH نیمساز زاویه A)} \\ AH = AH \text{ (ضلع مشترک)} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \text{ (ارتفاع مثلث)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta AHB \cong \Delta AHC \text{ (قضیة الضلع الزاویة)} \end{array}$$

مثلث قائم الزاویه: مثلثی که یک زاویه قائمه داشته باشد، مثلث قائم الزاویه نام دارد.

بزرگ ترین ضلع مثلث قائم الزاویه، وتر و اضلاع دیگر، ضلع های قائم نامیده می شوند.

وتر مثلث روبروی زاویه قائمه قرار دارد.



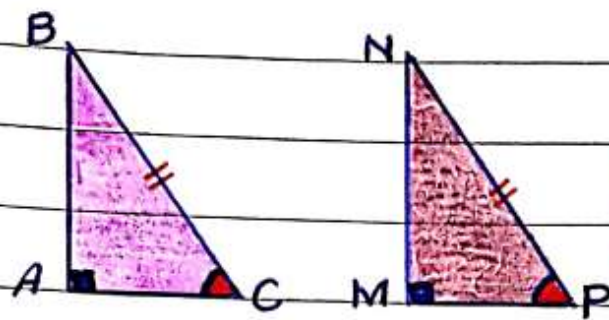
ضلع های AB و AC ضلع های قائم هستند.

ضلع BC (روبروی زاویه قائمه) وتر مثلث قائم الزاویه

ABC است.

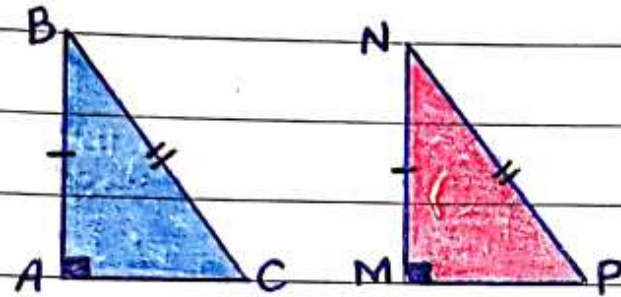
حالت های هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه:

الف) حالت وتر و یک زاویه تند (و ز) ب) حالت وتر و یک ضلع (وض)

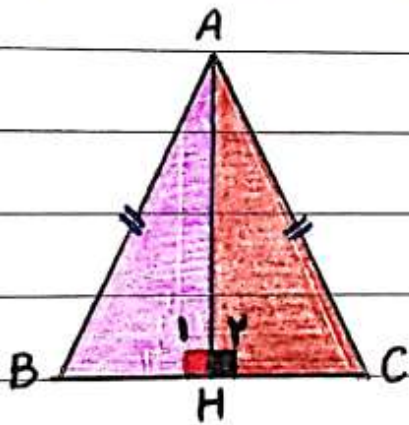


و: وتر ض: ضلع ز: زاویه تند

$$\left. \begin{array}{l} BC = NP \text{ (وتر)} \\ \hat{C} = \hat{P} \text{ (زاویه تند)} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta MNP \text{ (و ز)}$$



$$\left. \begin{array}{l} BC = NP \text{ (وتر)} \\ AB = MN \text{ (ضلع)} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta MNP \text{ (وض)}$$

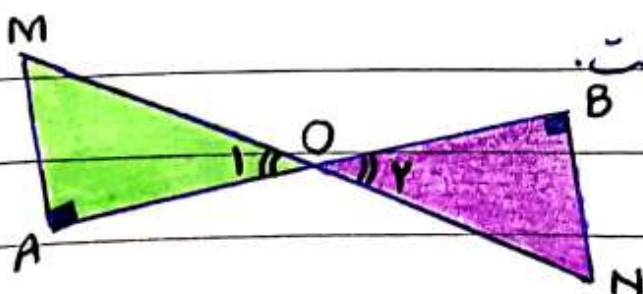


* در شکل مقابل مثلث مساوی الساقین است و

AH ارتفاع مثلث می باشد. دلیل هم نهشتی دو مثلث

را بیان کنید.

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \text{ (مثلث مساوی الساقین)} \\ AH = AH \text{ (ضلع مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AHB \cong \Delta AHC \text{ (وض)}$$

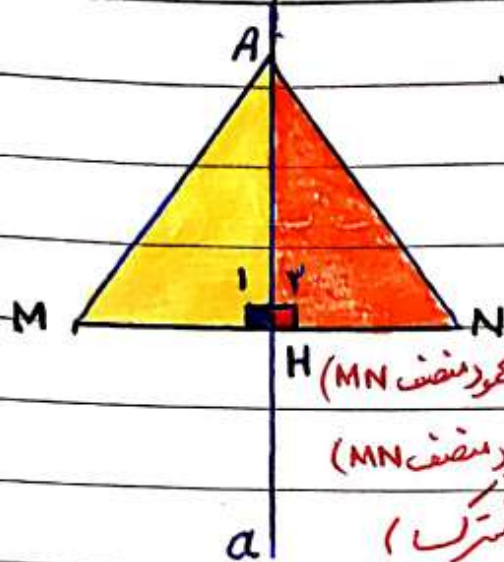


* در شکل مقابل نقطه O وسط پاره خط MN است.

دلیل هم نهشتی دو مثلث را بیان کنید.

$$\left. \begin{array}{l} OM = ON \text{ (نقطه O وسط MN)} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \text{ (زاویه های مقابل به این)} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta OAM \cong \Delta OBN \text{ (و ز)}$$

* در مثل متساوی الساقین a عمود منصف پایه MN است.



دلیل و حالت هم هستی نوشت را بیان کنید.

$$\left. \begin{array}{l} (خط a عمود منصف MN) \quad MH = NH \\ (خط a عمود منصف MN) \quad \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ (ضلع مشترک) \quad AH = AH \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta AMH \cong \Delta ANH \quad (\text{ض ض ض})$$

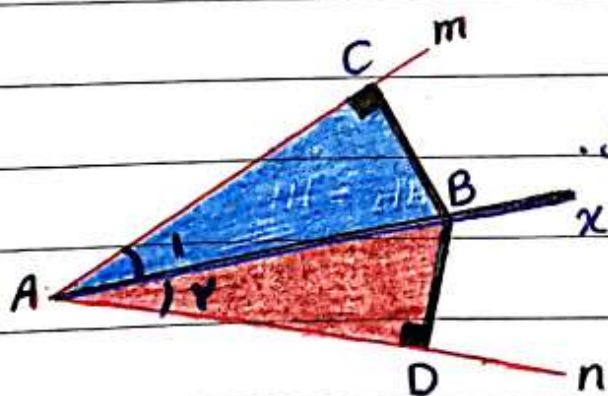
تذکره: در صورت نداشتن دلیل برای تساوی وترهای مثلث قائم الزاویه، حالات یکی ویژه

هم هستی نوشت قائم الزاویه (وز * وض) را کنار گذاشته و از حالت برای هم هستی اصلی دو

مثلث (ض ض ض * ض ض ض * ض ض ض) استفاده می کنیم.

نتیجه سوال بالا: هر نقطه روی عمود منصف یک پایه خط (نقطه A) از دو سر آن پایه خط

به یک اندازه است. ($AM = AN$)



* در مثل متساوی الساقین Ax نیم ساز زاویه \hat{mAn} است.

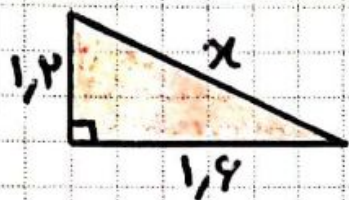
دلیل و حالت هم هستی نوشت را بنویسید.

$$\left. \begin{array}{l} (وتر مشترک) \quad AB = AB \\ (Ax نیم ساز \hat{mAn}) \quad \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ABD \quad (\text{و ز})$$

نتیجه سوال بالا: هر نقطه روی نیم ساز یک زاویه (نقطه B) از دو ضلع آن زاویه به یک اندازه است. ($BC = BD$)



سؤال اول: با توجه به شکل اندازه x و y را پیدا کنید.



$$x^2 = (1.2)^2 + (1.6)^2$$

$$x^2 = 1.44 + 2.56 = 4$$

$$x = \sqrt{4} = 2$$

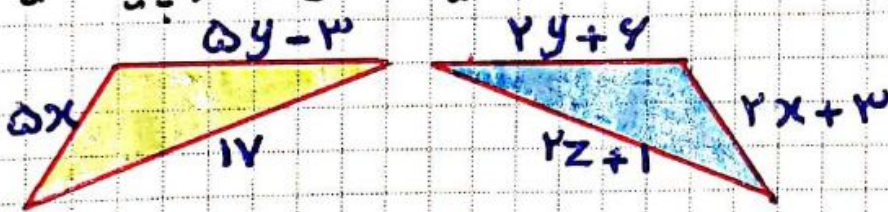


$$y^2 + (\sqrt{6})^2 = (\sqrt{15})^2$$

$$y^2 + 6 = 15 \rightarrow y^2 = 15 - 6 = 9 \rightarrow y = \sqrt{9} = 3$$

سؤال دوم: شکل های زیر هم نهشت اند. مقادیر x ، y ، z را پیدا کنید.

نوع تبدیل هم نهشتی
(تقارن محوری)



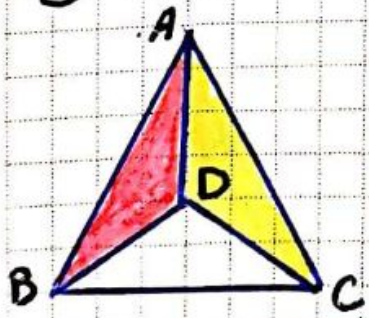
الف) $5x = 2x + 3 \rightarrow 5x - 2x = 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$

ب) $5y - 3 = 2y + 6 \rightarrow 5y - 2y = 3 + 6 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = 3$

ج) $2z + 1 = 17 \rightarrow 2z = 17 - 1 \rightarrow 2z = 16 \rightarrow z = 8$

سؤال سوم: در شکل زیر $AB = AC$ و $DB = DC$ است. دلیل و حالت هم نهشتی

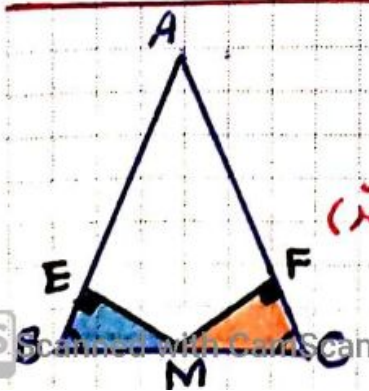
دو مثلث ABD و ACD را بیان کنید.



$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \text{ گفته مسئله} \\ AD = AD \text{ ضلع مشترک} \\ BD = CD \text{ گفته مسئله} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta \text{ (ض ض ض)} \\ \Delta \end{array} \rightarrow ABD \cong ACD$$

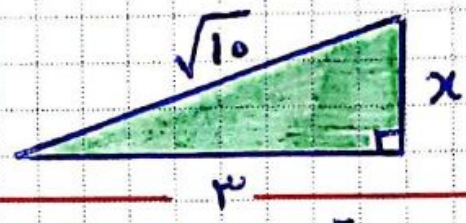
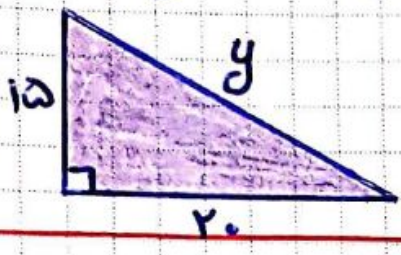
سؤال چهارم: مثلث ABC متساوی الساقین و نقطه M

وسط ضلع BC است. آیا $ME = MF$ برابرند؟ چرا؟



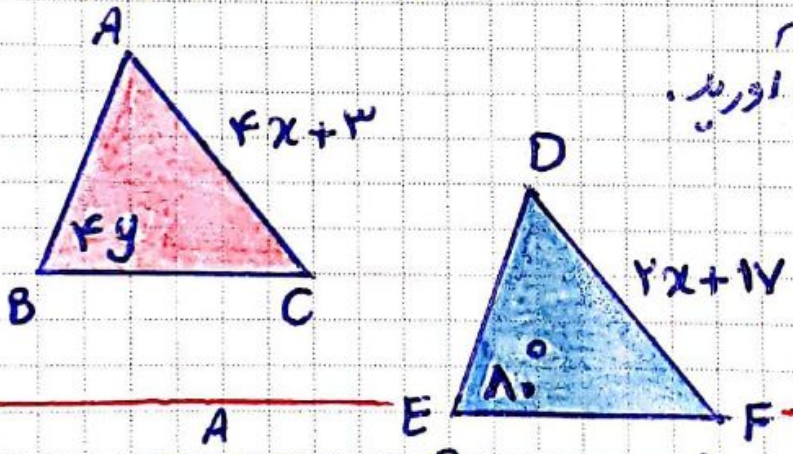
$$\left. \begin{array}{l} MB = MC \text{ (وتر)} \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta \text{ (وز)} \\ \Delta \end{array} \rightarrow MBE \cong MCF \xrightarrow{\text{تساوی اجزا}} ME = MF$$

سوال ۱) در هر مثل مقدار x و y را بدست آورید.

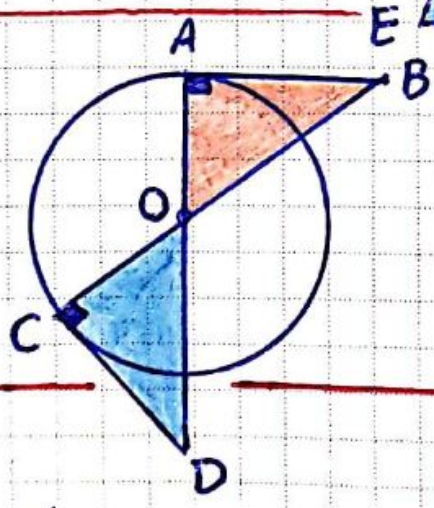


سوال دوم) قطر مستطیل ۱۳ سانتی متر و عرض آن ۵ سانتی متر است.
الف) طول مستطیل را پیدا کنید. ب) مساحت مستطیل را حساب کنید.

سوال سوم) دو مثلث زیر هم نهشت هستند. الف) نوع تبدیل را بنویسید.

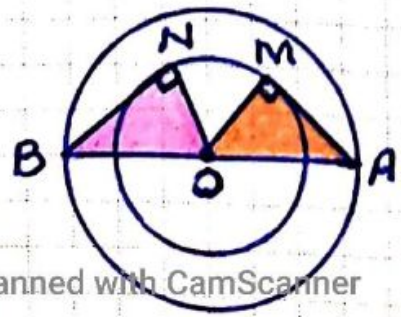


ب) مقدار x و y را بدست آورید.



سوال چهارم) دلیل هم نهشتی دو مثلث را نوشته و سپس اجزای متناظر دو مثلث را بنویسید.
(نقطه O مرکز دایره است)

سوال پنجم) در شکل زیر نقطه O مرکز دو دایره است. دلیل و حالت هم نهشتی دو مثلث OAM و OBN را بنویسید و سپس اجرای متناظر دو مثلث را بنویسید.



نمونه آزمون آنلاین (۱) - پایه هشتم

۱) حاصل عبارت $1 + 2 + 3 + \dots + 300$ کدام است؟

- الف) ۴۵۵۰۵ (ب) ۴۵۱۵۰ (ج) ۴۰۱۵۰ (د) ۹۰۳۰۰

۲) در صورت قرار دادن علامت «+» یا «-» در جای خالی، کمترین

مقدار ممکن عبارت $(+9) \square (-3) \square (+6) \square (+7)$

- کدام است؟ الف) ۱ (ب) -۲۵ (ج) -۵ (د) -۱۱

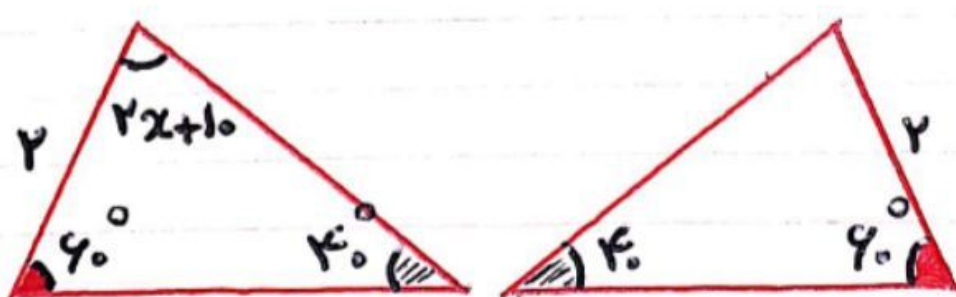
۳- جواب معادله $\frac{3}{2} = \frac{3}{4}x$ کدام است؟

- الف) $x = 6$ (ب) $x = -2$ (ج) $x = -3$ (د) $x = -4$

۴- قطر مستطیلی ۲۵ و عرض آن ۱۵ می باشد. طول آن برابر است با:

- الف) ۲۰ (ب) ۱۸ (ج) ۱۶ (د) ۱۹

۵- دو مثلث زیر هم نهشت اند. اندازه x کدام است؟



- الف) ۲۰ (ب) ۳۰

- ج) ۳۵ (د) ۴۰

۵	۴	۳	۲	۱