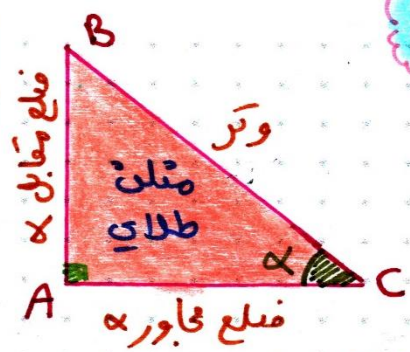


فصل دوم

مثلثات

* نسبت های مثلثاتی:



$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

نتیجه گیری

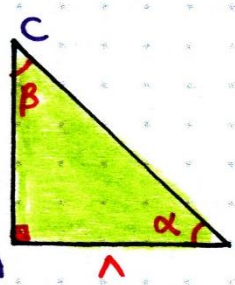
$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

تست: در مثلث قائم الزاویه مقابل آبر $\sin \beta = \frac{4}{5}$ باشد مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

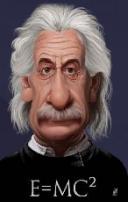


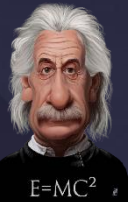
$$\sin \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{4}{5} \begin{cases} AB = 4k \\ BC = 5k \end{cases}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 25k^2 = 16k^2 + AC^2 \Rightarrow AC = 3k \Rightarrow \tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{3k}{4k} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

حرفه ای به نسبت مثلثاتی داده شود و سایر نسبت ها را بخوانید از مثلث طلایی استفاده کنید. سیو کن

اعداد متناوبه $3, 4, 5 \Rightarrow 9, 16, 25$ به طور کلی $3k, 4k, 5k$





نکته ۲۰ ← هرگاه مجموع دو زاویه ۹۰ شود ، دو زاویه را متمم می‌گویند .
 $\alpha + \beta = 90^\circ$ $\sin \alpha = \cos \beta$ $\tan \alpha = \cot \beta$

و بالعکس
 نکته ۲۱ ← هرگاه مجموع دو زاویه ۱۸۰ شود ، دو زاویه را مکمل می‌گویند .
 $\alpha + \beta = 180^\circ$ $\sin \alpha = \sin \beta$

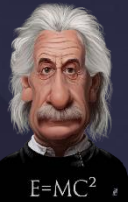
$\cos \alpha = -\cos \beta$ $\tan \alpha = -\tan \beta$ $\cot \alpha = -\cot \beta$

جدول ضرب مثلثات : تبدیل رادیان به درجه $\Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

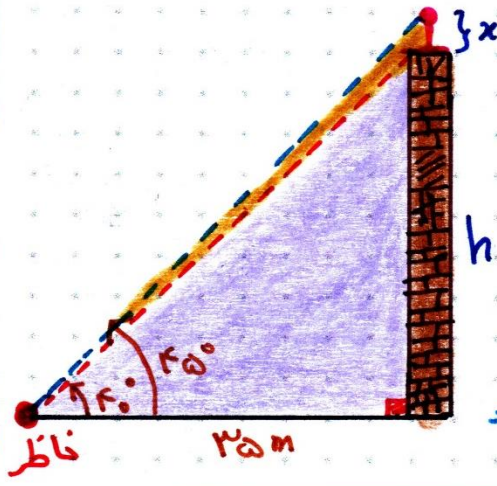
رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	2π
درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۱	$\sqrt{3}$	تَن	۰	تَن	۰
$\cot \alpha$	تَن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	۰	تَن	۰	تَن

تست : حاصل عبارت $\frac{\sin 40^\circ + \tan 70^\circ}{\cos 50^\circ + \cot 20^\circ}$ کدام است ؟

$\frac{\sin 40^\circ + \tan 70^\circ}{\sin 40^\circ + \tan 70^\circ} = 1$



نکته: ناظر در فاصله $35m$ از دیواری ایستاده است که مجبهای دور آن قرار دارد. اند ناظر پایین ترین و بالاترین قسمت مجبها را با زاویه های 40° و 45° رویت کند. ارتفاع مجبها چقدر است؟



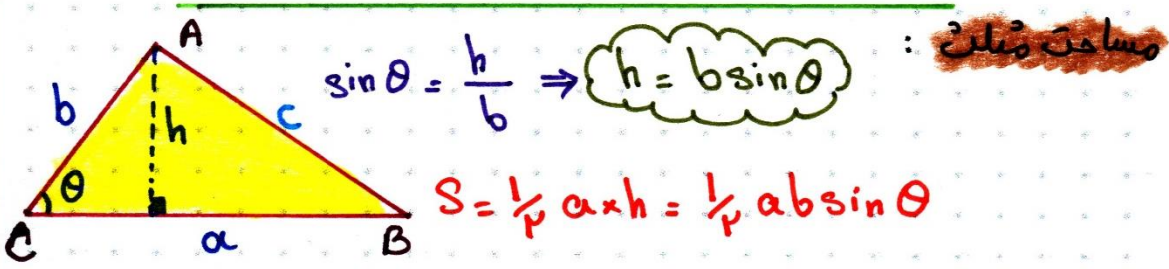
$(\tan 40^\circ = 1/1.1) \quad 6 \quad 6.4 \quad 7 \quad 7.2 \quad x$

$\tan 40^\circ = \frac{h}{35} \Rightarrow \frac{1}{1.1} = \frac{h}{35}$ **راه حل**

$\Rightarrow h = 28$

$\tan 45^\circ = \frac{x+h}{35}$

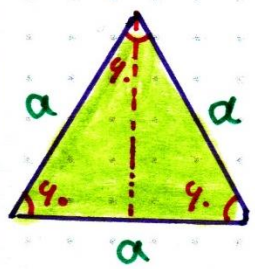
$\Rightarrow 1 = \frac{x+h}{35} \Rightarrow x = 7$



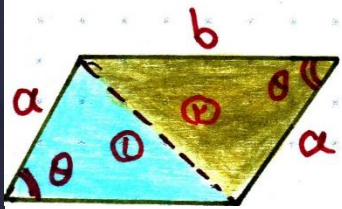
$\sin \theta = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \sin \theta$ **مساحت مثلث**

$S = \frac{1}{2} a \times h = \frac{1}{2} a b \sin \theta$

نکته: $S = \frac{1}{2} a b \sin C = \frac{1}{2} a c \sin B = \frac{1}{2} b c \sin A$ **مساحت مثلث متساوی الاضلاع**

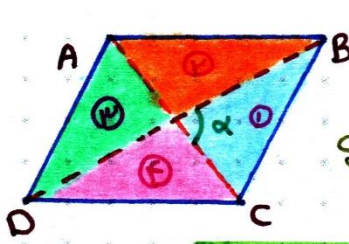


$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$, $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$
 ارتفاع



$S_1 = S_2$ **مساحت متوازی الاضلاع**

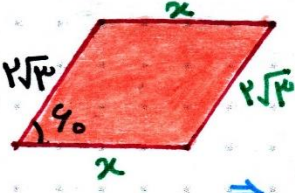
$S_{\square} = a b \sin \theta$



مساحت متوازی الاضلاع با داشتن قطرهای:

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 \Rightarrow S_{\text{موازی}} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \alpha$$

مثال: محیط متوازی الاضلاع مقابل برابر با $4(2 + \sqrt{3})$ است. مساحت آن کدام است؟



محیط = $2(2\sqrt{3}) + 2x$

$$\Rightarrow 4\sqrt{3} + 2x = 4(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow x = 4$$

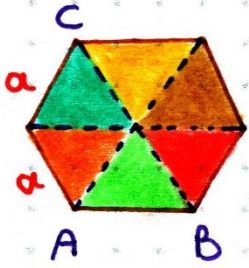
$$S = 4 \times 2\sqrt{3} \times \sin 60 = 12$$



مثال: راه حل



مساحت شش ضلعی منتظم: 6 برابر مساحت مثلث متساوی الاضلاع



$$S = 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$$

* طول قطرهای بزرگ = دو برابر طول ضلع هر مثلث

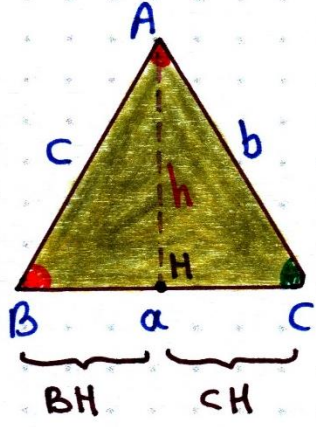
$$BC = 2a$$

$$AC = \sqrt{3}a$$

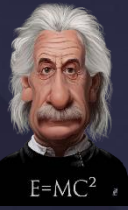
طول قطرهای کوچک = 2 برابر طول ارتفاع هر مثلث

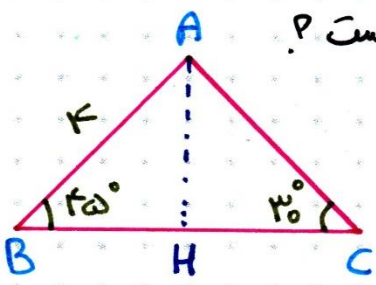
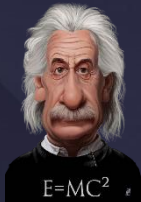
قضیه سینها

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



$$BC \Rightarrow \underbrace{b \cos C}_{CH} + \underbrace{c \cos B}_{BH}$$



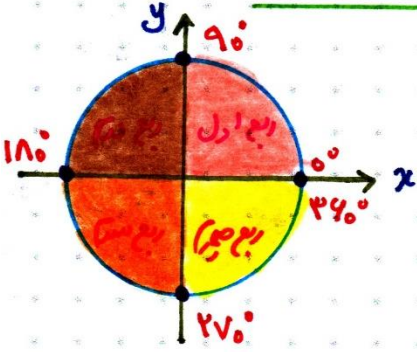


مثال: در مثلث مقابل طول ضلع BC کدام است؟

$$\frac{f}{\sin 30} = \frac{AC}{\sin 45} \Rightarrow AC = 4\sqrt{2}$$

راهنما

$$BC = BH + CH = c \cos 45 + b \cos 30 = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

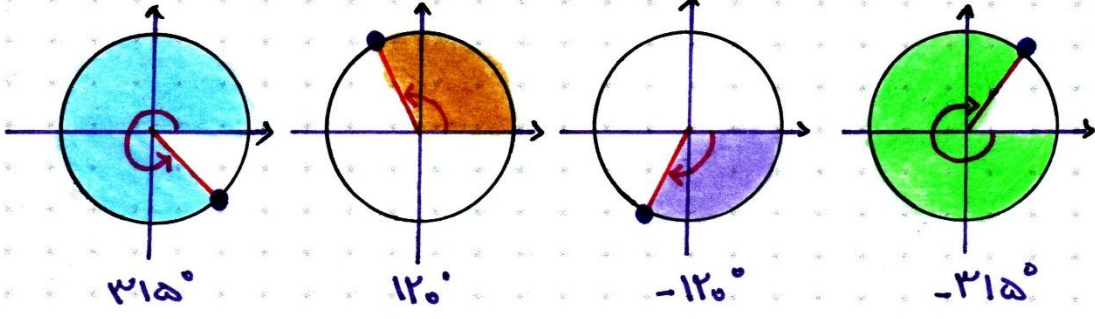


دایره مثلثاتی: دایره‌ای به شعاع یک واحد

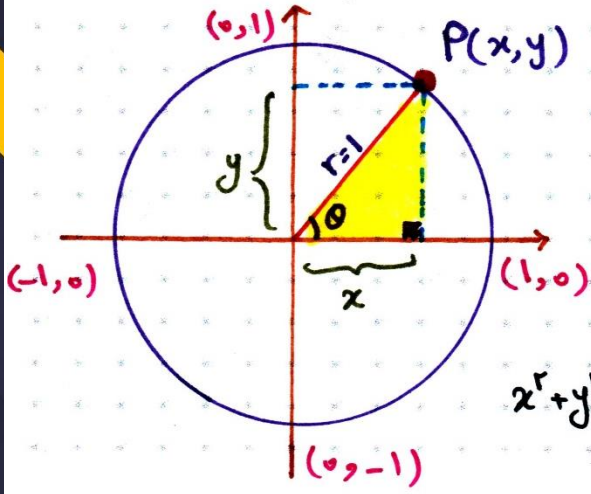
و مرکز مبدأ مختصات.

زاویه مثبت: جهت حرکت عقربه‌های ساعت

زاویه منفی: جهت حرکت عقربه‌های ساعت



نکته مهم: هر نقطه روی دایره مثلثاتی یک طول و یک عرض دارد:

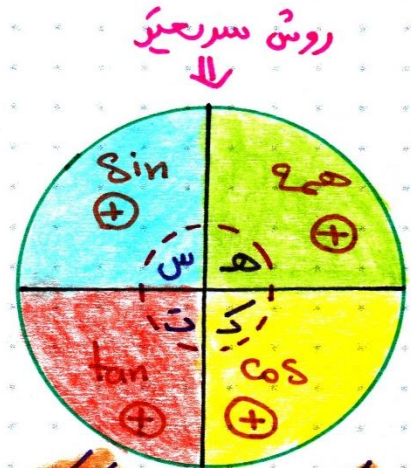
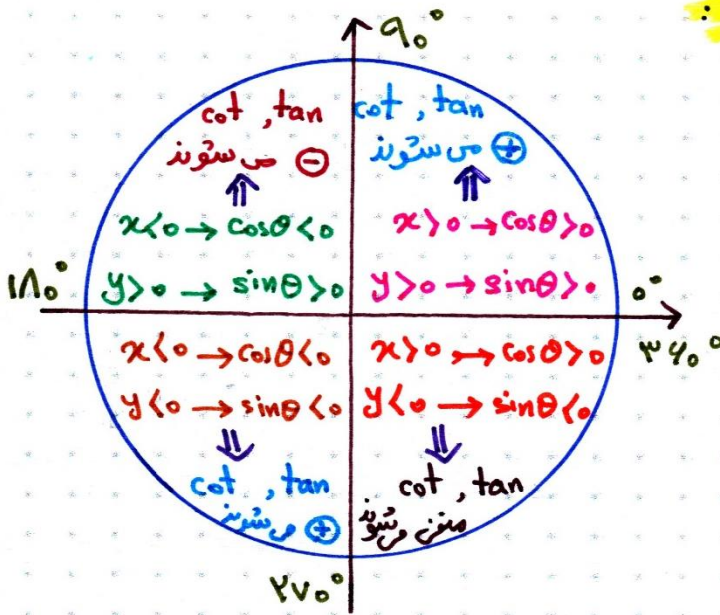


$$y = \sin \theta, \quad x = \cos \theta$$

رابطه فیثاغورس

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

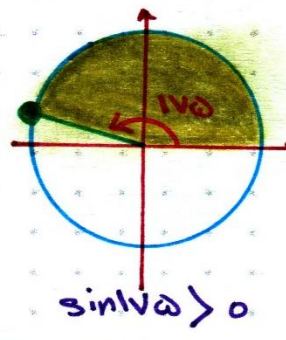
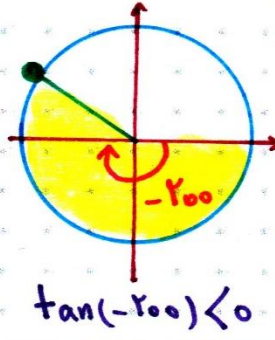
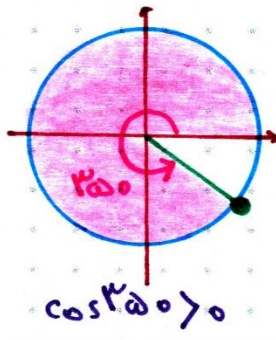
علامت نسبت های مثلثاتی :



کاستر

همیشه هم علامت هستند. $\cot \theta$, $\tan \theta$

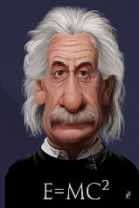
علامت $\cot(500)$, $\tan(-200)$, $\cos 340$, $\sin 175$ را بیابید



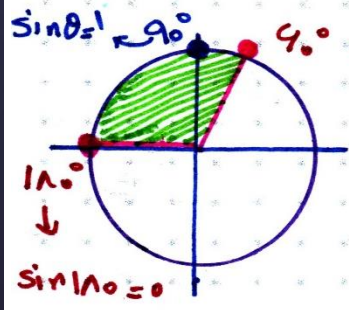
تعیین محدوده مثلثاتی : باید دایره رسم کرد و زاویه ها را مشخص کرده و

ناحیه بین آن ها را حاستور زده و در زاویه های مشخص شده و هم چنین زاویه های مرکزی (0 , 90 , 180 , 270 , 360) نسبت

مثلثاتی را پیدا کرده و min و max را به عنوان محدوده در نظر می گیریم.



مثال: اگر $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ در تغییرات $\sin \theta$ کدام است؟



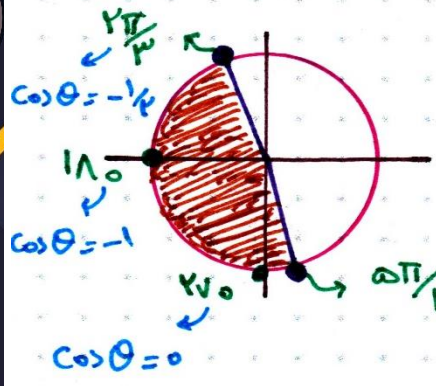
$90^\circ \Rightarrow \sin 90^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \min = 0$
 $\max = 1$

$\Rightarrow 0 \leq \sin \theta \leq 1$

راصل

مثال: اگر $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{5\pi}{3}$ در تغییرات $\cos \theta = \frac{m-1}{2}$ از چه حدود m را



$\min = -1$
 $\max = \frac{1}{2}$

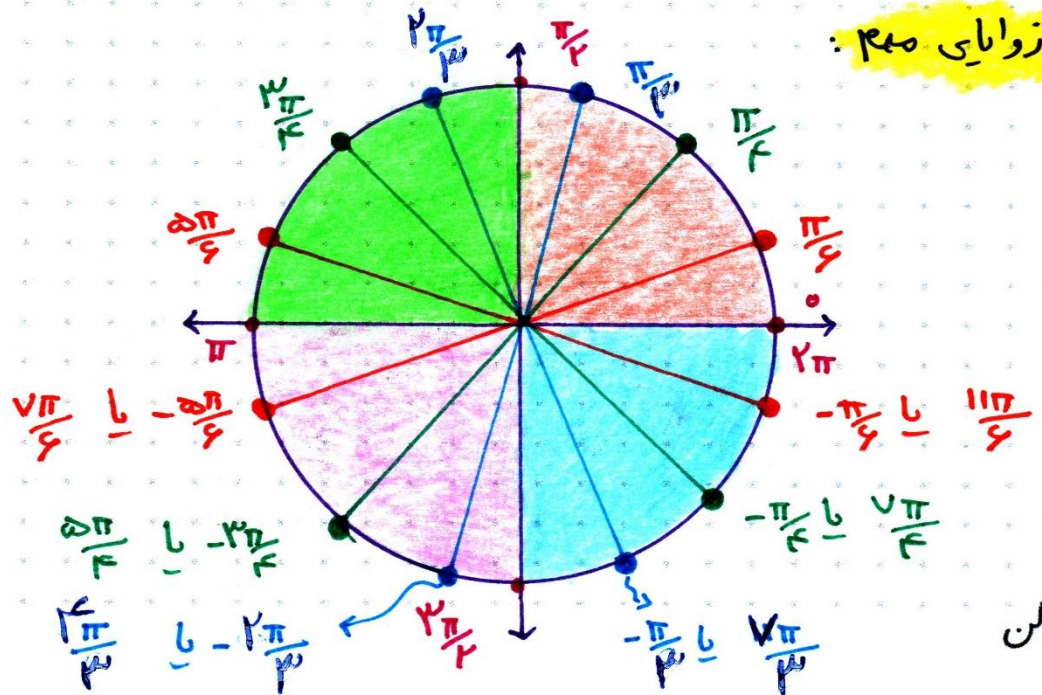
$\Rightarrow -1 < \cos \theta \leq \frac{1}{2}$

\Downarrow
 $-1 < \frac{m-1}{2} \leq \frac{1}{2}$

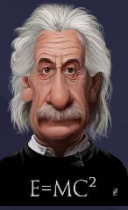
$\Rightarrow -1 < m \leq 2$

بیابید.

خافاره زوایای مهم:



سیو کن

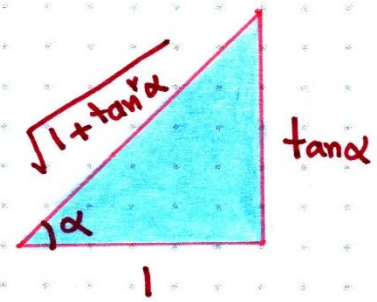
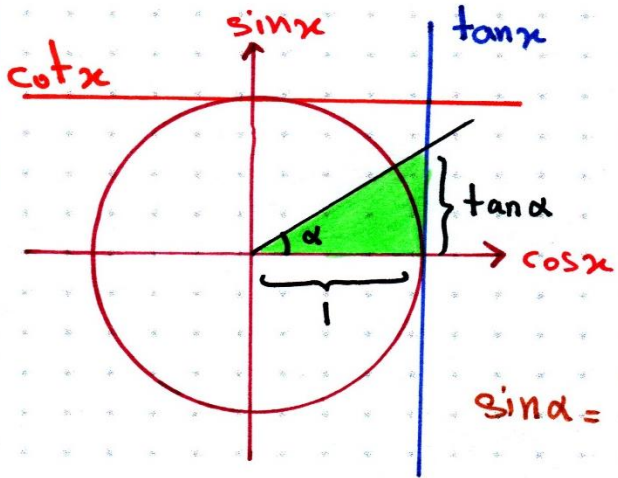


روابط مثلثاتی مهم مهم :

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ \rightarrow $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

② $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x}$

③ روابط عزیزیه و آسما (برگرفته از استاد منتظرین)



$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$ $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$

$\Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}$

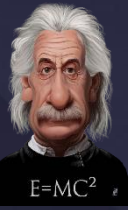
$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha}$

همیشه از عزیز یا کب بالا
 می آید یا \tan^2 یا \cot^2

\sin , \tan قوسم و خوشید بدیدیرند
 \cos , \cot

مادری بازی من کشته و قوسم خوشید
 بالا من آید

سیوکن



* اگر قوسین باشند \tan^2 یا \cot^2 بالا می آید، در غیر این صورت عدد یک بالا می آید.

نتیجه گیری $\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

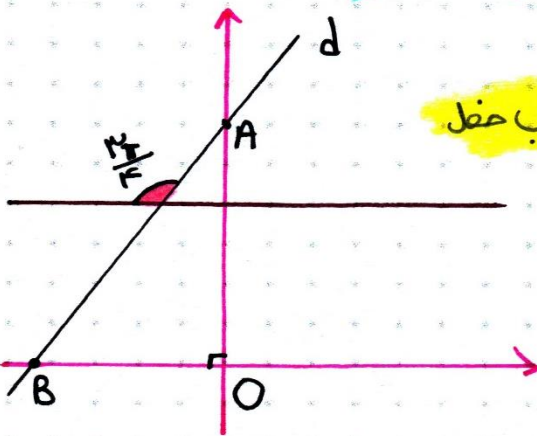
تست: اگر $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x \right) = ? \frac{1}{|\cos x|} (1 - \sin^2 x)$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\cos x|} \times \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{-\cos x} = -\cos x$$

تست: معادله خط l به صورت $2x + ay + 3 = 0$ است. مساحت مثلث AOB کدام است؟



شیب خط = $\tan \alpha$

زاویه ای است که خط با جهت + محور xها می سازد.

$2x + ay + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{a}x - \frac{3}{a}$

\Rightarrow شیب خط = $\tan \frac{3\pi}{4} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

شیب خط: $-\frac{2}{a}$

خط است باید زاویه با جهت

+ را بیدار کرد.

$\Rightarrow a = -2 \Rightarrow y = x + \frac{3}{2}$

$S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$

سیو کن

