بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

حسابان (۱)

پایه یازدهم ریاضی و فیزیک

فصل ۴

۱ رادیان

۲ نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

۳ توابع مثلثاتی

۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

تهیه و تنظیم : مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2

Majid.ghaderi.mathclass.2

فصل ۴
درس ۴

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

اهداف

- آشنایی با روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا و کاربرد آنها
- آشنایی با نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

$$(\tan\alpha)(\cot\alpha) = ۱$$

$$۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$$

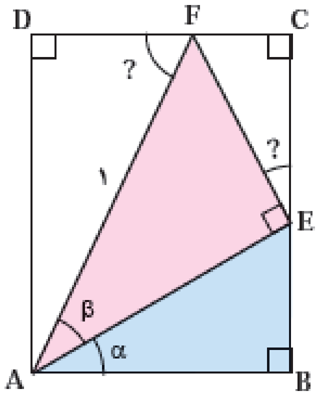
$$۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

اتحاد مثلثاتی

به روابط مثلثاتی مانند عبارت های فوق که همواره به ازای هر α برقرارند، اتحاد مثلثاتی می گویند.

اتحادهایی مانند اتحادهای بالا که در سال قبل خوانده ایم، تنها شامل یک زاویه هستند. اکنون در این درس، برخی از روابطی را که در آنها دو زاویه مختلف به کار رفته است فرا می گیریم.

فعالیت صفحهٔ ۱۱۰ کتاب درسی



۱) در شکل مقابل چهار ضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. اندازهٔ پاره خط AF برابر یک و زوایای α و β داده شده است.

الف) با تکمیل روابط زیر اندازهٔ زاویه های $F\hat{E}C$ و $A\hat{F}D$ را برحسب α و β به دست آورید.

$F\hat{E}C + ۹۰^\circ + A\hat{E}B = ۱۸۰$: زاویه $\hat{E}$ نیم صفحه است.

$\alpha + ۹۰^\circ + A\hat{E}B = ۱۸۰$: مجموع زاویه های داخلی مثلث ABE برابر ۱۸۰ درجه است.

$\rightarrow F\hat{E}C = \alpha$

$\rightarrow A\hat{F}D = \alpha + \beta$: اضلاع AB و DC با هم موازی و پاره خط AF خطی مورب است که آن ها را قطع کرده است.

ب) اندازهٔ اضلاع AD و DF از مثلث ADF را با توجه به این که AF برابر یک است، برحسب سینوس و کسینوس زاویهٔ $D\hat{F}A$ بنویسید.

$$\sin D\hat{F}A = \frac{AD}{AF} \rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \frac{AD}{AF} \rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \frac{AD}{۱} \rightarrow \sin(\alpha+\beta) = AD$$

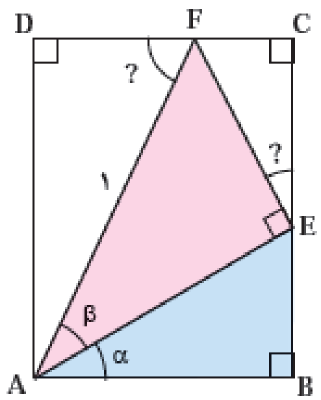
$$\cos D\hat{F}A = \frac{DF}{AF} \rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{DF}{AF} \rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \frac{DF}{۱} \rightarrow \cos(\alpha+\beta) = DF$$

پ) اضلاع AE و EF از مثلث قائم الزاویه AEF را با توجه به این که وتر آن برابر یک است، برحسب سینوس و کسینوس زاویهٔ β بنویسید.

$$\sin\beta = \frac{EF}{AF} \rightarrow \sin\beta = \frac{EF}{۱} \rightarrow \sin\beta = EF$$

$$\cos\beta = \frac{AE}{AF} \rightarrow \cos\beta = \frac{AE}{۱} \rightarrow \cos\beta = AE$$

ادامهٔ فعالیت صفحهٔ ۱۱۰ کتاب درسی



پ) اندازهٔ پاره خط های BE، EC، FC و AB را برحسب سینوس و کسینوس زاویهٔ α به دست آورید.

$$\sin\alpha = \frac{BE}{AE} \to BE = \sin\alpha \times AE \xrightarrow{\cos\beta = AE} BE = \sin\alpha . \cos\beta$$

$$\sin\alpha = \sin F\hat{E}C = \frac{FC}{FE} \to FC = \sin\alpha \times FE \xrightarrow{\sin\beta = FE} FC = \sin\alpha . \sin\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AE} \to AB = \cos\alpha \times AE \xrightarrow{\cos\beta = AE} AB = \cos\alpha . \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \cos F\hat{E}C = \frac{EC}{FE} \to EC = \cos\alpha \times FE \xrightarrow{\sin\beta = FE} EC = \cos\alpha . \sin\beta$$

ث) از تساوی اضلاع روبه رو در مستطیل $ABCD$ روابط زیر به دست می آید. آنها را باتوجه به قسمت های «الف» تا «ت» کامل کنید.

$$AD = BE + EC \quad = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$$

$$AB = DF + FC \quad \to \cos\alpha . \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha . \sin\beta$$

$$\to \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha . \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta$$

۲) توضیح دهید چرا اگر اندازهٔ پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است.

اگر اندازهٔ پاره خط AF برابر $r \neq 1$ باشد، از طرفین تساوی ساده خواهد شد و خط می خورد.

جمع بندی فعالیت

صفحه ۱۱۱ کتاب درسی

در حالت کلی برای زوایای دلخواه α و β داریم:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

اگر در روابط بالا به جای β از $-\beta$ استفاده شود، با توجه به نسبت های مثلثاتی زوایای قرینه خواهیم داشت:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

مثال صفحهٔ ۱۱۱ کتاب درسی

مقدار $\sin ۷۵^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\sin ۷۵^\circ = \sin(۴۵^\circ + ۳۰^\circ)$$

طبق رابطهٔ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta$ خواهیم داشت:

$$\sin(۴۵^\circ + ۳۰^\circ) = \sin ۴۵^\circ \cos ۳۰^\circ + \cos ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{۶}}{۴} + \frac{\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

مثال صفحهٔ ۱۱۱ کتاب درسی

درستی رابطهٔ زیر را نشان دهید.

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = -\cot\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{۲}\,.\cos\theta+\sin\theta\,.\cos\frac{\pi}{۲}}{\cos\frac{\pi}{۲}\,.\cos\theta-\sin\frac{\pi}{۲}\,.\sin\theta}$$

$$= \frac{(۱)\cos\theta+(\sin\theta)(۰)}{(۰)\cos\theta-(۱)\sin\theta} = \frac{\cos\theta+۰}{۰-\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

نکته تکمیلی

در حالت کلی برای زوایای دلخواه α و β داریم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\,.\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\,.\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\,.\cot\beta-۱}{\cot\alpha+\cot\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\,.\cot\beta+۱}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

تمرین ۱ صفحهٔ ۱۱۲ کتاب درسی

مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ب

در انتهای تمرین ۱ به آن می پردازیم. (با این قسمت کار داریم)

پ

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{3} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

تمرین ۱ صفحهٔ ۱۱۲ کتاب درسی

مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

ت) $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \sin 90^\circ \cos 30^\circ + \cos 90^\circ \sin 30^\circ$

$$= (1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (0)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

در درس قبل آموختیم: $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ث) $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos 90^\circ \cos 45^\circ - \sin 90^\circ \sin 45^\circ =$

$$= (0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در درس قبل آموختیم: $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

تمرین ۱ صفحهٔ ۱۱۲ کتاب درسی

مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

برگردیم به قسمت «ب»

پ $\tan ۱۰۵^\circ = \tan(۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \dfrac{\sin(۶۰^\circ + ۴۵^\circ)}{\cos(۶۰^\circ + ۴۵^\circ)} =$

$$\frac{\sin ۶۰^\circ \cos ۴۵^\circ + \sin ۴۵^\circ \cos ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ \cos ۴۵^\circ - \sin ۶۰^\circ \sin ۴۵^\circ} = \frac{\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) + \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)}{\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) - \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)} =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{۶}}{۴} + \frac{\sqrt{۲}}{۴}}{\frac{\sqrt{۲}}{۴} - \frac{\sqrt{۶}}{۴}} = \frac{\frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}}{\frac{\sqrt{۲} - \sqrt{۶}}{۴}} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} - \sqrt{۶}} = \frac{\sqrt{۳}\sqrt{۲} + \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} - \sqrt{۳}\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۳} + ۱)}{\sqrt{۲}(۱ - \sqrt{۳})} = \frac{\sqrt{۳} + ۱}{۱ - \sqrt{۳}}$$

رابطهٔ مستقیم

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha \,.\, \tan\beta}$$

$$\tan(۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \frac{\tan ۶۰^\circ + \tan ۴۵^\circ}{۱ - \tan ۶۰^\circ \,.\, \tan ۴۵^\circ} = \frac{\sqrt{۳} + ۱}{۱ - \sqrt{۳} \times ۱} = \frac{\sqrt{۳} + ۱}{۱ - \sqrt{۳}}$$

تمرین ۲ صفحه ۱۱۲ کتاب درسی

فرض کنید $\cos\alpha = \frac{۴}{۵}$ و $\cos\beta = -\frac{۱۲}{۱۳}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ چیست؟

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,.\cos\beta + \cos\alpha\,.\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,.\cos\beta + \sin\alpha\,.\sin\beta$$

می دانیم که $\sin^{۲}\alpha + \cos^{۲}\alpha = ۱$ و انتهای کمان α در ربع اول است. پس خواهیم داشت:

$$\sin\alpha = \sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha} = \sqrt{۱-\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۲}} = \sqrt{\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۳}{۵}$$

می دانیم که $\sin^{۲}\beta + \cos^{۲}\beta = ۱$ و انتهای کمان β در ربع دوم است. پس خواهیم داشت:

$$\sin\beta = \sqrt{۱-\cos^{۲}\beta} = \sqrt{۱-\left(\frac{-۱۲}{۱۳}\right)^{۲}} = \sqrt{\frac{۲۵}{۱۶۹}} = \frac{۵}{۱۳}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{-۱۲}{۱۳}\right) + \left(\frac{۵}{۱۳}\right)\left(\frac{۴}{۵}\right) = \frac{-۳۶}{۶۵} + \frac{۲۰}{۶۵} = \frac{-۱۶}{۶۵}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \left(\frac{۴}{۵}\right)\left(\frac{-۱۲}{۱۳}\right) + \left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۵}{۱۳}\right) = \frac{-۴۸}{۶۵} + \frac{۱۵}{۶۵} = \frac{-۳۳}{۶۵}$$

ب) انتهای زاویهٔ $\alpha+\beta$ در کدام ربع قرار می گیرد؟

$$\cos(\alpha+\beta) = \left(\frac{۴}{۵}\right)\left(\frac{-۱۲}{۱۳}\right) - \left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۵}{۱۳}\right) = \frac{-۴۸}{۶۵} - \frac{۱۵}{۶۵} = \frac{-۶۳}{۶۵}$$

انتهای کمان زاویهٔ $\alpha+\beta$ در ربع سوم قرار دارد
زیرا سینوس و کسینوس آن منفی است.

تمرین ۳ صفحه ۱۱۲ کتاب درسی

نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

با استفاده از روابط نسبت های مجموع دو زاویه نشان دهید که:

الف) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

پ) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ت) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

الف) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha \,.\, \cos\alpha + \cos\alpha \,.\, \sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

ب) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \,.\, \cos\alpha - \sin\alpha \,.\, \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

پ) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \xrightarrow{\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha} \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$

$\to \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ت) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \xrightarrow{\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha} \cos 2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$

$\to \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

تمرین ۴ صفحه ۱۱۲ کتاب درسی

نسبت های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $۲۲/۵^\circ$ به دست آورید.

$$\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱ \rightarrow ۱ + \cos ۲x = ۲\cos^۲ x \rightarrow \frac{۱ + \cos ۲x}{۲} = \cos^۲ x$$

$$\xrightarrow{\text{۲۲/۵ درجه در ربع اول است}} \cos x = \sqrt{\frac{۱ + \cos ۲x}{۲}}$$

$$\rightarrow \cos ۲۲/۵^\circ = \sqrt{\frac{۱ + \cos ۴۵^\circ}{۲}} = \sqrt{\frac{۱ + \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}{۲}} = \sqrt{\frac{\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲}}{۲}} = \sqrt{\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۴}} = \frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x \rightarrow ۱ - \cos ۲x = ۲\sin^۲ x \rightarrow \frac{۱ - \cos ۲x}{۲} = \sin^۲ x$$

$$\xrightarrow{\text{۲۲/۵ درجه در ربع اول است}} \sin x = \sqrt{\frac{۱ - \cos ۲x}{۲}}$$

$$\rightarrow \sin ۲۲/۵^\circ = \sqrt{\frac{۱ - \cos ۴۵^\circ}{۲}} = \sqrt{\frac{۱ - \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)}{۲}} = \sqrt{\frac{\frac{۲ - \sqrt{۲}}{۲}}{۲}} = \sqrt{\frac{۲ - \sqrt{۲}}{۴}} = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۱ : مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x \rightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = \cos^2 x$$

$$\xrightarrow{\text{۱۵ درجه در ربع اول است}} \cos x = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$$

$$\rightarrow \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \rightarrow 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \rightarrow \frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x$$

$$\xrightarrow{\text{۱۵ درجه در ربع اول است}} \sin x = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$\rightarrow \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۲ : فرض کنید $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $\cos ۲\alpha$

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ \xrightarrow{\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}} \cos ۲\alpha = ۲\left(\frac{۵}{۱۳}\right)^۲ - ۱ = ۲\left(\frac{۲۵}{۱۶۹}\right) - ۱$$

$$= \frac{۵۰}{۱۶۹} - ۱ = \frac{-۱۱۹}{۱۶۹}$$

ب) $\sin ۲\alpha$

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \xrightarrow{\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}} \sin^۲\alpha + \left(\frac{۵}{۱۳}\right)^۲ = ۱ \rightarrow \sin^۲\alpha = ۱ - \left(\frac{۲۵}{۱۶۹}\right)$$

$$\rightarrow \sin^۲\alpha = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع اول است}} \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha \,.\, \cos\alpha \xrightarrow[\sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}]{\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}} \sin ۲\alpha = ۲\left(\frac{۱۲}{۱۳}\right)\left(\frac{۵}{۱۳}\right) = \frac{۱۲۰}{۱۶۹}$$

پایان درس چهارم