دبیرستان
استعداد های ناب صالحین

ناحیه ۳ اهواز

جزوه ی درس ریاضیات پایه نهم

فصل دوم : اعداد حقیقی

تهیه کننده : فیروز محمودی

همراه : ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

@firouz1363

تعریف عدد گویا: به هر عددی که بتوانیم آن را به صورت یک کسر با شرایط زیر بنویسیم، عدد گویا می گویند.

الف) صورت و مخرج آن کسر عدد صحیح باشند.

ب) مخرج آن کسر مخالف صفر باشد.

بنابراین اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $b \neq 0$ باشد، کسر $\frac{a}{b}$ را یک عدد گویا می نامند.

نکته: مجموعه ی اعداد گویا را با حرف Q نشان می دهند و داریم:

$$\boxed{Q = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in Z ,\ b \neq 0 \right\}}$$

مثال: اعداد $-\frac{2}{3}$ ، 0 ، -5 ، $\frac{3}{7}$ عدد گویا می باشند زیرا می توانیم آنها را به صورت یک کسر با شرایط گفته شده بنویسیم زیرا:

$$0 = \frac{0}{+2} \qquad 0 \in Z \qquad +2 \in Z ,\ +2 \neq 0$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{-2}{+3} \qquad -2 \in Z \qquad +3 \in Z ,\ +3 \neq 0$$

$$\frac{3}{7} = \frac{+3}{+7} \qquad +3 \in Z \qquad +7 \in Z ,\ +7 \neq 0$$

$$-5 = \frac{+10}{-2} \qquad +10 \in Z \qquad -2 \in Z ,\ -2 \neq 0$$

نکته: کسر $-\frac{2}{3}$ را می توانیم به صورتهای $\frac{+2}{-3}$ یا $\frac{-2}{+3}$ بنویسیم، بنابراین:

$$-\frac{2}{3} = \frac{+2}{-3} = \frac{-2}{+3}$$

نکته: تمام اعداد طبیعی و حسابی و صحیح، عدد گویا می باشند.

$$\left.\begin{array}{l} N \subseteq W \\ W \subseteq Z \\ Z \subseteq Q \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q}$$

نکته: هر عدد گویا دارای بی شمار نمایش است مثل $\frac{2}{3}$ که داریم:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{-10}{-15} = \dots$$

بنابراین اگر این کسرها را ساده کنیم دوباره به همان عدد $\frac{2}{3}$ می رسیم مثلاً

$$\frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} = \frac{2}{3}$$

پیدا کردن یک عدد گویا بین دو عدد گویا

پیدا کردن یک عدد صحیح بین دو عدد صحیح دیگر، کار سختی نیست. مثلاً اگر بخواهیم بین دو عدد ۲+ و ۳- یک عدد صحیح بنویسیم، می توانیم اعداد ۱+ یا ۰ یا ۱- یا ۲- را انتخاب کنیم. و از طرفی هم می دانیم که تعداد عددهای صحیح بین دو عدد صحیح دیگر، محدود است مثلاً بین اعداد ۲+ و ۳- فقط چهار عدد صحیح ۱+ و ۰ و ۱- و ۲- وجود دارد. ولی پیدا کردن یک یا چند عدد گویا بین دو عدد گویای دیگر، کمی متفاوت است.

فرض کنید که می خواهیم بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ یک عدد گویا انتخاب کنیم که سه روش مختلف برای این کار وجود دارد.

روش اول؛ جمع کردن صورتها و مخرج های دو عدد گویا؛

اگر $\frac{c}{d}$ و $\frac{a}{b}$ دو عدد گویای متمایز باشند، کسر $\frac{a+c}{b+d}$ عددی گویاست که بین دو کسر داده شده ی $\frac{c}{d}$ و $\frac{a}{b}$ قرار دارد. یعنی؛

$$\boxed{\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}}$$

$$\frac{۱}{۳} < \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۳} < \frac{۱+۱}{۳+۲} < \frac{۱}{۲}$$

بنابراین کسر $\frac{۱+۱}{۳+۲}$ یا همان $\frac{۲}{۵}$ بین دو کسر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ قرار دارد.

روش دوم؛ میانگین گیری؛

میانگین هر دو عدد گویا، عددی گویاست که بین آن دو عدد قرار می گیرد. مثلاً اگر بخواهیم بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ یک عدد گویا بیابیم، فقط کافی است که میانگین کسرهای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ را بدست آوریم (هر دو کسر داده شده را باهم جمع می کنیم و حاصل را بر ۲ تقسیم می کنیم)

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} = \frac{۲+۳}{۶} = \frac{۵}{۶} \quad , \quad \frac{۵}{۶} \div ۲ = \frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۱۲}$$

بنابراین کسر $\frac{۵}{۱۲}$ بین دو عدد گویای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ قرار دارد. و می نویسیم؛ $\frac{۱}{۳} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۱}{۲}$

البته اگر بخواهیم به غیر از عدد $\frac{۵}{۱۲}$ عدد دیگری را بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ بیابیم فقط کافی است که میانگین اعداد $\frac{۵}{۱۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ (یا میانگین اعداد $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۵}{۱۲}$) را محاسبه کنیم، که کسر بدست آمده بین دو عدد $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ می باشد

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۵}{۱۲} = \frac{۴+۵}{۱۲} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴} \qquad \frac{۳}{۴} \div ۲ = \frac{۳}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۸}$$

بنابراین کسر $\frac{۳}{۸}$ بین دو کسر $\frac{۵}{۱۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ قرار دارد و می نویسیم؛

$$\frac{۱}{۳} < \frac{۳}{۸} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۱}{۲}$$

روش سوم: مخرج مشترک گیری

در این روش ابتدا با محاسبه ی مخرج مشترک دو کسر (باید ک.م.م مخرج ها را به عنوان مخرج مشترک در نظر بگیریم) کسرها را براساس مخرج جدید بازنویسی می کنیم و سپس از میان این دو کسر جدید، به تعدادی که در صورت سوال از ما خواسته شده است، عدد گویا انتخاب می کنیم. مثلاً اگر بخواهیم یک عدد گویا بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{6}$ بیابیم ابتدا ک.م.م مخرج ها را محاسبه می کنیم (به فصل ۵ کتاب ریاضی هفتم مراجعه شود)

$$[6,4] = [2\times3, 2\times2] = 3\times2\times2 = 12$$

بنابراین عدد ۱۲ را به عنوان مخرج مشترک دو کسر در نظر می گیریم.

$$\frac{2\times2}{6\times2} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{3\times3}{4\times3} = \frac{9}{12}$$

اکنون می توانیم بین دو کسر $\frac{9}{12}$ و $\frac{4}{12}$ یک عدد گویا مثل $\frac{7}{12}$ را در نظر بگیریم. پس:

همان $\frac{2}{6}$ — همان $\frac{3}{4}$

$$\frac{4}{12} < \frac{7}{12} < \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{2}{6} < \frac{7}{12} < \frac{3}{4}$$

نکته ی مهم: اگر بین دو کسر با مخرج یکسان نتوانیم n عدد گویا مشخص کنیم، فقط کافی است که در هر دو کسر، صورت ها و مخرج ها را در عدد $n+1$ ضرب کنیم تا بتوانیم n عدد گویا بین دو کسر جدید بیابیم.

مثال: همان طور که می بینید بین دو کسر $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{5}$ به ظاهر نمی توانیم شش کسر بیابیم، اما اگر صورت و مخرج این کسرها را در $7=1+6$ ضرب کنیم، کسرهایی برابر با کسرهای اولیه بوجود می آیند که می توانیم بین آنها به تعداد خواسته شده عدد گویا بنویسیم.

$$\frac{2\times7}{5\times7} = \frac{14}{35}$$

$$\frac{3\times7}{5\times7} = \frac{21}{35}$$

همان $\frac{2}{5}$ — همان $\frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \frac{14}{35} < \underbrace{\frac{15}{35} < \frac{16}{35} < \frac{17}{35} < \frac{18}{35} < \frac{19}{35} < \frac{20}{35}}_{\text{شش کسر}} < \frac{21}{35}$$

سؤال امتحانی: بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۲}{۳}$ سه عدد گویا بنویسید.

نکته: بین هر دو عدد گویای متمایز، بی شمار عدد گویای دیگر وجود دارد.

نکته: چون اولین عدد گویای بزرگتر از هر عدد گویا مشخص نیست، بنابراین نمی توانیم این مجموعه را با نوشتن عضوهایش مشخص کنیم. به همین دلیل مجموعه ی اعداد گویا را فقط می توانیم با استفاده از نمادهای ریاضی و به صورت مقابل نمایش دهیم.

$$Q=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in Z,\ b\neq ۰\right\}$$

در عدد گویای $\frac{۷}{۴}$ اگر با ماشین حساب عدد ۷ را بر عدد ۴ تقسیم کنیم به عدد ۱/۷۵ می رسیم و همچنین برای محاسبه ی کسر $\frac{۴}{۳}$ اگر عدد ۴ را بر ۳ تقسیم کنیم به عدد ...۱/۳۳۳ می رسیم بنابراین «هر عدد گویا معادل یک عدد اعشاری می باشد» و عدد اعشاری حاصل از یک عدد گویا سه حالت دارد که به صورت زیر می باشد.

انواع عدد اعشاری

الف) عدد اعشاری متناهی یا مختوم: به اعدادی گفته می شود که تعداد رقم های اعشاری بعد از ممیز آنها محدود و متناهی است (از یک رقم به بعد قطع شده و تمام می شود)

مثال: عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۹}{۴۰}$ متناهی یا مختوم است.

$$\frac{۱۹}{۴۰}=۰/۴۷۵$$

ب) عدد اعشاری متناوب ساده: به اعدادی گفته می شود که در آنها بلافاصله بعد از ممیز، رقم یا رقم هایی به طور متناوب (یعنی دوره ای) تکرار می شوند.

مثال: عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۳}{۹}$ متناوب ساده است.

(رقم گردش عدد ۴ می باشد)

$$\frac{۱۳}{۹}=۱/۴۴۴۴...=۱/\overline{۴}$$

ج) عدد اعشاری متناوب مرکب: به اعدادی گفته می شود که در آنها بعد از ممیز یک یا چند رقم غیرتکراری وجود دارد. و بعد از آنها اعداد دارای دوره ی گردش می آیند.

مثال:

$$\frac{۲۵}{۲۴}=۱/۰۴۱۶۶۶...=۱/۰۴۱\overline{۶}$$

مثال: به کمک ماشین حساب نوع عدد اعشاری مربوط به کسرهای زیر را مشخص کنید.

متناهی یا مختوم؛ $\frac{11}{80} = 0/1375$
(رقم های اعشاری بعد از ۵ خاتمه پیدا می کند)

متناهی یا مختوم؛ $\frac{3}{5} = 0/6$
(رقم های اعشاری بعد از ۶ خاتمه پیدا می کند)

متناوب ساده؛ $\frac{11}{27} = 0/407407407... = 0/\overline{407}$
(عدد ۴۰۷ بلافاصله بعد از ممیز در حال تکرار شدن است.)

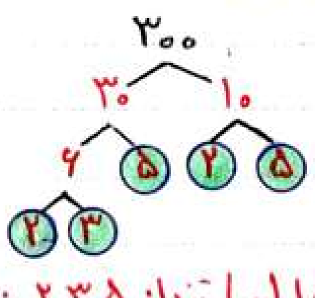
متناوب مرکب؛ $\frac{29}{75} = 0/38666666... = 0/38\overline{6}$
(عدد ۳۸ غیرتکراری و بعد از آن عدد ۶ به صورت متناوب در حال تکرار شدن است)

متناوب مرکب؛ $\frac{7}{22} = 0/318181818... = 0/3\overline{18}$
(عدد ۳ غیرتکراری و بعد از آن عدد ۱۸ به صورت متناوب در حال تکرار شدن است)

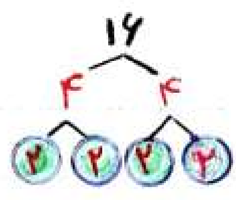
متناوب ساده؛ $\frac{2}{3} = 0/666666... = 0/\overline{6}$
(عدد ۶ بلافاصله بعد از ممیز در حال تکرار شدن است)

یادآوری

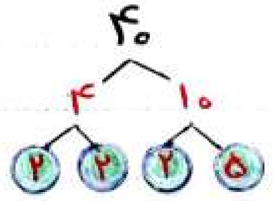
اعداد مقابل را تجزیه کنید. و عاملهای اول آنها را مشخص کنید.
(منظور از عاملهای اول همان شمارنده های اول هستند که بعد از تجزیه کردن یک عدد، در انتهای خوشه ها قرار می گیرند.)



عاملهای اول عبارتند از ۲،۳،۵ زیرا در انتهای خوشه ها فقط اعداد ۲،۳،۵ دیده می شود.



عاملهای اول عبارتند از ۲ زیرا در انتهای خوشه ها فقط عدد ۲ دیده می شود.



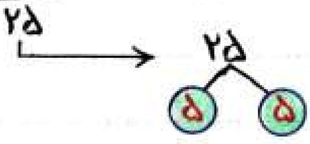
عاملهای اول عبارتند از ۲،۵ زیرا در انتهای خوشه ها فقط اعداد ۲،۵ دیده می شود.

اکنون می‌خواهیم بدون استفاده از ماشین حساب و به کمک تجزیه کردن، نوع عدد اعشاری مربوط به یک کسر را مشخص کنیم.

الف) اگر مخرج یک کسر ساده نشدنی را تجزیه کنیم و در تجزیه‌ی آن فقط عامل‌های ۲ یا ۵ (و یا هر دو با هم) دیده شود، می‌گوییم عدد اعشاری مربوط به این کسر متناهی یا مختوم است.

مثال: عدد اعشاری مربوط به کسرهای $\frac{۱۴}{۲۵}$ و $\frac{۲۳}{۸}$ و $\frac{۱۹}{۴۰}$ متناهی یا مختوم است زیرا اگر مخرج هرکدام از آنها را تجزیه کنیم داریم:

$\frac{۱۴}{۲۵}$

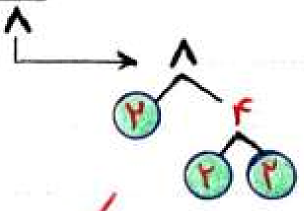


چون در تجزیه‌ی مخرج کسر (عدد ۲۵) فقط عامل ۵ دیده می‌شود، می‌گوییم که عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۴}{۲۵}$ متناهی یا مختوم است.
اگر به کمک ماشین حساب صورت این کسر را به مخرج آن تقسیم کنیم داریم:

$\frac{۱۴}{۲۵} = ۰/۵۶$

که متناهی یا مختوم بودن عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۴}{۲۵}$ را تأیید می‌کند.

$\frac{۲۳}{۸}$

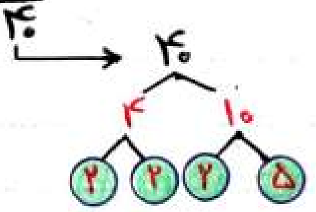


چون در تجزیه‌ی مخرج کسر (عدد ۸) فقط عامل ۲ وجود دارد. می‌گوییم که عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۲۳}{۸}$ متناهی یا مختوم است.
اگر به کمک ماشین حساب، صورت کسر را به مخرج آن تقسیم کنیم داریم:

$\frac{۲۳}{۸} = ۲/۸۷۵$

که متناهی یا مختوم بودن عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۲۳}{۸}$ را تأیید می‌کند.

$\frac{۱۹}{۴۰}$



چون در تجزیه‌ی مخرج کسر (عدد ۴۰) فقط عامل‌های ۲ و ۵ دیده می‌شود می‌گوییم که عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۹}{۴۰}$ متناهی یا مختوم است.
و اگر اکنون با ماشین حساب عدد ۱۹ را بر ۴۰ تقسیم کنیم، داریم:

$\frac{۱۹}{۴۰} = ۰/۴۷۵$

که متناهی یا مختوم بودن عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۹}{۴۰}$ را تایید می‌کند.

مثال: عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۵}{۲۴}$

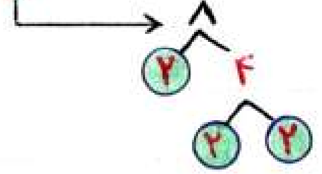
الف) متناهی یا مختوم است.

ب) متناوب ساده است.

ج) متناوب مرکب است.

جواب: می‌دانیم که کسر $\frac{۱۵}{۲۴}$ ساده شدنی است و در ابتدا باید این کسر را ساده کنیم (که به عدد $\frac{۵}{۸}$ می‌رسیم) سپس با تجزیه‌ی مخرج این کسر (عدد ۸) مشاهده می‌کنیم که در انتهای خوشه‌ها فقط عامل ۲ وجود دارد. بنابراین می‌گوییم که عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۵}{۲۴}$ یا همان $\frac{۵}{۸}$ متناهی یا مختوم است

$\frac{۱۵}{۲۴} = \frac{۵}{۸}$



تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه: ۰۹۱۳۷۰۲۷۲۵۲

ب) اگر مخرج یک کسر ساده نشدنی را تجزیه کنیم، و در تجزیه ی مخرج آن کسر هیچ کدام از عامل‌های ۵ و ۲ دیده نشود؛ می گوئیم عدد اعشاری مربوط به این کسر متناوب ساده است

مثال: عدد اعشاری مربوط به کسرهای $\frac{۱۹}{۲۷}$ و $\frac{۵۰}{۶۳}$ و $\frac{۵}{۱۱}$ متناوب ساده هستند زیرا اگر مخرج هرکدام از آنها را تجزیه کنیم داریم؛

$\frac{۱۹}{۲۷}$ ⟵ ۲۷ = ۳ × ۹ ، ۹ = ۳ × ۳

در تجزیه ی عدد ۲۷ هیچ کدام از عامل‌های ۲،۵ دیده نمی شود، بنابراین عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۹}{۲۷}$ متناوب ساده است که اگر با ماشین حساب ۱۹ را بر ۲۷ تقسیم کنیم داریم؛

$\frac{۱۹}{۲۷}=۰/۷۰۳۷۰۳۷۰۳۷۰۳۷۰۳...$
$=۰/\overline{۷۰۳}$

که متناوب ساده بودن عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۹}{۲۷}$ را تأیید می کند.

$\frac{۵۰}{۶۳}$ ⟵ ۶۳ = ۷ × ۹ ، ۹ = ۳ × ۳

در تجزیه ی عدد ۶۳ هیچ کدام از عامل‌های ۲ و ۵ دیده نمی شود، بنابراین عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۵۰}{۶۳}$ متناوب ساده می باشد که اگر با ماشین حساب عدد ۵۰ را بر ۶۳ تقسیم کنیم، داریم؛

$\frac{۵۰}{۶۳}=۰/۷۹۳۶۵۰۷۹۳۶۵۰...$
$=۰/\overline{۷۹۳۶۵۰}$

که متناوب ساده بودن عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۵۰}{۶۳}$ را تائید می کند.

$\frac{۵}{۱۱}$ ⟵ ۱۱ عددی اول است و تجزیه نمی شود به عبارتی ۱۱ عاملی اول برای عدد ۱۱ می باشد. بنابراین عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۵}{۱۱}$ متناوب ساده است. اگر با ماشین حساب نیز عدد ۵ را بر ۱۱ تقسیم کنیم، داریم؛

$\frac{۵}{۱۱}=۰/۴۵۴۵۴۵...$
$=۰/\overline{۴۵}$

که متناوب ساده بودن عدد اعشاری مربوط به $\frac{۵}{۱۱}$ را نشان می دهد.

مثال: در نمایش اعشاری کسر $\frac{۳}{۱۱}$ مجموع اولین و صدمین رقم بعد از ممیز کدام است؟

الف) ۹ ج) ۳

ب) ۱۴ د) ۱۱

جواب: ابتدا کسر $\frac{۳}{۱۱}$ را به صورت اعشاری نوشته و سپس حاصل خواسته شده را بدست می آوریم.

$\frac{۳}{۱۱}=۰/۲۷۲۷۲۷...=۰/\overline{۲۷}$

واضح است که اولین رقم بعد از ممیز ۲ و رقم بعدی ۷ می باشد و این اعداد به صورت متناوب در حال تکرار شدن هستند. بنابراین؛

۲ = رقم اول بعد از ممیز

۷ = رقم صدم بعد از ممیز

⟸ ۹ = ۷+۲ = مجموع اولین و صدمین رقم بعد از ممیز

مثال: کدام یک از گزینه‌های زیر از عدد $۲/۸\overline{۲۷}$ بزرگتر است؟

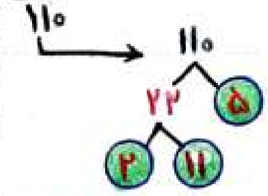
الف) $۲/\overline{۸۲۷}$ ج) $۲/۸۲۷\overline{۴}$

ب) $۲/\overline{۸۲۷}$ ✓ د) $۲/۸۲۷۴$

ج) اگر مخرج یک کسر ساده نشدنی را تجزیه کنیم و در تجزیه ی مخرج آن کسر، علاوه بر عاملهای اول ۲ یا ۵ عاملهای اول دیگری نیز وجود داشته باشد؛ می گوییم عدد اعشاری مربوط به این کسر متناوب مرکب می باشد.

مثال: عدد اعشاری مربوط به کسرهای $\frac{۳۱}{۱۱۰}$ و $\frac{۱۱}{۱۵}$ و $\frac{۱۳}{۲۴}$ متناوب مرکب هستند. زیرا اگر مخرج هرکدام از آنها را تجزیه کنیم، داریم؛

$\frac{۳۱}{۱۱۰}$



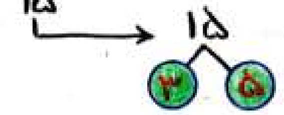
در تجزیه ی عدد ۱۱۰ علاوه بر عاملهای اول ۵ و ۲ عامل اول ۱۱ نیز وجود دارد، بنابراین عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۳۱}{۱۱۰}$ متناوب مرکب می باشد.

اگر با ماشین حساب عدد ۳۱ را بر ۱۱۰ تقسیم کنیم، داریم؛

$\frac{۳۱}{۱۱۰} = ۰/۲۸۱۸۱۸۱۸۱... = ۰/۲\overline{۸۱}$

که متناوب مرکب بودن عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۳۱}{۱۱۰}$ را تأیید می کند.

$\frac{۱۱}{۱۵}$



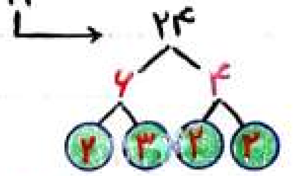
در تجزیه ی عدد ۱۵ علاوه بر عامل اول ۵ عامل اول ۳ نیز وجود دارد، بنابراین عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۱}{۱۵}$ متناوب مرکب می باشد.

اگر با ماشین حساب عدد ۱۱ را بر ۱۵ تقسیم کنیم، داریم؛

$\frac{۱۱}{۱۵} = ۰/۷۳۳۳۳۳... = ۰/۷\overline{۳}$

که متناوب مرکب بودن عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۱}{۱۵}$ را تأیید می کند.

$\frac{۱۳}{۲۴}$



در تجزیه ی عدد ۲۴ علاوه بر عامل اول ۲ عامل اول ۳ نیز وجود دارد، بنابراین عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۳}{۲۴}$ متناوب مرکب می باشد.

اگر با ماشین حساب عدد ۱۳ را بر ۲۴ تقسیم کنیم، داریم؛

$\frac{۱۳}{۲۴} = ۰/۵۴۱۶۶۶۶۶... = ۰/۵۴۱\overline{۶}$

که متناوب مرکب بودن عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۳}{۲۴}$ را تأیید می کند.

خلاصه ی درس

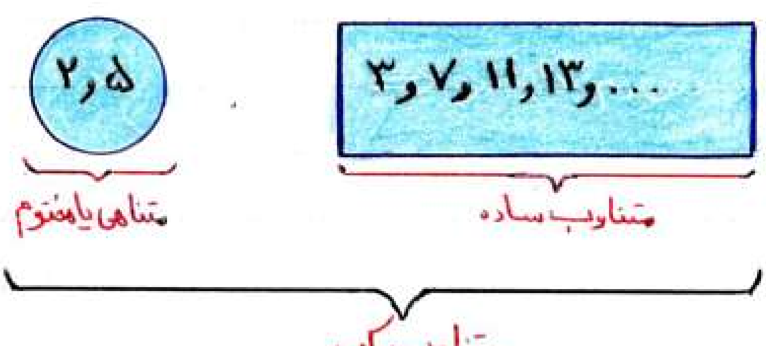
اگر مخرج یک کسر ساده نشدنی را تجزیه کنیم و اعداد موجود در انتهای این شاخه ها

۳، ۷، ۱۱، ۱۳، ...	۲، ۵
تمام اعداد اول به غیر از ۲ و ۵	اعداد اول ۲ و ۵

الف) فقط از اعداد داخل دایره باشند، می گوییم عدد اعشاری مربوط به این کسر متناهی یا مختوم است.

ب) فقط از اعداد داخل مستطیل باشند می گوییم عدد اعشاری مربوط به این کسر متناوب ساده است.

ج) هم از اعداد داخل دایره و هم از اعداد داخل مستطیل باشند: می گوییم عدد اعشاری مربوط به این کسر متناوب مرکب می باشد.



مثال: عدد اعشاری مربوط به کسر $\frac{۱۳}{۲۰}$ .... می باشد.

الف) متناوب ساده

ب) متناوب مرکب

ج) متناهی یا مختوم ✓

$\frac{۱۳}{۲۰} \longrightarrow ۲۰ = ۴ \times ۵ = ۲ \times ۲ \times ۵$

مثال: عدد اعشاری مربوط به $\frac{۵۰}{۶۳}$ .... می باشد.

الف) متناوب ساده ✓

ب) متناوب مرکب

ج) متناهی یا مختوم

$\frac{۵۰}{۶۳} \longrightarrow ۶۳ = ۷ \times ۹ = ۷ \times ۳ \times ۳$

مثال: عدد اعشاری مربوط به $\frac{۲۲}{۳۵}$ .... می باشد.

الف) مختوم

ب) متناوب ساده

ج) متناهی

د) متناوب مرکب ✓

$\frac{۲۲}{۳۵} \longrightarrow ۳۵ = ۷ \times ۵$

مثال: عدد اعشاری مربوط به $\frac{۱۴}{۱۸}$ .... می باشد.

الف) متناهی

ب) متناوب ساده ✓

ج) متناوب مرکب

$\cancel{\frac{۱۴}{۱۸}} = \frac{۷}{۹} \longrightarrow ۹ = ۳ \times ۳$

مثال: عدد اعشاری مربوط به کدام یک از کسرهای زیر «متناوب ساده» است.

الف) $\frac{۷}{۳۲}$ ب) $\frac{۵۵}{۴۵}$ ج) $\frac{۱۹}{۲۰}$ د) $\frac{۴۰}{۶۳}$

مثال: عدد اعشاری مربوط به کدام کسر «مختوم» است.

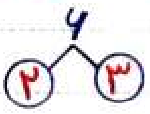
الف) $\frac{۱۹}{۲۲}$ ب) $\frac{۷۱}{۷۵}$ ج) $\frac{۲۱}{۳۵}$ د) $\frac{۳۳}{۶۰}$

مثال : اگر $m\in\{x \mid x\in N ,\ 10\leqslant x\leqslant 20\}$ و نمایش اعشاری کسر $\frac{m}{6}$ متناوب ساده باشد، مجموع تمام مقدارهایی که می‌توانیم به جای m قرار دهیم، چقدر است؟

الف) ۸۰ ب) ۶۰ ج) ۶۸ د) هیچکدام

جواب : ابتدا توجه کنید که : $\{x \mid x\in N, 10\leqslant x\leqslant 20\}=\{10, 11, 12, 13, \dots, 20\}$

برای آنکه نمایش اعشاری مربوط به کسر $\frac{m}{6}$ متناوب ساده باشد، باید در تجزیه‌ی مخرج آن عامل های اول ۲ و ۵ وجود نداشته باشند؛ ولی در تجزیه‌ی عدد ۶ عامل اول ۲ را داریم که باید با قرار دادن اعداد مناسب به جای m آن را حذف کنیم، مثلاً اگر به جای m عدد ۱۰ را قرار دهیم، داریم :



$$\frac{m}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

و می دانیم که نمایش اعشاری مربوط به کسر $\frac{10}{6}$ یا همان $\frac{5}{3}$ متناوب ساده می باشد. بنابراین مقادیر مجاز برای m عبارتند از : ۲۰، ۱۶، ۱۴، ۱۰ (مقدار m باید مضرب ۲ باشد ولی مضرب ۳ نباشد)

مجموع مقادیری که به جای m می توان قرار داد $= 10+14+16+20=60$

مثال : در کسر $1>\frac{4a}{55}>0$ مقدارهای $a\in N$ را چنان تعیین کنید که عدد اعشاری مربوط به این کسر :

الف) یک عدد اعشاری مختوم باشد

ب) یک عدد اعشاری متناوب ساده باشد.

ج) یک عدد اعشاری متناوب مرکب باشد.

مثال : اگر $\frac{b}{11}=0/\overline{5a}$ باشد، اعداد طبیعی b و a را بیابید.

$A=0/\overline{5a}$

$100A=\overline{5a}/\overline{5a} \Rightarrow 100A-A=\overline{5a}/\overline{5a}-0/\overline{5a}$

$99A=\overline{5a} \Rightarrow A=\frac{\overline{5a}}{99}=\frac{b}{11} \Rightarrow 9b=\overline{5a} \Rightarrow \begin{cases} b=6 \\ a=4 \end{cases}$

همانطور که از درسهای قبل یادگرفتیم نمایش اعشاری اعداد گویا به سه صورت زیر می باشد .

الف) متناهی یا مختوم
ب) متناوب ساده
ج) متناوب مرکب

امّا نمایش اعشاری بعضی از اعداد مثل؛ $\sqrt{۲}$ = ۱٫۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳... در هیچ کدام از این سه دسته قرار نمی گیرد. به این گونه اعداد که «تعداد رقم های اعشاری آنها نامتناهی وقسمت اعشاری آنها متناوب نیست» عدد گنگ یا اَصَم گفته می شود.

تعریف عدد گنگ؛ به عددی گفته می شود که بسط اعشاری آن نامتناهی بوده و دارای دوره ی گردش نباشد.
به بیان دیگر عدد گنگ « عدد اعشاری بی پایان و بدون تکرار است»

نکته؛ در ریاضیات اعداد گنگ را با نماد Q' نشان می دهند.

مثال: اعداد زیر گنگ هستند.

$\sqrt{۳}$ = ۱٫۷۳۲۰۵۰۸۰۷۵۶...

$\sqrt{۵}$ = ۲٫۲۳۶۰۶۷۹۷۷۴۹...

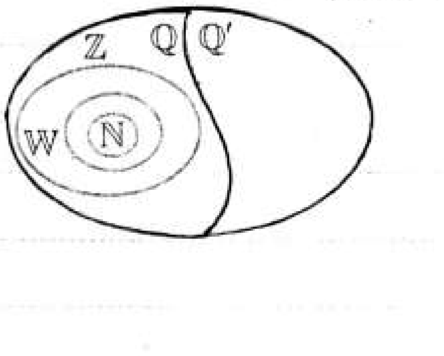
$\sqrt{۰٫۹}$ = ۰٫۹۴۸۶۸۳۲۹۸۰۵...

π = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸...

نکته؛ عدد π گنگ می باشد

نکته؛ جذر اعدادی که مربع کامل نیستند (مثل؛ ... و $\sqrt{۶}$ ، $\sqrt{۵}$ ، $\sqrt{۳}$ ، $\sqrt{۲}$) عدد گنگ محسوب می شوند.

نکته : نمودار ون مجموعه های؛ Q ، Z ، W ، N و Q' به صورت مقابل می باشد.



نکته؛ همانطور که از نمودار ون مشخص است مجموعه ی اعداد گویا و مجموعه ی اعداد گنگ، دو مجموعه ی جدا از هم هستند. یعنی هیچ اشتراکی باهم ندارند، به بیان دیگر می توان گفت که عددی وجود ندارد که هم گویا و هم گنگ باشد. پس: $Q \cap Q' = \emptyset$

مثال: درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

× الف) $0 \in Q'$ ← صفر عددی گویاست و عددی که گویا باشد نمی تواند گنگ باشد .

✓ ب) $۵٫۱۲\overline{۳} \notin Q'$ ← عدد ۵٫۱۲۳ متناوب مرکب است و عددی گویاست پس نمی تواند عددی گنگ باشد .

گاهی اوقات نیاز داریم که مقدار تقریبی یک عدد گنگ را بدانیم ، برای این کار باید بدانیم که عدد زیر رادیکال بین کدام دو عدد مربع کامل قرار دارد. مثلاً فرض کنید می خواهیم مقدار تقریبی عدد $\sqrt{۱۰}$ را بدست آوریم . روش کار به این صورت است.

اعداد مربع کامل : ۱ , ۴ , ۹ , ۱۶ , ۲۵ , ۳۶ , ۴۹ , ...

از طرفی می دانیم که عدد زیر رادیکال (عدد ۱۰) بین دو عدد مربع کامل ۱۶ و ۹ قرار دارد پس

$$۹ < ۱۰ < ۱۶ \Rightarrow \sqrt{۹} < \sqrt{۱۰} < \sqrt{۱۶} \Rightarrow ۳ < \sqrt{۱۰} < ۴$$

بنابراین $\sqrt{۱۰}$ عددی بین ۳ و ۴ می باشد، و اگر با ماشین حساب جذر تقریبی ۱۰ را محاسبه کنیم، داریم

$$\sqrt{۱۰} = ۳/۱۶۲۲۷۷۶۶۰۱۶...$$

که درستی محاسبات بالا را نشان می دهد.

مثال: عدد $۲ + \sqrt{۲۷}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

جواب: می دانیم که عدد ۲۷ بین دو عدد مربع کامل ۳۶ و ۲۵ و ۳۶ قرار دارد. بنابراین

$$۲۵ < ۲۷ < ۳۶$$
$$\sqrt{۲۵} < \sqrt{۲۷} < \sqrt{۳۶}$$
$$۵ < \sqrt{۲۷} < ۶ \Rightarrow ۲+۵ < ۲+\sqrt{۲۷} < ۲+۶ \Rightarrow ۷ < ۲+\sqrt{۲۷} < ۸$$

بنابراین عدد $۲ + \sqrt{۲۷}$ بین دو عدد صحیح ۸ و ۷ قرار دارد.

مثال: سه عدد گنگ بنویسید که بین اعداد گنگ $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۵}$ باشند؟

جواب: شاید در نگاه اول اینگونه به نظر برسد که بین اعداد $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۵}$ فقط اعداد گنگ $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۶}$ وجود دارند، یعنی:

$$\sqrt{۵} < \sqrt{۶} < \sqrt{۷} < \sqrt{۸}$$

ولی واقعیت این است که بین دو عدد گنگ $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۵}$ می توانیم بیشمار عدد گنگ بنویسیم. به عنوان مثال:

$$\sqrt{۵} < \sqrt{۵/۱} < \sqrt{۵/۲} < \sqrt{۵/۳} < \sqrt{۸}$$

و یا می توانیم بنویسیم:

$$\sqrt{۵} < \sqrt{۶/۱} < \sqrt{۷/۱} < \sqrt{۷/۵} < \sqrt{۸}$$

بنابراین می توان گفت که «بین هر دو عدد گنگ متمایز، بی شمار عدد گنگ متمایز دیگر وجود دارد»

مثال: سه عدد گنگ بنویسید که بین $\sqrt{۱۰}$ و ۳ باشند.

جواب؛ می دانیم که عدد ۳ همان $\sqrt{۹}$ می باشد ($۳ = \sqrt{۹}$) بنابراین داریم؛

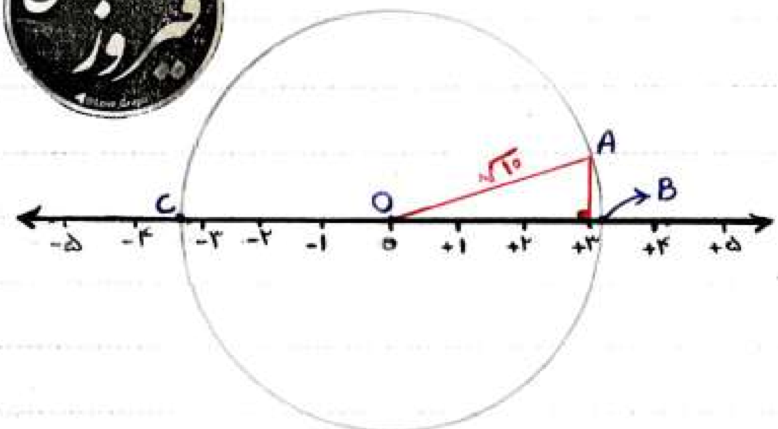
$$۳ = \sqrt{۹} < \sqrt{۹,۱} < \sqrt{۹,۲} < \sqrt{۹,۳} < \sqrt{۱۰}$$

مثال؛ سه عدد گنگ بنویسید که بین ۳ و ۲ باشند.

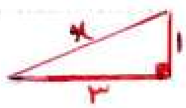
جواب؛ می دانیم که عدد ۲ همان $\sqrt{۴}$ ($۲ = \sqrt{۴}$) و عدد ۳ همان $\sqrt{۹}$ ($۳ = \sqrt{۹}$) می باشد. بنابراین

$$۲ = \sqrt{۴} < \sqrt{۵} < \sqrt{۶} < \sqrt{۷} < \sqrt{۹} = ۳$$

همان طور که در صفحه ی قبل گفته شد عدد $\sqrt{۱۰}$ بین دو عدد صحیح و متوالی ۴ و ۳ قرار دارد. حال اگر ما بخواهیم محل دقیق این عدد را روی محور اعداد مشخص کنیم، شدنی نیست، ولی با کمک روشهای هندسی می توانیم محل تقریبی این عدد را روی محور اعداد مشخص کنیم، که روش کار به این صورت است.



روش کار؛ می دانیم که وتر یک مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائم ۱ و ۳ برابر $\sqrt{۱۰}$ می باشد، زیرا



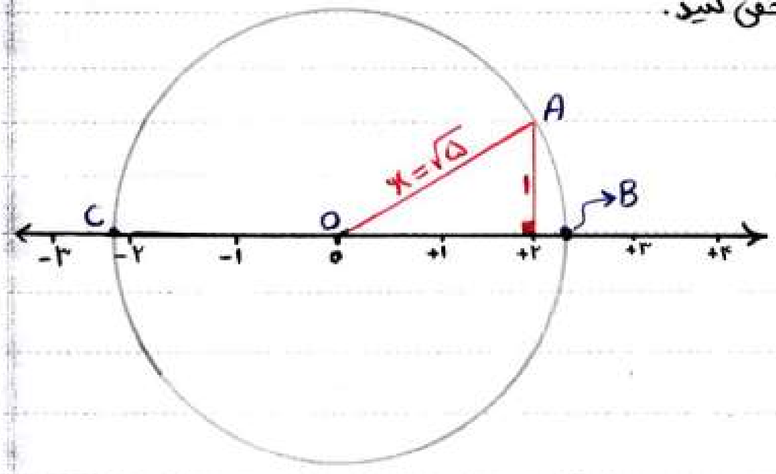
$$x^۲ = ۱^۲ + ۳^۲$$

$$x^۲ = ۱ + ۹ = ۱۰ \Rightarrow x = \sqrt{۱۰}$$

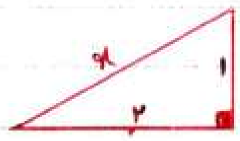
بنابراین ابتدا از روی عدد ۳ به اندازه ی یک واحد به سمت بالا و به صورت عمودی حرکت می کنیم تا به نقطه ی A برسیم، سپس از نقطه ی A به نقطه صفر وصل می کنیم. سپس سوزن پرگار را روی نقطه ی O گذاشته و دایره ای به شعاع OA رسم می کنیم تا محور اعداد را در نقطه ی B قطع کند. می دانیم که در این مثلث طول وتر برابر $\sqrt{۱۰}$ می باشد ($OA = \sqrt{۱۰}$) و از طرفی هم می دانیم که در هر دایره شعاع ها با هم برابرند. بنابراین اگر پاره خط OA شعاع دایره با طول $\sqrt{۱۰}$ باشد. پاره خط OB هم که شعاع دایره می باشد طولی برابر $\sqrt{۱۰}$ خواهد داشت و به خوبی می توان نتیجه گرفت که: نقطه ی B محل تقریبی عدد $\sqrt{۱۰}$ را نشان می دهد.

نکته: چون پاره خط OC هم شعاع این دایره می باشد، پس طول این پاره خط هم به اندازه ی $\sqrt{۱۰}$ می باشد. و چون نقطه ی C سمت چپ صفر و در قسمت منفی ها می باشد، نقطه ی C عدد $-\sqrt{۱۰}$ را نشان می دهد

مثال : محل تقریبی عدد $\sqrt{5}$ را روی محور اعداد مشخص کنید.



جواب : در مثلث قائم الزاویه ی مقابل طول وتر برابر $\sqrt{5}$ می باشد زیرا :



$x^2 = 1^2 + 2^2$

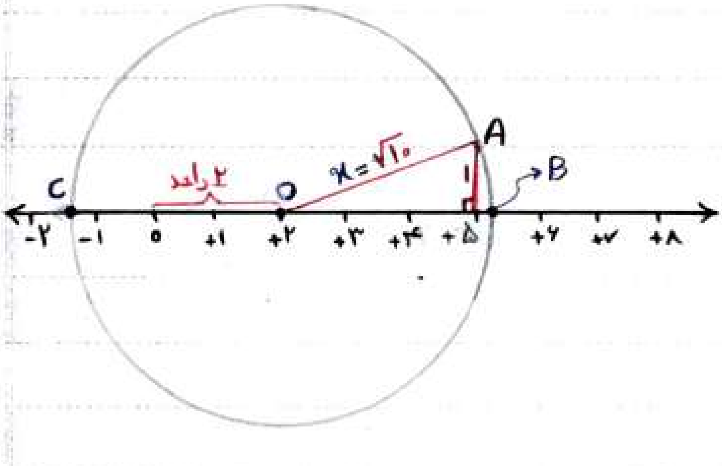
$x^2 = 1 + 4 = 5$

$x = \sqrt{5} \Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{5}$

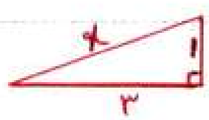
اگر $\overline{OA}$ شعاع این دایره و طولی به اندازه ی $\sqrt{5}$ داشته باشد، طول پاره خط $\overline{OB}$ نیز که شعاع این دایره است به اندازه ی $\sqrt{5}$ می باشد. بنابراین نقطه ی B محل تقریبی عدد $\sqrt{5}$ را نشان می دهد.

نکته : نقطه ی C محل تقریبی عدد $-\sqrt{5}$ را نشان می دهد.

مثال : محل تقریبی عدد $2+\sqrt{10}$ را روی محور اعداد مشخص کنید.



جواب : در مثلث قائم الزاویه ی مقابل طول وتر برابر $\sqrt{10}$ می باشد. زیرا :



$x^2 = 1^2 + 3^2$

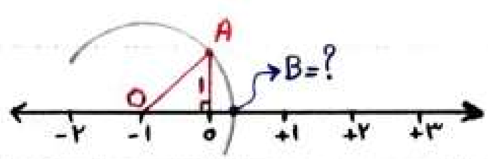
$x^2 = 1 + 9 = 10$

$x = \sqrt{10} \Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{10}$

اگر $\overline{OA}$ شعاع این دایره و طولی به اندازه ی $\sqrt{10}$ داشته باشد، طول پاره خط $\overline{OB}$ نیز که شعاع این دایره است برابر $\sqrt{10}$ می باشد، بنابراین فاصله ی نقطه ی B تا عدد ۰ برابر است با $2+\sqrt{10}$ بنابراین نقطه ی B عدد $2+\sqrt{10}$ را نشان می دهد.

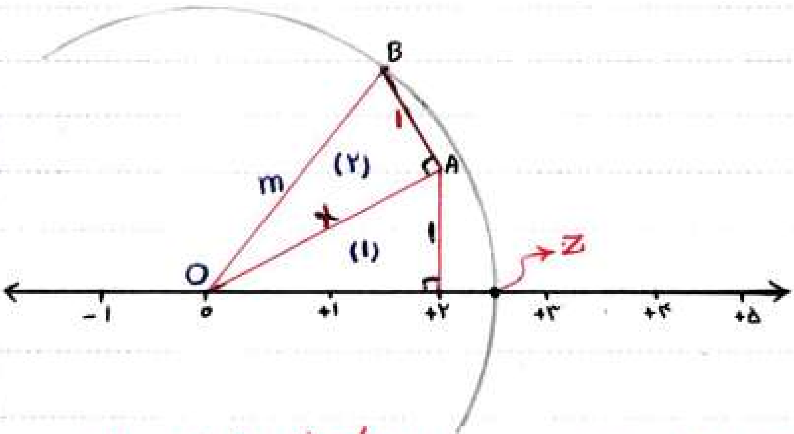
نکته : نقطه ی C محل تقریبی عدد $2-\sqrt{10}$ را نشان می دهد.

مثال : در شکل مقابل به مرکز O و به شعاع OA کمانی زده ایم، نقطه ی B چه عددی را مشخص می کند؟

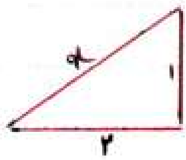


الف) $\sqrt{2}$ ب) $-1+\sqrt{2}$ ج) $1-\sqrt{2}$ د) هیچکدام

مثال: محل تقریبی عدد $\sqrt{6}$ را روی محور اعداد مشخص کنید.



روش کار: با توجه به شکل مقابل واضح است که طول وتر مثلث قائم الزاویه‌ی شماره‌ی (۱) برابر $\sqrt{5}$ می باشد، زیرا:

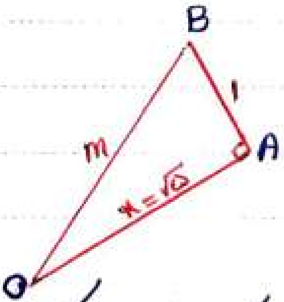


$x^2=1^2+2^2$

$x^2=1+4=5$

$x=\sqrt{5}$

بنابراین همین عدد $\sqrt{5}$ یکی از اضلاع مثلث قائم الزاویه‌ی شماره‌ی (۲) می باشد. که اگر رابطه‌ی فیثاغورس را در مثلث شماره‌ی (۲) بنویسیم، داریم:



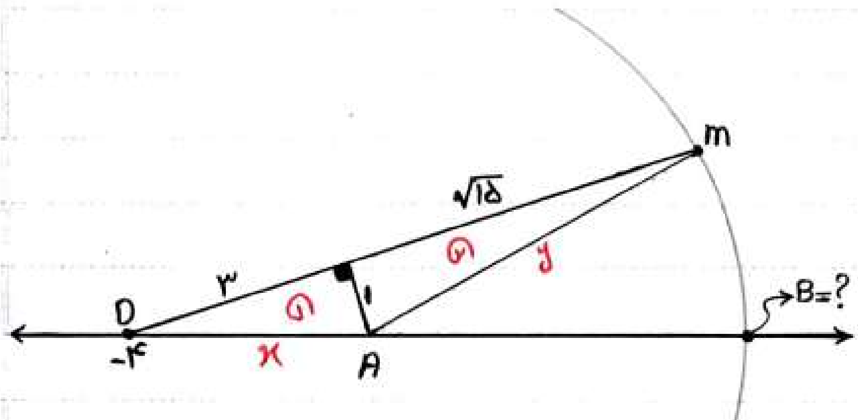
$m^2=1^2+(\sqrt{5})^2$

$m^2=1+5=6$

$m=\sqrt{6}$

بنابراین طول پاره‌خط OB برابر $\sqrt{6}$ می باشد. حال اگر با مرکز O و با شعاع OB یک دایره رسم کنیم، این دایره محور اعداد را در نقطه‌ی Z قطع می کند. حال اگر طول OB که شعاع دایره است برابر $\sqrt{6}$ باشد، طول پاره خط OZ نیز که شعاع دایره است برابر $\sqrt{6}$ خواهد بود، با این معنی که نقطه‌ی Z محل تقریبی عدد $\sqrt{6}$ را نشان می دهد.

مثال: در شکل مقابل با مرکز A و شعاع Am کمانی زده‌ایم تا محور را در نقطه‌ی B قطع کند، نقطه‌ی B چه عددی را نشان می دهد؟ (نمونه دولتی ۹۷ ـ اصفهان)



الف) $-4+\sqrt{10}$

ب) $8+\sqrt{10}$

ج) $\sqrt{10}$ ✓

د) $\sqrt{10}+\sqrt{15}$

در مثلث ①

$x^2=3^2+1^2$

$x^2=9+1=10$

$x=\sqrt{10}$

در مثلث ②

$y^2=1^2+(\sqrt{15})^2$

$=1+15=16$

$y=\sqrt{16}=4$

$B=-4+x+y$

$=\cancel{-4}+\sqrt{10}+\cancel{4}=\sqrt{10}$

اعداد حقیقی:

تا اینجای کار یاد گرفتیم که اعداد، دو دسته هستند، (یا عضو مجموعه‌ی اعداد گویا هستند، یا عضو مجموعه‌ی اعداد گنگ) از طرفی هم هیچ عددی وجود ندارد که هم گویا و هم گنگ باشد. به بیان دیگر اشتراک این دو مجموعه، تهی است

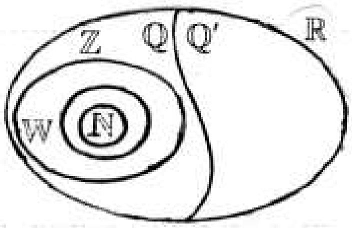
$$Q\cap Q'=\varnothing$$

اما اجتماع دو مجموعه‌ی اعداد گویا و گنگ مجموعه‌ی جدیدی را بوجود می‌آورند که در ریاضیات به این مجموعه، «مجموعه‌ی اعداد حقیقی» گفته می‌شود.

$(\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R})$

نکته‌ی مهم: در ریاضیات مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با حرف R نشان می‌دهند.

بنابراین داریم:



$$N\subseteq W\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$$
$$Q'\subseteq R$$

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$Q\cap Q'=\varnothing$

$Q\cup Q'=R$

$R-Q=Q'$

$R-Q'=Q$

$Q\cap R=Q$

$Q'\cap R=Q'$

$R\cup W=R$

$Q\cup R=R$

$Q'\cup R=R$

$N\cap Q'=\varnothing$

$Z\cup R=R$

$Q-Q'=Q$

$\overbrace{(R\cap W)}^{W}\cap N=W\cap N=N$

$Q-R=\varnothing$

$Z\cap R=Z$

$\overbrace{(N\cup Q)}^{Q}\cup Q'=Q\cup Q'=R$

$R-\overbrace{(Q\cap Q')}^{\varnothing}=R-\varnothing=R$

$R\cup\overbrace{(Q\cup Q')}^{R}=R\cup R=R$

$R\cap\overbrace{(Q\cap Q')}^{\varnothing}=R\cap\varnothing=\varnothing$

$Z-Q'=Z$

نمایش اعداد حقیقی به زبان ریاضی و روی محور اعداد.

مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بین ۲ و ۱ را در نظر بگیرید ، این مجموعه را A می‌نامیم. همان طور که از درسهای قبل یاد گرفتیم، بین این دو عدد ، بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

بنابراین برای نشان دادن همه‌ی این اعداد به زبان ریاضی باید از مجموعه‌ی اعداد حقیقی « R » کمک بگیریم

مثال: مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بین ۲ و ۱ را به زبان ریاضی نشان دهید.

$A=\{x \mid x\in R\ ,\ 1<x<2\}$

حال اگر بخواهیم همین مجموعه را روی محور اعداد مشخص کنیم؛ از خط مُمتد روی محور اعداد استفاده می‌کنیم (این خط در هر جای محور اعداد قرار بگیرد، نشان دهنده‌ی عضویت اعداد زیر آن خط در مجموعه‌ی مورد نظر است)

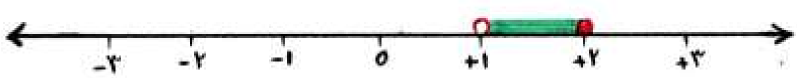
$A=\{x \mid x\in R\ ,\ 1<x<2\}$

سؤال؛ چرا اعداد ۲ و ۱ را با دایره‌های توخالی نشان داده‌ایم؟

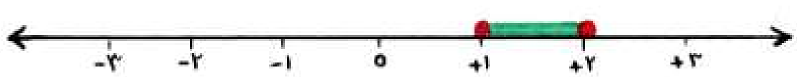
جواب: زیرا اعداد ۲ و ۱ عضو این مجموعه نیستند.

مثال: مجموعه‌های مقابل را روی محور اعداد مشخص کنید.

$A=\{x \mid x\in R\ ,\ 1<x\leq 2\}$



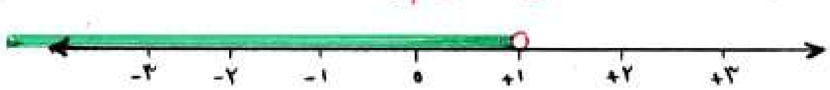
$B=\{x \mid x\in R\ ,\ 1\leq x\leq 2\}$



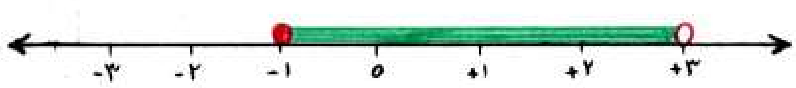
$C=\{x \mid x\in R\ ,\ x\geq +1\}$

(به مقداری از محور به سمت خارج حرکت می‌کنیم)

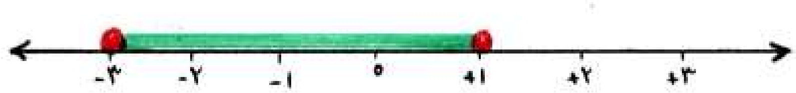
$D=\{x \mid x\in R\ ,\ x<+1\}$



$E=\{x \mid x\in R\ ,\ -1\leq x<3\}$



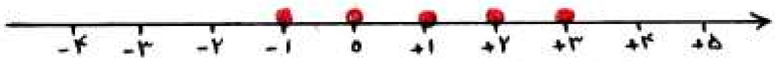
$F=\{x \mid x\in R\ ,\ -3\leq x\leq +1\}$



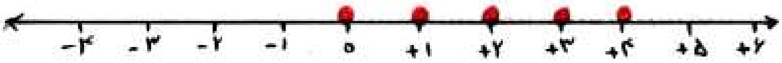
مثال: مجموعه‌های مقابل را روی محور اعداد نمایش دهید.

$A=\{x \mid x\in N,\ x\leq ۴\}$

$B=\{x \mid x\in Z,\ -۲< x \leq +۳\}$



$C=\{x \mid x\in W\ \ x<۵\}$



$D=\{x \mid x\in E,\ ۳< x\leq ۷\}$

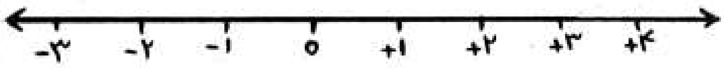
$E=R$

$F=R-\{-۱,+۲\}$

مثال: با توجه به مجموعه‌ی مقابل؛

$A=\{x \mid x\in R,\ ۰\leq x<۲\}$

الف) این مجموعه را روی محور اعداد نمایش دهید.



ب) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

$۱٫۲۵\overline{۷}\in A$ .... $-\sqrt{۲}\in A$ ....

$(\sqrt{۲}+۱)\in A$ .... $\sqrt{۴}\notin A$ ....

$\{۰,۲\}\subseteq A$ .... $\{\sqrt{۲},\sqrt{۳}\}\subseteq A$ ....

مثال: با توجه به مجموعه‌ی مقابل درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

$A=\{x \mid x\in Q',\ x\leq ۵\}$

$\frac{۲}{۳}\in A$ ✗	$\sqrt{۱۷}\notin A$ ✗	$۳\in A$ ✗
$۵\notin A$ ✓	$\{\sqrt{۷},\sqrt{۸},\sqrt{۹}\}\subseteq A$ ✗	$۰\in A$ ✗
$۳٫۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱\ldots\in A$ ✓	$\{\sqrt{۲},\sqrt{۳}\}\subseteq A$ ✓	$\pi\in A$ ✓
$\sqrt{۲}\in A$ ✓	$A\subseteq A$ ✓	$۲٫\overline{۳}\in A$ ✗

تدریس خصوصی ریاضیات دبیرستان (دوره ی اول و دوم و ...) فیروز محمودی همراه : ۰۹۱۱۳۷۰۲۷۲۵۲

مثال: با توجه به مجموعه‌ی مقابل:

$A=\{\sqrt{x+1} \mid x\in W,\ x<5\}$

الف) این مجموعه را با نوشتن عضوهایش مشخص کنید.

$A=\{\sqrt{x+1} \mid \underbrace{x\in W,\ x<5}_{0,1,2,3,4}\}=\{\sqrt{0+1},\sqrt{1+1},\sqrt{2+1},\sqrt{3+1},\sqrt{4+1}\}$

$=\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5}\}$

ب) چند عدد طبیعی در این مجموعه قرار دارد؟ دو عدد طبیعی که عبارتند از ۱ و ۲

ب) چند عدد گنگ در این مجموعه قرار دارد؟ سه عدد گنگ که عبارتند از: $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$

ج) چند عدد گویا در این مجموعه قرار دارد؟ دو عدد گویا که عبارتند از ۱،۲

د) چند عدد حقیقی در این مجموعه قرار دارد؟ پنج عدد حقیقی که عبارتند از $1,\sqrt{2},\sqrt{3},2,\sqrt{5}$

هـ) حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$A\cap N=\{1,2\}$

$A-N=\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$

$A\cap\{\sqrt{2},0,-1\}=\{\sqrt{2}\}$

$A\cap Q=\{1,2\}$

$A-Q'=\{1,2\}$

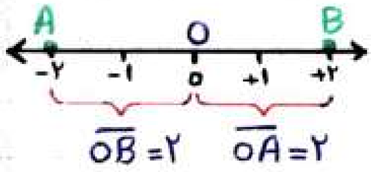
ت) درستی یا نادرستی عبارات مقابل را مشخص کنید.

$\{1,2\}\subseteq A$ ✓ $A\subseteq Q$ ✗

$\sqrt{4}\in A$ ✗ $A\subseteq R$ ✓

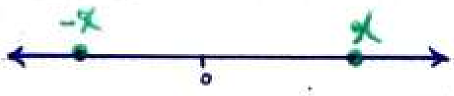
$n(A)=5$ ✓ $\{\sqrt{2},\sqrt{3}\}\subseteq A$ ✓

مفهوم قدرمطلق



در شکل مقابل فاصله‌ی نقطه‌های A و B تا مبدأ O برابر ۲ می‌باشد یعنی طول پاره‌خط‌های OA و OB هر دو برابر ۲ است، فاصله‌ی یک نقطه روی محور تا مبدأ همواره عددی مثبت است. صرف‌نظر از اینکه آن نقطه در قسمت مثبت یا منفی محور باشد.

بنابراین: برای نمایش فاصله‌ی یک نقطه روی محور تا مبدأ از نمادی به نام قدرمطلق استفاده می‌کنند.



نکته: فاصله‌ی نقطه‌ی x تا مبدأ را با نماد $|x|$ نشان می‌دهند.

بخوانید «قدرمطلق x»

وقتی می‌نویسیم $|+۵|=۵$ به این معنی است که فاصله‌ی عدد ۵+ تا مبدأ (عدد صفر) برابر ۵ واحد است

وقتی می‌نویسیم $|-۵|=۵$ به این معنی است که فاصله‌ی عدد ۵- تا مبدأ (عدد صفر) برابر ۵ واحد است

بنابراین؛

$$|+۵|=۵$$
$$|-۵|=۵$$

مثال: عبارات زیر را کامل کنید.

الف) وقتی فاصله‌ی عدد ۷+ تا مبدأ (عدد صفر) برابر ۷ واحد است، می‌نویسیم؛ $|+۷|=۷$

ب) وقتی فاصله‌ی عدد ۱۲- تا مبدأ (عدد صفر) برابر ۱۲ واحد است، می‌نویسیم؛ $|-۱۲|=۱۲$

سؤال: منظور از «$|۰|=۰$» چیست؟

جواب؛ یعنی فاصله‌ی عدد صفر تا مبدأ که همان صفر است برابر صفر می‌باشد.

نکته‌ی مهم:

الف) قدرمطلق هر عدد مثبت برابر خود آن عدد است.

مثال: $|+۱۵|=+۱۵$ $\quad |+۳|=+۳$ $\quad |+۷|=+۷$

ب) قدرمطلق عدد صفر، برابر صفر است.

مثال: $|۰|=۰$

ج) قدرمطلق هر عدد منفی، برابر است با قرینه‌ی آن عدد.

مثال: $|-۷|=-(-۷)=+۷$

علامت قرینه

مثال: حاصل عبارات متقابل را بدست آورید.

$$\underbrace{|-۷|}_{+۷} - \underbrace{|-۴|}_{+۴} = +۷-(+۴) = +۷-۴ = +۳$$

$$|-۵\times(+۳)| = |-۱۵| = -(-۱۵) = +۱۵$$

$$|۳-۲\times۵| = |۳-۱۰| = |-۷| = -(-۷) = +۷$$

$$|-۲\times۱۰+۸\times۵| = |-۲۰+۴۰| = |+۲۰| = +۲۰$$

$$x>۰ \Rightarrow |x| = x$$

$$x=۰ \Rightarrow |x| = |۰| = ۰$$

$$x<۰ \Rightarrow |x| = -x$$

مثال: حاصل عبارات متقابل را به ازای $a=-۳$ و $b=+۱$ بدست آورید.

$$|۳b+a| = |۳\times(+۱)+(-۳)| = |+۳-۳| = |۰| = ۰$$

$$-|a|+|b-۴| = -|-۳|+|\overbrace{+۱-۴}^{-۳}|$$
$$= -(+۳)+(+۳) = -۳+۳ = ۰$$

$$-|a-b|+|a| = -|\overbrace{-۳-(+۱)}^{-۴}|+|-۳|$$
$$= -(+۴)+(+۳)$$
$$= -۴+۳ = -۱$$

$$\frac{|b-a|+|۲b|}{|a.b|} = \frac{|\overbrace{+۱-(-۳)}^{+۴}|+|\overbrace{۲\times(+۱)}^{+۲}|}{|\underbrace{-۳\times(+۱)}_{-۳}|} = \frac{+۴+(+۲)}{+۳} = \frac{+۴+۲}{+۳} = \frac{+۶}{+۳} = +۲$$

مثال: حاصل عبارت متقابل به ازای $a=-۵$ ، $b=+۴$ کدام است؟

$$\frac{|b-a|-|۳a|}{|a+b|} = \frac{|\overbrace{+۴-(-۵)}^{+۹}|-|\overbrace{۳\times(-۵)}^{-۱۵}|}{|\underbrace{-۵+(+۴)}_{-۱}|} = \frac{+۹-(+۱۵)}{+۱} = \frac{-۶}{+۱} = -۶$$

الف) $+۶$

ب) -۶

ج) -۲۱

د) $+۲۱$

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$|\sqrt{3}-\sqrt{2}| =$

جواب: چون $\sqrt{2}<\sqrt{3}$ می باشد، بنابراین حاصل عبارت داخل قدرمطلق عددی مثبت می باشد و می دانیم که قدرمطلق هر عدد مثبت برابر است با خودش. پس:

$|\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$|\sqrt{5}-\sqrt{7}| =$

جواب: چون $\sqrt{7}>\sqrt{5}$ می باشد، بنابراین حاصل عبارت داخل قدرمطلق، عددی منفی می باشد و از طرفی می دانیم که قدرمطلق هر عدد منفی برابر است با قرینه‌ی آن عدد. بنابراین داریم:

$|\sqrt{5}-\sqrt{7}| = -(\sqrt{5}-\sqrt{7}) = -\sqrt{5}+\sqrt{7}$

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

$|\sqrt{3}-\sqrt{5}| = -(\sqrt{3}-\sqrt{5}) = -\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$|\sqrt{10}-\sqrt{8}| = \sqrt{10}-\sqrt{8}$

$|3-\sqrt{7}| = 3-\sqrt{7}$

نکته: عدد ۳ همان $\sqrt{9}$ می باشد که می دانیم $\sqrt{7}<\sqrt{9}$ می باشد. بنابراین حاصل عبارت داخل قدرمطلق عددی مثبت می باشد.

$|\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2$

$|4-\sqrt{17}| = -(4-\sqrt{17}) = -4+\sqrt{17}$

$|3-\pi| = -(3-\pi) = -3+\pi$

نکته: مقدار تقریبی عدد π برابر ۳/۱۴ می باشد بنابراین حاصل $3-\pi$ عددی منفی می باشد.

$|-1-\sqrt{7}| = -(-1-\sqrt{7}) = +1+\sqrt{7}$

$|-\sqrt{3}+\sqrt{2}| = -(-\sqrt{3}+\sqrt{2}) = +\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$|-5-2\sqrt{3}| = -(-5-2\sqrt{3}) = +5+2\sqrt{3}$

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$|۵-\sqrt{۷}| = ۵-\sqrt{۷}$

$|۵-\sqrt{۷}| + |-۳-\sqrt{۷}| = ۵-\sqrt{۷} + (+۳+\sqrt{۷})$

$= ۵ - \cancel{\sqrt{۷}} + ۳ + \cancel{\sqrt{۷}} = ۸$

$|-۳-\sqrt{۷}| = -(-۳-\sqrt{۷}) = +۳+\sqrt{۷}$

$|-۴-\sqrt{۵}| = -(-۴-\sqrt{۵}) = +۴+\sqrt{۵}$

$|-۴-\sqrt{۵}| - |\sqrt{۵}-۲| = +۴+\sqrt{۵} - (\sqrt{۵}-۲)$

$= +۴ + \cancel{\sqrt{۵}} - \cancel{\sqrt{۵}} + ۲ = +۶$

$|\sqrt{۵}-۲| = \sqrt{۵}-۲$

نکته ی مهم: $x\sqrt{y} = \sqrt{x \times x \times y}$

مثال:

$۳\sqrt{۲} = \sqrt{۳\times۳\times۲} = \sqrt{۱۸}$ $\qquad$ $۵\sqrt{۳} = \sqrt{۵\times۵\times۳} = \sqrt{۷۵}$

$۲\sqrt{۱۱} = \sqrt{۲\times۲\times۱۱} = \sqrt{۴۴}$ $\qquad$ $۲\sqrt{۵} = \sqrt{۲\times۲\times۵} = \sqrt{۲۰}$

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$|۲\sqrt{۳} - \sqrt{۱۰}| = ?$

جواب: می دانیم که $۲\sqrt{۳} = \sqrt{۲\times۲\times۳} = \sqrt{۱۲}$ بنابراین چون $\sqrt{۱۰} < \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$ می باشد. حاصل عبارت داخل قدر مطلق عددی مثبت می شود. پس:

$|۲\sqrt{۳} - \sqrt{۱۰}| = ۲\sqrt{۳} - \sqrt{۱۰}$

جواب: می دانیم که: $۲\sqrt{۱۱} = \sqrt{۲\times۲\times۱۱} = \sqrt{۴۴}$

و همچنین: $۳\sqrt{۵} = \sqrt{۳\times۳\times۵} = \sqrt{۴۵}$

$|۲\sqrt{۱۱} - ۳\sqrt{۵}| = -(۲\sqrt{۱۱} - ۳\sqrt{۵})$

$= -۲\sqrt{۱۱} + ۳\sqrt{۵}$

بنابراین چون $\sqrt{۴۵} > \sqrt{۴۴}$ می باشد. حاصل عبارت داخل قدر مطلق منفی می شود.

مثال: حاصل عبارت مقابل را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$|-۲\sqrt{۳}-۵| = -(-۲\sqrt{۳}-۵) = +۲\sqrt{۳}+۵$

$|-۲\sqrt{۳}-۵| - \sqrt{۳}\,|۲-\sqrt{۳}| = +۲\sqrt{۳}+۵ - \sqrt{۳}(۲-\sqrt{۳}) =$

$= \cancel{+۲\sqrt{۳}}+۵ \cancel{-۲\sqrt{۳}} +۳ = +۸$

$|۲-\sqrt{۳}| = ۲-\sqrt{۳}$

نکته‌ی مهم: اگر x عددی حقیقی باشد داریم:

$\sqrt{x^۲} = |x|$

مثال:

$\sqrt{(+۷)^۲} = |+۷| = +۷$

$\sqrt{(-۵)^۲} = |-۵| = -(-۵) = +۵$

$\sqrt{(-۳)^۲} = |-۳| = -(-۳) = +۳$

$\sqrt{(+۱)^۲} = |+۱| = +۱$

$\sqrt{(۳-\sqrt{۱۰})^۲} = |۳-\sqrt{۱۰}| = -(۳-\sqrt{۱۰})$
$= -۳+\sqrt{۱۰}$

$\sqrt{(۳-\sqrt{۲})^۲} = |۳-\sqrt{۲}| = ۳-\sqrt{۲}$

مثال: حاصل عبارات مقابل را بدست آورید.

$\sqrt{(۲\sqrt{۳}-\sqrt{۱۳})^۲} = |۲\sqrt{۳}-\sqrt{۱۳}| = -(۲\sqrt{۳}-\sqrt{۱۳}) = -۲\sqrt{۳}+\sqrt{۱۳}$

$\sqrt{(۵-\sqrt{۳۰})^۲} + \sqrt{(۷-\sqrt{۳۰})^۲} = |۵-\sqrt{۳۰}| + |۷-\sqrt{۳۰}|$
$= -(۵-\sqrt{۳۰}) + (۷-\sqrt{۳۰})$
$= -۵ \cancel{+\sqrt{۳۰}} +۷ \cancel{-\sqrt{۳۰}} = +۲$

فیروز محمودی

مثال: اگر $x>۰$ و $y<۰$ باشد، حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$\sqrt{x^۲} + \sqrt{y^۲} = |x| + |y|$
$= x + (-y) = x - y$

مثال: اگر $2 > x > 1$ باشد، عبارت مقابل را تا حد امکان ساده کنید.

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=|x-1|+|x-2| = x-1+(-x+2)$$
$$= \cancel{x}-1-\cancel{x}+2$$
$$= +1$$

$|x-1| = x-1$

$|x-2| = -(x-2) = -x+2$

مثال: حاصل عبارت مقابل کدام است؟

$$\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}-\sqrt{3}\,|1-\sqrt{3}| = |3-\sqrt{3}|-\sqrt{3}(-1+\sqrt{3})$$
$$= \cancel{3}-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{3}$$
$$= 0$$

الف) $+4$

ب) -2

ج) 0 ✓

د) $\sqrt{3}$

$|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$

مثال: اگر مجموعه‌های $A = \{-5 , 1\}$ و $B = \{|x| , a\}$ باهم مساوی باشند حاصل $-2|x|+a$ کدام است؟

$|x| = 1$

$a = -5$

$$-2|x|+a = -2\times 1+(-5)$$
$$= -2-5$$
$$= -7$$

الف) -7 ✓

ب) $+11$

ج) 3

د) -9

مثال: عبارات مقابل را با زبان ریاضی بازنویسی کنید.

الف) قدر مطلق حاصل‌ضرب دو عدد، برابر است با حاصل‌ضرب قدر مطلق‌های آن دو عدد.

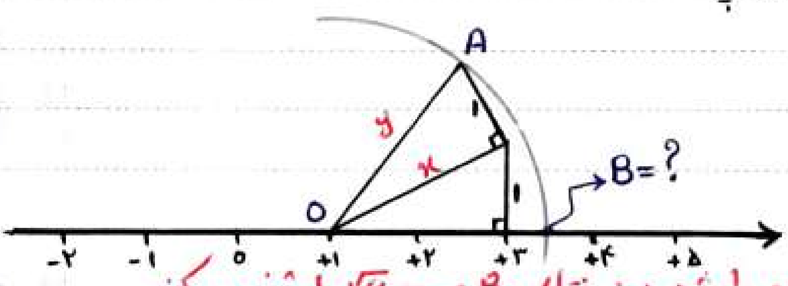
جواب: $|a.b| = |a|.|b|$

ب) قدر مطلق مجموع دو عدد، کوچکتر یا مساوی است با مجموع قدر مطلق‌های آن دو عدد.

جواب: $|x+y| \leq |x|+|y|$

نمونه‌ی سؤالات امتحانی

۱- درشکل مقابل به مرکز O و به شعاع OA کمانی زده‌ایم تا محور اعداد را در نقطه‌ی B قطع کند. نقطه‌ی B چه عددی را مشخص می‌کند؟



$x^2 = 2^2 + 1^2$ $\qquad$ $y^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2$

$x^2 = 4 + 1 = 5$ $\qquad$ $y^2 = 5 + 1 = 6$

$x = \sqrt{5}$ $\qquad$ $y = \sqrt{6}$

بنابراین $OA = \sqrt{6}$ می‌باشد، و OB نیز برابر $\sqrt{6}$ می‌باشد، یعنی نقطه‌ی B عدد $\sqrt{6}$ را مشخص می‌کند.

۲ با توجه به مجموعه‌ی مقابل

$A = \{ |x| \mid x \in \ \ , -2 \leq x \leq 2 \}$

$-2, -1, 0, +1, +2$

$= \{ |-2|, |-1|, |0|, |+1|, |+2| \}$

$= \{ +2, +1, 0, +1, +2 \}$

$= \{ +2, +1, 0 \}$

الف) عضوهای این مجموعه را مشخص کنید.

ب) این مجموعه چند زیرمجموعه دارد؟

تعداد عضوها

$\text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = 2^{3} = 2 \times 2 \times 2 = 8$

۳- الف) دو عدد گویا بنویسید که بین ۳ و ۲ باشد.

۲ ۲٫۱ ۲٫۲ ۳

$2/1 = 2\frac{1}{10} = \frac{21}{10}$ $\qquad$ $2/2 = 2\frac{2}{10} = \frac{22}{10}$

ب) دو عدد گنگ بنویسید که بین ۲ و ۳ باشند.

$2 = \sqrt{4}$ $\quad \sqrt{5} \quad \sqrt{7} \quad$ $3 = \sqrt{9}$

۴- الف) دو عدد گنگ بنویسید که حاصلضرب آنها عددی گویا باشد.

$\sqrt{2} \in Q'$

$\sqrt{8} \in Q' \Rightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4 \ , \ 4 \in Q$

ب) دو عدد گنگ بنویسید که حاصل تقسیم آنها عددی گویا باشد.

$\sqrt{12} \in Q'$

$\sqrt{3} \in Q' \Rightarrow \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2 \ , \ 2 \in Q$

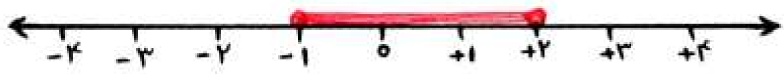
ج) دو عدد گنگ بنویسید که مجموع آنها عددی گویا باشد.

$\sqrt{3} \in Q'$

$-\sqrt{3} \in Q' \Rightarrow \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \ , \ 0 \in Q$

۵ـ الف) مجموعه‌ی مقابل را روی محور اعداد نمایش دهید.

$A=\{x \mid x\in R , -1\leq x\leq +2\}$



ب) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

$-\sqrt{2}\in A$ ✗

$\sqrt{3}\notin A$ ✗

$\{-1,0\}\subseteq A$ ✓

۶ـ اگر $x<0$ باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟

$x+\sqrt{x^2}=x+|x|$

$=x+(-x)$

$=x-x=0$

الف) ۰ ✓   ب) x

ج) $2x$ د) $-x$

۷ـ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف)

الف) اگر $a<0$ و $0<b$ باشد. حاصل عبارت $\sqrt{(ab)^2}$ برابر $a.b$ می‌باشد. ✗

ب) اگر $a<0<b$ باشد، داریم: $\sqrt{(a-b)^2}=b-a$ ✓ $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=-(a-b)=-a+b$

ج) $\sqrt{a^2}$ همواره برابر a می‌باشد. ✗ $\sqrt{a^2}=|a|$

د) اگر $a,b<0$ باشند، داریم: $|a+b|=-a-b$ ✓

$|a+b|=-(a+b)=-a-b$

۸ـ حاصل عبارت مقابل را بدست آورید.

$\sqrt{(-2-\sqrt{3})^2}-|-\sqrt{3}|=|-2-\sqrt{3}|-(+\sqrt{3})$

$=-(-2-\sqrt{3})-\sqrt{3}=+2+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{3}}=+2$

۹ـ حاصل عبارت مقابل را به ازای $a=-3$ و $b=+2$ بدست آورید.

$$\frac{|a-b|-|a|}{|a+2|}=\frac{|-3-(+2)|-|-3|}{|-3+2|}=\frac{+5-(+3)}{+1}=\frac{+5-3}{+1}=\frac{+2}{+1}=+2$$