درس اوّل : گزاره و استدلال

برای ورود به بحث های هندسی، لازم است برخی از مفاهیم اساسی و مورد نیـاز از قبیـل گـزاره، اسـتدلال ، تعریف ، قضیه و ... را معرفی نماییم. در ضمن معرفی این مفاهیم به ناچار برخی اصطلاحات و مفاهیم ریاضی و هندسه را بکار ببریم. گرچه ممکن است در ادامه تعریفی دقیق برای آنها ارائه شود ولی در ابتدا آنها را پیش دانسته فرض می کنیم.

مفهوم گزاره : گزاره یک جمله‌ی خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد.

مثال : هر یک از جملات زیر گزاره هستند.

۱ : عدد $\sqrt{۲}$ یک عدد گنگ است.

۲ : توان دوّم یک عدد همیشه از آن بزرگتر است.

۳ : مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه نیست.

۴ : بین هر دو عدد طبیعی متوالی ، عدد طبیعی دیگری وجود ندارد.

که گزاره های ۱ و ۴ درست و گزاره های ۲ و ۳ نادرست می باشند.

توجه داشته باشید که گاهی اوقات یک گزاره با نماد های ریاضی نوشته می شود.

مثال : هر یک از جملات زیر گزاره هستند.

۱ : $\sqrt{۲} \in (۱,۲)$ **۲ :** $\sqrt{۳} > ۲$ **۳ :** $\frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$

که گزاره های ۱ و ۳ درست و گزاره ی ۲ نادرست می باشند.

مثال : هر یک از جملات زیر ، چون خبری نیستند، گزاره محسوب نمی شوند.

۱ : آیا عدد π یک عدد گویا است؟

۲ : معادله‌ی $x^۲ + ۳x - ۱۰ = ۰$ را حل کن.

۳ : نامساوی مثلثی ، چه نامساوی مفیدی است!

همانطور که گفته شد، هر گزاره دقیقاً درست یا نادرست است. گزاره ای که هم درست باشد و هم نادرست، وجود ندارد. همچنین گزاره ای که نه درست و نه نادرست باشد، وجود ندارد. اگر گزاره ای درست است، گویند ارزش این گزاره « درست » است و اگر گزاره ای نادرست باشد، گویند ارزش آن« نادرست » است.

***

نقیض گزاره : اگر ضمن حفظ موضوعیت و ارتباط، یک گزاره چنان تغییر کند که ارزش آن تغییر کند، گویند **نقیض گزاره** نوشته شده است. نقیض یک گزاره‌ی درست ، گزاره ای نادرست و نقیض یک گزاره‌ی نادرست، گزاره ای درست می باشد. در واقع ارزش نقیض یک گزاره دقیقاً مخالف آن گزاره است.

تمرین ۱ : ارزش گزاره‌ی زیر را بنویسید و سپس گزاره‌ی نقیض آن را بنویسید.

« عدد $\sqrt{۵}$ عددی گنگ است. »

حل : این گزاره درست است و هر یک از گزاره های زیر نقیض آن محسوب می شوند.

الف : « عدد $\sqrt{۵}$ عددی گنگ نیست. »

ب : « عدد $\sqrt{۵}$ عددی گویا است. »

ج : « چنین نیست که عدد $\sqrt{۵}$ عددی گنگ باشد. »

تمرین برای حل : نقیض هر یک از گزاره های زیر را بنویسید.

۲ : مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه نیست.

۳ : هر لوزی یک مربع است.

۴ : مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

۵ : هیچ مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.

۶ : مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی برابر۳۶۰ درجه است.

***

گزاره های مرکب : گزاره می تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره‌ی ساده می گویند. اگر گزاره ای بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از دو یا چند گزاره‌ی ساده باشد، آن را گزاره‌ی مرکب می گویند. برای مثال گزاره‌ی زیر یک گزاره‌ی مرکب است.

« عدد ۵ اوّل است و عدد ۷ مرکب است.»

همانطور که معلوم است این گزاره از دو گزاره‌ی ساده تشکیل شده است که با حرف رابط « و » به هم متصل شده اند. گزاره‌ی اوّل درست ولی گزاره‌ی دوّم نادرست می باشد. کل گزاره نیز نادرست محسوب می شود.

گزاره های ساده را می توان به صورت های مختلفی ترکیب کرد. رایج ترین آنها به شکل زیر است.

الف : ترکیب دو گزاره با حرف ربط « و» که **ترکیب عطفی** نامیده می شود.

مثال : « عدد ۱۵ مرکب است و عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.»

ب : ترکیب دو گزاره با حرف ربط « یا » که **ترکیب فصلی** نامیده می شود.

مثال : « عدد ۱۵ فرد است یا عدد ۱۲ مضرب۷ است.»

ج : ترکیب دو گزاره با حرف ربط « اگر .... آنگاه ..... » که **ترکیب شرطی** نامیده می شود.

مثال : « اگر $۵ < ۳$ آنگاه $\frac{۱}{۵} > \frac{۱}{۳}$ است.»

د : ترکیب دو گزاره با حروف ربط « اگر .... آنگاه ..... و برعکس» یا « .... اگر و فقط اگر ..... » یا « .... شرط لازم و کافی است برای ...... » که **ترکیب دوشرطی** نامیده می شود.

مثال : « اگر $۵ < ۳$ آنگاه $\frac{۱}{۵} > \frac{۱}{۳}$ است و برعکس»

مثال : « یک مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر زاویه‌ی قائمه داشته باشد. »

***

گزاره نما : گاهی اوقات یک جمله‌ی خبری مانند نمونه های زیر شامل یک یا چند متغیر است و به ازاء قرار دادن مقادیر مختلف به جای متغیر آن تبدیل به یک گزاره می‌شود، چنین جملاتی را گزاره نما می نامنـد. در واقع بدون قرار دادن مقدار به جای متغیر نمی توان در مورد درستی یـا نادرسـتی گـزاره نمـا قـضاوت کـرد. مجموعه‌ی مقادیری که اگر اعضای آنرا به جای متغیر گزاره نما جایگزین کنیم گزاره نمـا را بـه یـک گـزاره درست تبدیل کند را مجموعه جواب گزاره نما می نامند.

مثال : جمله‌ی خبـری $\sqrt{x} \geq ۳$ یـک گـزاره نمـا اسـت. مجموعـه‌ی جـواب ایـن گـزاره نمـا مجموعـه‌ی $\{x \mid x \in R , x \geq ۹\}$ می باشد.

مشابه نقیض گزاره ، برای گزاره نما هم می توان نقیض نوشت. به مثال زیر توجه کنید.

گزاره نما : a عددی فرد است.

نقیض گزاره نما : a عددی زوج است.

توجه داشته باشد که اگر به ازای مقداری برای متغیر، یک گزاره نما تبدیل به یک گزاره‌ی درست شـود، بـه ازای این مقدار نقیض گزاره نما ، تبدیل به یک گزاره‌ی نادرست می شود و برعکس

تمرین ۷ : نقیض گزاره نمای زیر را بنویسید.

« عدد a از b بزرگتر است. »

حل : هر یک از گزاره نمای های زیر نقیض گزاره نمای فوق محسوب می شوند.

الف : « عدد a از b بزرگتر نیست. »

ب : « عدد a کوچکتر یا مساوی b است. »

ج : « چنین نیست که عدد a از b بزرگتر باشد. »

د : « عدد b بزرگتر یا مساوی a است. »

تمرین ۸ : نقیض گزاره نماهای زیر را بنویسید.

الف) $x^{۲}-۱=۰$ ب) $x>۰$

توجه داشته باشید که برخی گزاره نماها هستند که همیشه درست می باشند. مانند گـزاره نمـای $x^{۲}\geq ۰$ کـه مجموعه‌ی جواب آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است.

در زیر نیز چند گزاره نمای همواره درست نیز ملاحظه می کنید. انتظار می رود که توضیح ساده ای برای آنها ارائه گردد.

مثال ۱ : $x^{۲}+۱>۰$

مثال۲ : اگر $a\times b=۰$ آنگاه یا $a=۰$ یا $b=۰$

مثال ۳ : اگر $a^{۲}+b^{۲}=۰$ آنگاه هم $a=۰$ و هم $b=۰$

***

استدلال و انواع آن

عمل ارائه‌ی دلیل برای اثبات درستی یک گزاره به کمک دانسته های قبلی را استدلال می نامند. به طور کلی دو نوع استدلال وجود دارد.

الف: استدلال استقرایی :

روش نتیجه گیری کلی بر مبنای تعداد محدودی مشاهده را استدلال استقرایی می نامند.

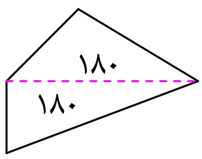
ب : استدلال استنتاجی :

روش نتیجه گیری کلی بر مبنای حقایق پذیرفته شده را استدلال استنتاجی می نامند.

***

مثال : رحمان وقتی در مورد مجموع زاویه های داخلی یک چهار ضلعی محدب با پژمان و پیمان صحبت می کرد. آنها گفتند مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰ درجه است و استدلالی که بکار بردند متفاوت بود.

استدلال پژمان : در تمام چهارضلعی هایی از قبیل مربع ، مستطیل ، لوزی ، متوازی الاضلاع با توجه به اینکه زاویه های مجاور مکمل یکدیگرند، مجموع زاویه های داخلی ۳۶۰ درجه است، لذا مجموع زاویه های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰ درجه است.



استدلال پیمان : با توجه به اینکه مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است. لذا با رسم یک قطر در هر چهارضلعی محدب می توان آن را به دو مثلث تبدیل کرد. لذا مجموع زاویه های داخلی چهارضلعی محدب برابر مجموع زاویه های داخلی این دو مثلث می باشد، در نتیجه برابر ۳۶۰ درجه است.

با توجه به تعریف ارائه شده برای انواع استدلال ، واضع است که استدلال پژمان استقرایی و استدلال پیمان استنتاجی است.(چرا؟)

تمرین ۹ : تفاوت های بین انواع استدلال را بنویسید.

حل:

استقرایی	از جزء به کل است.	متکی بر تعداد محدودی مشاهده است.	تجربی است.	نتایج آن احتمالی است.
استنتاجی	از کل به جزءاست.	متکی بر حقایق پذیرفته شده است.	منطقی است.	نتایج آن قطعی است.

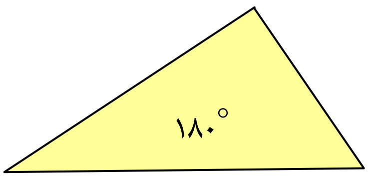
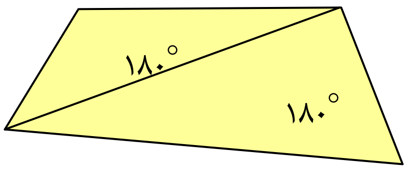
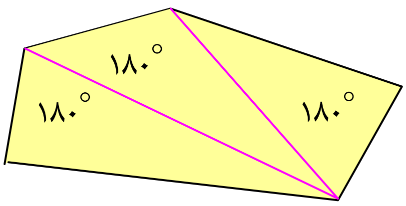
توجه : چون استدلال استقرایی مبتنی بر تجربه بوده و تمام حالات ممکن را بررسی نمی کند پس نتایج بدست آمده از آن قطعی نیست ولی در استدلال استنتاجی نتایج بدست آمده همواره قطعی هستند، زیرا این استدلال مبتنی بر حقایق بوده و تجربی نمی باشد.

تمرین ۱۰ : به کمک استدلال استقرایی ثابت کنید که

مجموع زاویه های داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n-۲)\times ۱۸۰$ است.

حل : مجموع زاویه های داخلی چند ضلعی های محدب را از سه تا شش ضلعی تعیین کرده و سپس جدولی مانند جدول زیر را کامل می کنیم. سپس پاسخ خود را تعمیم می دهیم.

تعداد اضلاع	۳	۴	۵	....	n
تعداد مثلث های تشکیل شده					
مجموع زاویه ها					

سه ضلعی	
چهار ضلعی	
پنج ضلعی	

حال با توجه به شکل های رسم شده جدول را تکمیل نموده و سپس پاسخ خود را تعمیم می دهیم.

تعداد اضلاع	۳	۴	۵	....	n
تعداد مثلث های تشکیل شده	۱	۲	۳		$n-۲$
مجموع زاویه ها	۱×۱۸۰	۲×۱۸۰	۳×۱۸۰		$(n-۲)\times ۱۸۰$

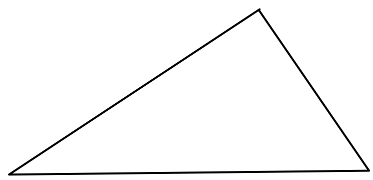
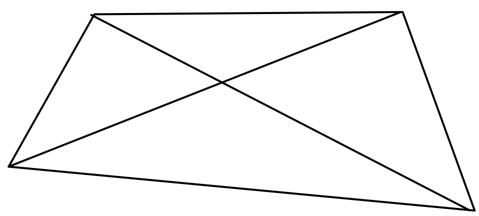
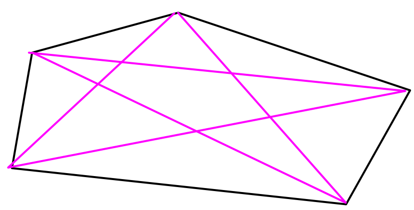
***

تمرین ۱۱: به کمک استدلال استقرایی ثابت کنید که

تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ است.

حل : تعداد قطر های چند ضلعی های محدب را از سه تا شش ضلعی تعیین کرده و سپس جدولی مانند جدول زیر را کامل می کنیم. سپس پاسخ خود را تعمیم می دهیم.

تعداد اضلاع	۳	۴	۵	....	n
تعدادقطر های رسم شده از یک رأس					
تعداد قطر های رسم شده از تمام رئوس					
تعداد واقعی قطرهای چند ضلعی					

سه ضلعی	
چهار ضلعی	
پنج ضلعی	

حال با توجه به شکل های رسم شده جدول را تکمیل نموده و سپس پاسخ خود را تعمیم می دهیم.

تعداد اضلاع	۳	۴	۵	....	n
تعداد قطر های رسم شده از یک رأس	$۰=۳-۳$	$۱=۴-۳$	$۲=۵-۳$		$n-۳$
تعداد قطر های رسم شده از تمام رئوس	$۰= ۳\times(۳-۳)$	$۴= ۴\times(۴-۳)$	$۱۰= ۵\times(۵-۳)$		$n(n-۳)$
تعداد واقعی قطرهای چند ضلعی	$۰= \frac{۳\times(۳-۳)}{۲}$	$۲= \frac{۴\times(۴-۳)}{۲}$	$۵= \frac{۵\times(۵-۳)}{۲}$		$\frac{۱}{۲}n(n-۳)$

***

تمرین ۱۲ : به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید که

مجموع زاویه های داخلی هر n ضلعی محدب برابر $۱۸۰\times(n-۲)$ درجه است.

حل : با رسم قطرهای گذرا از یک رأس هر n ضلعی محدب به تعداد $n-۲$ مثلث تشکیل می شود. چون مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه می باشد، لذا مجموع تمام زاویه های داخلی برابر $۱۸۰\times(n-۲)$ است.

***

تمرین ۱۳ : به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید که

تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر $\frac{۱}{۲}n(n-۳)$ است.[1]

حل : می دانیم با n نقطه‌ی متمایز که هیچ سه تای آنها روی یک خط راست نباشند، می توان $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ پاره خط ایجاد کرد. لذا با n رأس یک n ضلعی محدب می توان $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ پاره خط رسم کرد. از این پاره خط ها به تعداد n پاره خط ضلع و مابقی قطر هستند. لذا تعداد قطرها می شود:

$$\frac{۱}{۲}n(n-۱)-n=\frac{n^۲-n}{۲}-\frac{۲n}{۲}=\frac{n^۲-۳n}{۲}=\frac{۱}{۲}n(n-۳)$$

***

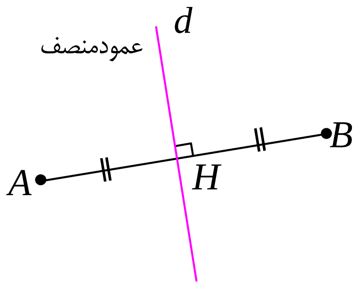
[1] . **توجه : با** n نقطه‌ی متمایز که هیچ سه تای آنها روی یک خط راست نباشند، می توان $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ پاره خط ایجاد کرد.

مفهوم تعریف :

تعریف هر چیز شامل مجموعه‌ی مشخصاتی است که برای شناخته شدن آن بیان می‌شوند.

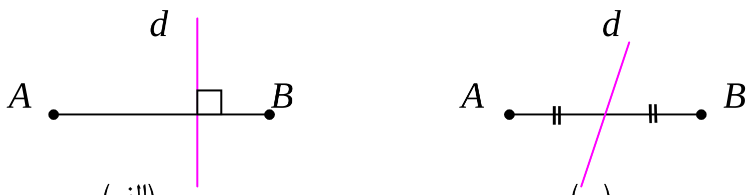
مثلاً می توان عمود منصف یک پاره خط را به صورت زیر تعریف کرد:

عمود منصف یک پاره خط ، خطی است که هم از وسط پاره خط می گذرد و هم بر آن پاره خط عمود است .



تعریف هر چیز باید صفات و خصوصیات آن را به آن اندازه که برای شناخته شدنش لازم و کافی است شامل باشد نه بیشتر و نه کمتر به عبارت بهتر تعریف خوب و درست آن است که از توضیح اضافی بی‌نیاز باشد و حذف هیچ جزئی از آن ممکن نباشد پس تعریف باید جامع و مانع باشد.

برای مثال اگر در بیان تعریف عمود منصف پاره خط یکی از دو شرط گذشتن از وسط پاره خط یا عمود بودن را حذف کنیم، در این صورت خط رسم شده نمی تواند عمود منصف باشد.

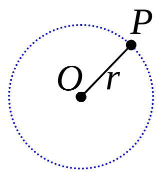


(ب) (الف)

در شکل های فوق در مورد الف با اینکه خط d بر پاره خط AB عمود است ولی چون از وسط پاره خط نمی گذرد، عمود منصف محسوب نمی شود، همچنین در مورد ب با اینکه خط d از وسط پاره خط AB می گذرد ولی چون بر آن عمود نیست، عمود منصف محسوب نمی شود،

لذا بیان این دو شرط برای تعریف عمود منصف پاره خط کفایت می کند و حذف یک قسمت از دو قسمت آن در تعریف ایجاد مشکل می کند، همچنین اضافه کردن مورد دیگری به آن ضرورتی ندارد. برای مثال ضرورتی ندارد که به تعریف عمود منصف این عبارت اضافه شود که« و هر نقطه روی آن از دو سر پاره خط به یک فاصله است.»

توجه داشته باشید که بیان درست تعریف هر مفهوم، منجر به شناخت درست آن مفهوم و یکسان سازی درک این مفهوم می شود. برای مثال برای دایره تعریف زیر ارائه می شود.



دایره : مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که از یک نقطه‌ی ثابت به یک فاصله باشند را دایره می نامند. این نقطه‌ی ثابت را مرکز و فاصله‌ی ثابت را شعاع می نامند.

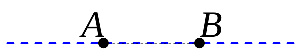
***

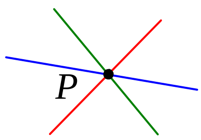
مفهوم اصل :

هر واقعیت که بدیهی بوده و نیازمند استدلال نباشد را اصل می نامند. برای مثال به اصول زیر توجه کنید.

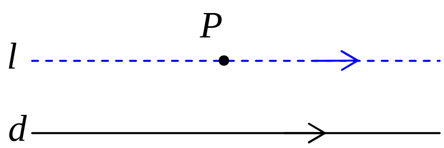
اصل۱ : از یک نقطه روی صفحه چند خط می گذرد.

اصل ۲ : از هر دو نقطه ی متمایز روی صفحه فقط و فقط یک خط راست می گذرد.





اصل ۳ : از هر نقطه‌ی خارج یک خط راست فقط و فقط یک خط راست موازی آن می توان رسم کرد.(اصل توازی اقلیدس)



برخی از اصول ریاضی[2] هم می توان در اینجا مورد توجه قرار داد.

برای مثال :

اصل ۱: دو مقدار مساوی با یک مقدار ، خود با هم مساویند.

$$\begin{cases} a=b \\ b=c \end{cases} \to a=c$$

اصل ۲ : به دو طرف یک تساوی می توان یک مقدار ثابت اضافه یا کم کرد و تساوی جدیدی به دست آورد.

$$a=b \xrightarrow{+x} a+x=b+x$$

2. اصول متعارفی نامیده می شوند.

اصل ۳ : دو طرف یک تساوی می توان یک مقدار ثابت غیرصفرضرب یا تقسیم کرد و تساوی جدیدی به دست آورد.

$$a=b\xrightarrow{\times x\neq ۰}a\times x=b\times x$$

اصل ۴ : دو تساوی را می توان جمع یا کم کرد و تساوی جدیدی به دست آورد.

$$\begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}\rightarrow a+c=b+d$$

اصل ۵ : دو تساوی را می توان ضرب یا تقسیم[3] کرد و تساوی جدیدی به دست آورد.

$$\begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}\rightarrow a\times c=b\times d$$

البته اصول مربوط به **نامساوی ها** هم گاهی مورد استفاده قرار می گیرند، که در اینجا آنها را دانسته فرض می کنیم.

***

مثال نقض : نتایج بدست آمده از استدلال استقرایی قطعی نیستند و گاهی قابل رد هستند. برای رد یک نتیجه ی کلی که از استدلال استقرایی بدست می آید، ارائه‌ی یک مثال نقض کافی است. مثال نقض ، مثالی است که نشان می دهد یک نتیجه گیری کلی نادرست است.

مثال : گزاره‌ی زیر را در نظر بگیرید.

حاصل جمع هر دو عدد گنگ ، یک عدد گنگ است.

این گزاره درست نیست، زیرا اعداد $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند ولی حاصل جمع آنها برابر صفر است که یک عدد گویا می باشد.

$$(\sqrt{۲})+(-\sqrt{۲})=۰$$

***

تمرین۱۴ : با یک مثال نقض گزاره های زیر را رد کنید.

الف : مربع هر عدد بزرگتر یا مساوی آن عدد است.

3. به شرط معنی دار تقسیم

ب : حاصل عبارت $p = x^{۲} + x + ۴۱$ به ازاء اعداد طبیعی همواره یک عدد اوّل است.

حل:

الف: این گزاره نادرست است زیرا : $(۰/۵)^{۲} = ۰/۲۵$ در حالی که $۰/۲۵ \ngeq ۰/۵$

ب: این گزاره نادرست است زیرا اگر عدد ۴۱ را به جای x قرار دهیم حاصل ۱۷۶۳ مـی شـود کـه عـدد اوّل نیست. (بر۴۱ بخش پذیر است.)

***

تمرین برای حل : برای رد درستی هر یک از گزاره های کلی زیر یک مثال نقض ارائه کنید.

۱۵ : از وصل کردن هر سه رأس یک هفت ضلعی منتظم،یک مثلث متساوی الساقین تشکیل می گردد.

۱۶ : برای هر دو مجموعه ی A و B، یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$

۱۷ : هر دو مثلث که مساحت های برابر داشته باشند، هم نهشت هستند.

۱۸ : در هر مثلث هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچکتر است.

۱۹ : در هر مثلث، اندازه‌ی بزرگترین زاویه، از چهار برابر اندازه‌ی کوچکترین زاویه، کوچکتر است.

***

نتیجه : برای پذیرفتن درستی یک گزاره لازم است استدلال کرد و این استدلال باید استنتاجی باشد ولی برای رد درستی یک گزاره ارائه‌ی یک مثال نقض کافی است.

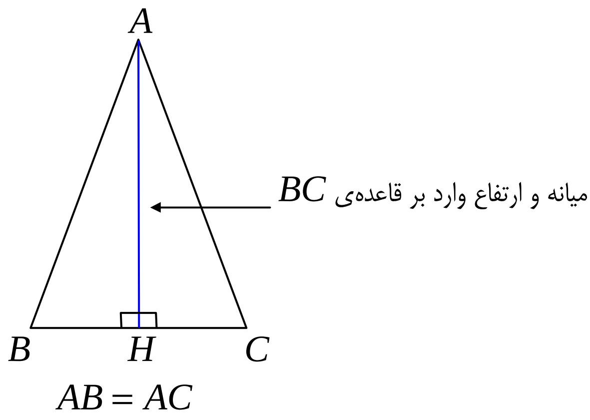
تمرین ۲۰ : از دو گزاره‌ی زیر آنکه درست است، ثابت کنید و آنکه نادرست است با یک مثال نقض رد کنید.

الف : در هر مثلث میانه‌ی وارد بر یک ضلع از ارتفاع نظیر همان ضلع بزرگتر است.

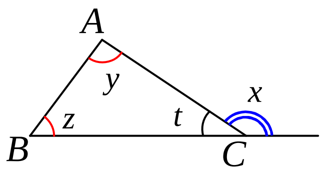
ب : در هر مثلث ، اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور آن است.

حل:

الف: این گزاره نادرست است، زیرا در مثلث متساوی الساقین[۴] میانه و ارتفاع وارد بر قاعده بر هم منطبق هستند و لذا با هم مساویند.



ب: این گزاره درست است. برای اثبات آن از تعریف زاویه‌ی خارجی و همچنین مجموع زاویه های داخلی استفاده می کنیم.



$$\left.\begin{array}{r} x+t=۱۸۰ \\ y+z+t=۱۸۰ \end{array}\right\} \rightarrow x+t=y+z+t \rightarrow x=y+z$$

***

مفهوم قضیه

هر گزاره‌ی درست و کلی که به کمک استدلال استنتاجی بدست می آید را **قضیه** می نامند.

مثال:

۱ : در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

۲ : مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۳ : در هر مثلث مجموع اندازه های هر دو ضلع از اندازه‌ی ضلع سوّم بزرگتر است.

۴ : برای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y همواره $\frac{x+y}{۲} \geq \sqrt{xy}$ است.

۵ : برای هر دو مجموعه‌ی A و B همواره $A-B=A\bigcap B'$

[۴] . در مثلث متساوی الاضلاع میانه و ارتفاع تمام اضلاع بر هم منطبق هستند.

هر قضیه را می توان به صورت یک گزاره‌ی مرکب (که به صورت ترکیب شرطی بیان می شود) نوشت.

بنابراین دارای دو قسمت می باشد:

الف) فرض (شرط) : آن قسمت از گزاره است که آن را می پذیریم.

ب) حکم (جواب شرط) : آن قسمت از گزاره است که باید درستی آن را نتیجه بگیریم.

بنابراین هر قضیه دارای الگویی به صورت زیر است.

قضیه : اگر .... آنگاه ....

فرض (p)　　　　حکم (q)

***

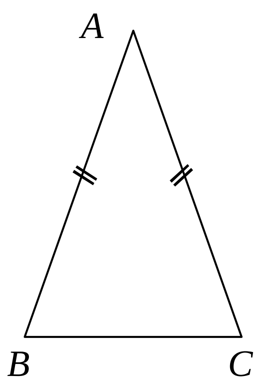
مثال : قضیه‌ی زیر را در نظر بگیرید.

قضیه : در هر مثلث متساوی‌الساقین ، دو زاویه‌ی مجاور به قاعده مساویند.

گرچه این قضیه به ظاهر گزاره شرطی نیست ولی می‌توان به سادگی آن را به شکل زیر نوشت.

اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد آنگاه دو زاویه‌ی مجاور به قاعده آن مساویند.

فرض　　　　حکم



فرض : $AB = AC$

حکم : $\angle B = \angle C$

تمرین ۲۱ : قضیه‌های زیر را به صورت شرطی بیان کنید و فرض و حکم آنها را مشخص کنید.

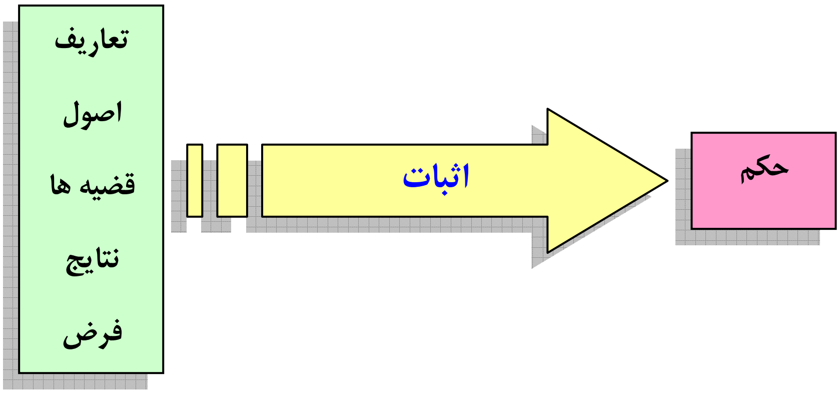
الف : هر دو زاویه‌ی متقابل به رأس مساویند.

ب : هر دو زاویه‌ی مساوی مکمل های مساوی دارند.

ج : مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

د : در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر است.

قضیه ها در ریاضی و هندسه باید اثبات شوند، به عبارتی دیگر برای درستی آنها باید استدلال کرد. هر حرکت مرحله به مرحله و منطقی که به کمک استدلال استنتاجی، منجر به رسیدن به حکم قضیه شود را اثبات قضیه گویند.



بدیهی است که تشخیص فرض و حکم هر قضیه برای اثبات آن قضیه مهم است. اوّلین گام در اثبات هر قضیه تعیین فرض و حکم آن است. آخرین مرحله در اثبات هر قضیه رسیدن به حکم آن است.

***

قضیه‌ی عکس: اگر جای فرض و حکم یک قضیه را جابجا کنیم، یک گزاره‌ی شرطی جدید بدست می آید که آن را عکس قضیه می نامیم. عکس قضیه، ممکن است درست و ممکن است نادرست باشد. درصورتی که عکس یک قضیه درست باشد، آن را قضیه‌ی عکس می نامند.

مثال :

قضیه : اگر مثلثی متساوی الساقین باشد،آنگاه در آن دو زاویه‌ی مجاور به قاعده مساویند.

قضیه‌ی عکس : اگر در مثلثی دو زاویه مساوی باشند،آنگاه آن مثلث متساوی الساقین است.

در مثال فوق عکس قضیه‌ی داده شده، درست است و لذا خود یک قضیه می باشد. در مثال زیر عکس قضیه درست نیست.

مثال:

قضیه : اگر دو زاویه متقابل به رأس باشند، آنگاه آن دو زاویه مساویند.

عکس قضیه : اگر دو زاویه مساوی باشند، آنگاه آن دو زاویه متقابل به رأس هستند.

تمرین۲۲ : عکس قضیه های زیر را بنویسید.

الف) اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند.

ب) اگر دوضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع های وارد بر این دو ضلع باهم برابرند.

❋❋❋

قضیه‌ی دو شرطی : اگر عکس یک قضیه‌ی شرطی خود یک قضیه‌ی شرطی باشد. به کمک یکی از الگو های زیر می توان آن دو قضیه را ترکیب کرد و به صورت یک قضیه بیان نمود. این قضیه را قضیه‌ی دو شرطی می نامند.

- ❋ اگر p آنگاه q و برعکس
- ❋ p اگر و تنها اگر q
- ❋ p شرط لازم و کافی است برای q

مثال :

قضیه: اگر مثلثی قائم الزاویه باشد،آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است.

قضیه‌ی عکس : اگر در مثلثی مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد، آنگاه آن مثلث قائم الزاویه است.

قضیه‌ی دو شرطی:

- ❋ اگر مثلثی قائم الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است و برعکس.
- ❋ مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر باشد.
- ❋ قائم الزاویه بودن مثلث شرط لازم وکافی است برای اینکه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد.

تمرین برای حل : قضیه های زیر را در نظر بگیرید. سپس :

الف : عکس هر کدام را بنویسید.

ب : با ترکیب قضیه و عکس آن یک قضیه‌ی دو شرطی بیان کنید.

۲۳ : در هر مثلث ، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه‌ی روبرو به آنها نیز برابرند.

۲۴ : اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

۲۵ : در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

۲۶ : اگر دو دایره شعاع های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت های آنها نیز برابر هستند.

توجه : برای اثبات یک قضیه‌ی دوشرطی باید قضیه های تشکیل دهنده‌ی آن را جداگانه ثابت کرد. یعنی ابتدا فرض و حکم را تعیین می کنیم و قضیه را ثابت می کنیم. سپس با جابجا کردن فرض و حکم قضیه‌ی عکس را نیز اثبات کرد.

***

عکس نقیض یک قضیه : اگر فرض و حکم قضیه ای را جابجا و نقیض کنیم،گزاره‌ی حاصل همواره درست خواهد بود. این گزاره را قضیه‌ی عکس نقیض می نامند.

مثال :

قضیه: اگر مثلثی قائم الزاویه باشد،آنگاه مربع وتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن برابر است.

قضیه‌ی عکس نقیض : اگر در مثلثی مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر نباشد، آنگاه آن مثلث قائم الزاویه نیست.

توجه: اثبات یک قضیه به معنی اثبات عکس نقیض آن می باشد و ضرورتی به اثبات عکس نقیض آن نیست.

***

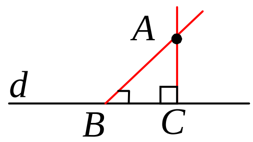
برهان خلف (اثبات غیر مستقیم)

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه نشان می دهیم که خلاف حکم آن درست نیست و سپس نتیجه می گیریم با این شرایط خود حکم درست است. این روش استدلال که نوعی استدلال استنتاجی است را برهان خلف یا اثبات غیر مستقیم می نامند.

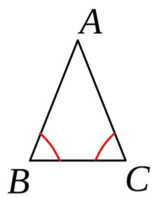
روند کار در این روش بدین ترتیب است که ابتدا خلاف حکم را تشکیل می دهیم و آن را فرض خلف می نامیم، سپس استدلال خود را با تکیه بر این فرض ادامه می دهیم. در نهایت به خلاف فرض یا یک قضیه

ی اثبات شده‌ی قبلی یا خلاف یک اصل (حقیقت) می رسیم. در آخر فرض خلف را باطل می کنیم و خود حکم رامی پذیریم.

مثال ۱ : ثابت کنید که، از یک نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست نمی توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.



اثبات به روش برهان خلف : فرض می کنیم که این حکم نادرست است و از یک نقطه‌ی دلخواه مانند A واقع بر خارج خط d می توان دو عمود بر آن رسم کرد. در این صورت یک مثلث تشکیل می شود که دو زاویه‌ی قائمه دارد. لذا مجموع زاویه های داخلی این مثلث بیش از ۱۸۰ درجه خواهد شد و این غیر ممکن است. پس فرض خلف نمی تواند درست باشد و حکم درست است.

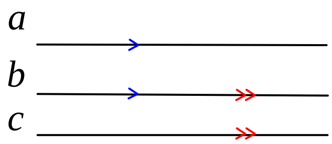


مثال ۲ : ثابت کنید که، اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ آنگاه $\angle B \neq \angle C$

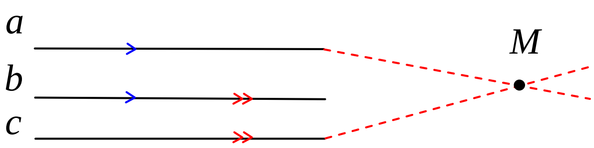
اثبات: (به روش برهان خلف) فرض کنیم که $\angle B = \angle C$ باشد. یعنی مثلث ABC دو زاویه‌ی مساوی دارد. بنابراین مثلث متساوی الساقین است. لذا $AB = AC$ و این خلاف فرض می باشد و نمی تواند درست باشد.

تمرین ۲۷ : ثابت کنید که هر دو خط که با خط سوّمی موازی باشند، خود با هم موازیند.

اثبات : در این مسئله از اینکه $b \| c$ و $a \| b$ می خواهیم ثابت کنیم. $a \| c$



برای اثبات به روش برهان خلف عمل می کنیم. فرض کنیم که خط a موازی c نباشد. لذا این دو خط همدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کنند، در این صورت از نقطه‌ی M دو خط موازی b رسم شده است و این خلاف اصل توازی اقلیدس می باشد، پس $a \| c$



***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

درس دوّم : مفاهیم مقدماتی هندسه ی دبیرستانی

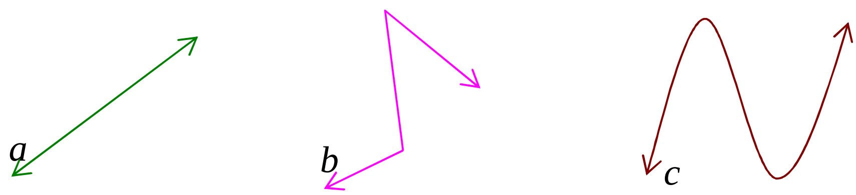
در این نوشتار ، جهت درک بهتر و کاملتر مفاهیم اساسی هندسه‌ی دبیرستانی، برخی مفاهیم اوّلیه را معرفی می کنیم. گرچه در ابتدا برخی مفاهیم را به صورت غیررسمی معرفی کرده ایم و از ناحیه‌ی برخی از صاحبنظران ممکن این نحوه‌ی بیان پذیرفتنی نباشد ولی به جهت ضرورت آشنایی اوّلیه و تقریب مفهوم به ذهن، بدین شکل اقدام گردید. لذا در ابتدا بدین نحوه مفاهیم را بیشتر اشاره و تعریف نمی کنیم.

***

نقطه : اثر قلم روی کاغذ را نقطه می نامیم. هر نقطه با یک حرف بزرگ الفبای لاتین نام گذاری می کنند.

***

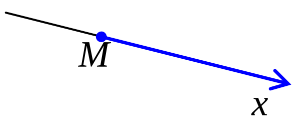
خط : مجموعه‌ی نقاط به هم پیوسته را خط می نامند. خط می تواند مستقیم (خط راست)، شکسته یا خمیده (منحنی) باشد و از هر طرف نامحدود است.



خط راست　　　خط شکسته　　　خط خمیده

هر خط با یک حرف کوچک الفبای لاتین نامگذاری می کنند. در این جزوه هر جا صحبت از خط شود، منظور همان خط راست است.

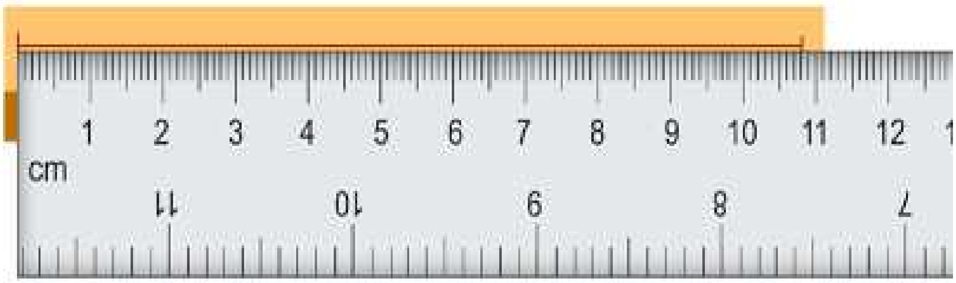
اگر روی خط نقطه‌ی در نظر گرفته شود، نیم خط به دست می آید. مانند نیم خط Mx در شکل زیر



اگر روی خط دو نقطه در نظر بگیریم در این صورت آن قسمت از خط که به آن دو نقطه محدود باشد را پاره خط می نامند. مانند پاره خط AB در شکل زیر

تمرین ۱ : با پنج نقطه غیر واقع بر یک خط راست چند پاره خط ایجاد می شود؟ تعداد آنها را به دست آورید.

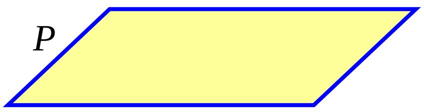
واحد اندازه گیری پاره خط : هر پاره خط را با واحد های معمول اندازه ی گیری طول مانند، میلی متر ، سانتی متر ، متر اندازه گیری می کنند. طول پاره خط AB را فاصله ی دو نقطه ی A و B می نامند. اگر طول پاره خط AB برابر عدد غیر منفی a باشد. در این صورت می نویسند: $m(AB) = a$



خط کش: وسیله ای برای رسم و اندازه گیری پاره خط

***

صفحه : مجموعه‌ی نقاط بهم پیوسته را صفحه می نامند. در واقع هر صفحه کاملاً صاف بوده و دارای خمیدگی و فرورفتگی، شکستگی و یا تیزی نمی باشد. هر صفحه از هر طرف نامحدود است و معمولاً آن را با یک حرف بزرگ الفبای لاتین نامگذاری می کنند. مانند صفحه‌ی P در شکل زیر

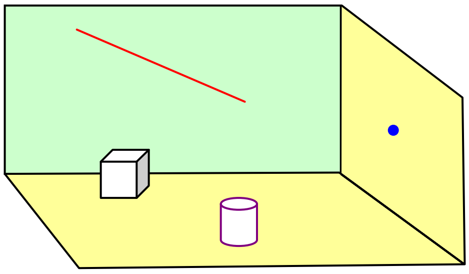


***

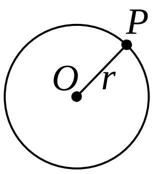
فضا :

در هندسه مسطحه خط یک مفهوم یک بعدی است ، اشکالی مانند مربع ، دایره ، مثلث و ... نیز وجود دارند که فقط دو بعد دارند، زمانی به اجسام یا به عبارتی دیگر اشکال سه بعدی چون مکعب‌ها، استوانه‌ها، مخروط‌ها، کره‌ها و .... سروکار داشته باشیم ، مفهوم فضا مطرح می شود ، فضا مفهومی است که دارای سه بعد می باشد. موضوع هندسهٔ فضایی، مطالعهٔ اشکال هندسی سه بعدی است. محیطی که در آن زندگی می کنیم، مدلی از فضای سه بعدی یا به عبارت کوتاه تر فضا است.فضا مانند نقطه و خط و صفحه یک اصطلاح

تعریف نشده است. در واقع فضای سه بعدی مجموعه ای از بی نهایت نقطه است که خط وصفحه زیر مجموعه ای از نقاط آن به حساب می آیند.



***



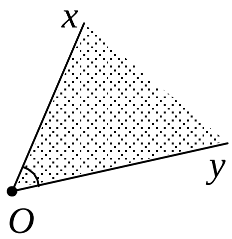
دایره : مجموعه‌ی نقاطی از صفحه که از یک نقطه‌ی ثابت به یک فاصله باشند را دایره می نامند.این نقطه‌ی ثابت را مرکز و فاصله‌ی ثابت را شعاع می نامند. در شکل مقابل نقطه‌ی O مرکز و اندازه‌ی پاره خط OP ، شعاع دایره است. در این صورت می نویسند. $m(OP)=r$

پرگار: وسیله ای برای رسم دایره با شعاع مشخص

تمرین۲ : دایره‌ای به مرکز دلخواه و شعاع ۵ سانتی متر رسم کنید. تمامی نقاط روی دایره چه ویژگی دارند؟

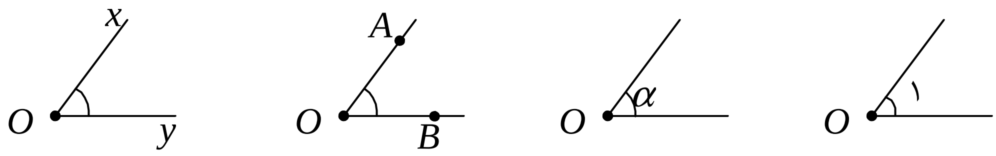
***

زاویه



زاویه یا گوشه یکی از مفاهیم هندسه است و به ناحیه‌ای از صفحه گفته می‌شود که بین دونیم‌خط که سر مشترک دارند محصور شده‌است. به سر مشترک این دو نیم‌خط رأس زاویه و به هر یک از این نیم خط ، ضلع زاویه می‌گویند.

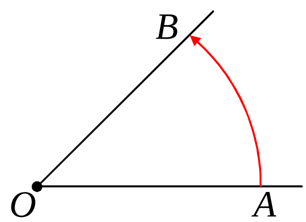
زاویه را به صورت های مختلف نامگذاری می کنند. رایج ترین روشهای نامگذاری زاویه به صورت زیر می باشند.



زاویه ی O_1 زاویه ی α زاویه ی AOB زاویه ی xOy

و با استفاده ی از علائم ریاضی می نویسند.

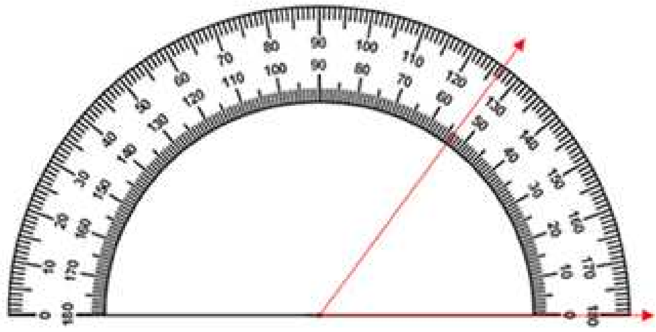
$$x\hat{O}y \text{ یا } \angle(xOy)$$



اگر نقطه‌ی A را حول نقطه‌ی O دوران دهیم تا نقطه‌ی B بدست آید. در این صورت زاویه‌ی AOB به دست می آید. بدیهی است که اگر نقطه‌ی A را به اندازه‌ی یک دور کامل دوران دهیم به محل اولیه‌ی خود بر می گردد. این حالت را دوران کامل می نامند. بزرگی یک زاویه ، مقدار چرخشی (دورانی) است که دو نیم‌خط از گوشه‌ی زاویه نسبت به یکدیگر دارند، با بدست آوردن طول کمانی تولید شده در اثر چرخش می‌توان اندازه‌ی زاویه را بدست آورد.

واحد اندازه گیری زاویه : برای اندازه‌ی گیری زاویه از واحد های مختلفی استفاده‌ی می شود. یکی از این واحدها، درجه است. یک درجه زاویه ای است که اندازه‌ی آن برابر $\frac{۱}{۳۶۰}$ دوران کامل است.

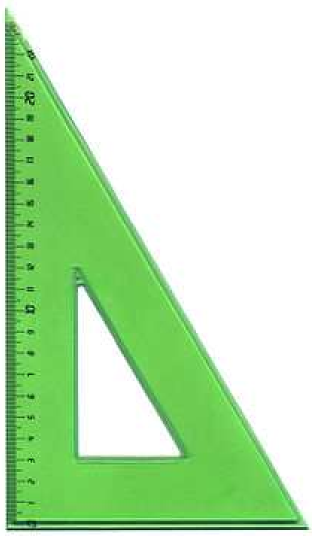
اگر نقطه‌ی A دوران داده نشود، زاویه صفر می باشد. اگر نقطه‌ی A را به اندازه‌ی یک دور کامل دوران دهیم به محل اولیه‌ی خود بر می گردد. یک دوران کامل زاویه ای برابر ۳۶۰ درجه تشکیل می دهد.



نقاله: وسیله ای برای رسم و اندازه گیری زاویه برحسب درجه

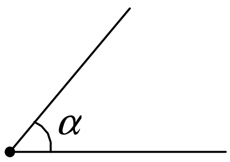
***

انواع زاویه در هندسه : بر حسب اندازه ، زاویه ها را به انواع مختلفی نامبرده می شوند.



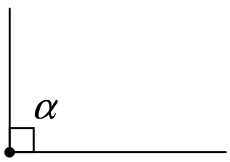
گونیا: وسیله ای برای رسم زاویه قائمه

زاویه‌ی حاده (تند) : زاویه ای است که انـدازه‌ی آن کمتـر از ۹۰ درجه باشد.



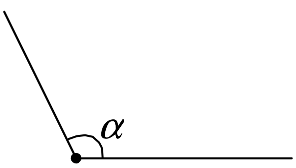
$m(\angle\alpha) < ۹۰^\circ$

زاویه‌ی قائمه (راست) : زاویه ای است که اندازه‌ی آن ۹۰ درجه باشد.



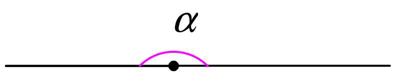
$m(\angle\alpha) = ۹۰^\circ$

زاویه‌ی منفرجه (باز) : زاویه ای است که اندازه‌ی آن بین ۹۰ و ۱۸۰ درجه باشد.



$۹۰^\circ < m(\angle\alpha) < ۱۸۰^\circ$

زاویه‌ی نیم صفحه : زاویه ای است که اندازه‌ی آن ۱۸۰ درجه باشد. به عبارت دیگر اضلاع زاویه ی نیم صفحه در امتداد همدیگر می باشند.

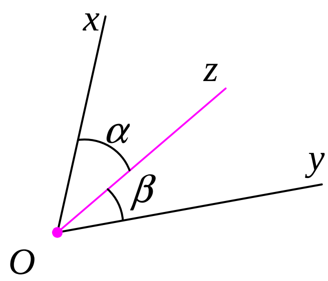


$$m(\angle\alpha)=۱۸۰^{\circ}$$

اصل زاویه‌ی نیم صفحه : هر طرف یک خط راست یک زاویه‌ی نیم صفحه است و اگر یک طرف خطی یک زاویه‌ی نیم صفحه باشد، آن خط یک خط راست است.

***

نیمساز زاویه : نیمساز زاویه نیم خطی است که از رأس زاویه بگذرد و آن را به دو زاویه با اندازه های مساوی تقسیم می کند.

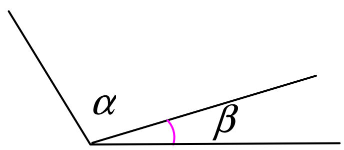


Oz نیمساز زاویه ی xoy است. $\leftrightarrow m(\angle\alpha)=m(\angle\beta)$

***

زاویه های مجاور

دو زاویه را مجاور گویند، هرگاه رأس های آنها روی هم منطبق بوده و یک ضلع مشترک داشته باشند. مانند دو زاویه α و β در شکل مقابل



***

زاویه های متمم و مکمل

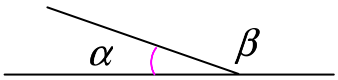
دو زاویه را متمم گویند، هرگاه مجموع اندازه‌های آنها ۹۰ درجه باشد.

دو زاویه را مکمل گویند، هرگاه مجموع اندازه‌های آنها ۱۸۰ درجه باشد.

***

زاویه های مجانب

اگر دو زاویه‌ی مجاور ، مکمل همدیگر باشند، آنها را مجانب گویند.



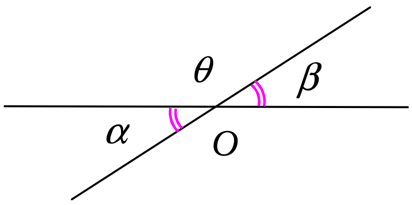
مانند دو زاویه α و β در شکل مقابل

تمرین۳ : ثابت کنید که هر دو زاویه ی مجانب و مساوی، قائمه اند.

❋❋❋

زاویه های متقابل به رأس

دو زاویه مقابل حاصل از دو خط متقاطع را دو زاویه ی متقابل به رأس می‌نامند. مانند زاویه‌های β و α در شکل زیر:



نتیجه : دو زاویه ی متقابل به رأس در یک رأس مشترک بوده و اضلاع آنها در امتداد همدیگر می‌باشند.

❋❋❋

قضیه : هر دو زاویه‌ی متقابل به رأس مساویند.

حکم : $\angle\alpha = \angle\beta$

اثبات : با توجه به شکل فوق داریم :

$$\left.\begin{array}{l} \angle\alpha + \angle\theta = ۱۸۰^\circ \\ \angle\beta + \angle\theta = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \rightarrow \angle\alpha + \angle\theta = \angle\beta + \angle\theta \rightarrow \angle\alpha = \angle\beta$$

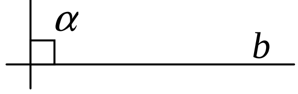
تمرین۴ : ثابت کنید که نیمساز های هر دو زاویه ی متقابل به رأس بر یک امتدادند.

اصل دو زاویه‌ی قائمه : اگر مجموع دو زاویه‌ی مجاور و مساوی۱۸۰ درجه باشد، آن دو زاویه قائمه هستند.

❋❋❋

دو خط عمود برهم

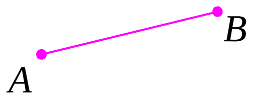
دو خط را متعامد یا عمود بر هم می نامند، هرگاه زاویه‌ی بین آنها ۹۰ درجه باشد.



$m(\angle\alpha = ۹۰^\circ) \leftrightarrow a \perp b$

تمرین۵ : ثابت کنید که نیمساز های دو زاویه‌ی مجانب بر هم عمودند.

فاصله‌ی بین دو نقطه

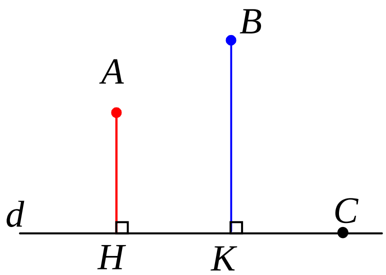


فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی متمایز ، برابر با طول پاره خطی تعریف می شود که آن دو نقطه را به هم وصل می کند.

اگر دو نقطه بر هم منطبق باشند، فاصله‌ی بین آنها برابر صفر تعریف می شود.

❋❋❋

فاصله‌ی نقطه تا خط



فاصله‌ی نقطه‌ی خارج یک خط تا همان خط، برابر اندازه‌ی پاره‌خطی تعریف می‌کنند که از نقطه‌ی مورد نظر بر خط عمود شود و بین آن نقطه و پای عمود محصور باشد.

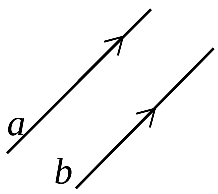
تذکر : فاصله‌ی نقطه‌ی روی خط تا همان خط برابر صفر است.

اصل ۵ : از هر نقطه‌ی روی خط (یا بیرون آن) فقط یک خط عمود برآن می توان رسم کرد.

❋❋❋

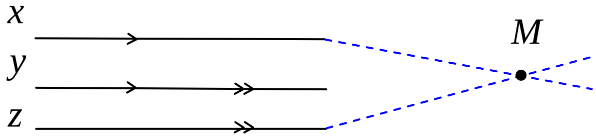
دو خط موازی

دو خط را موازی گویند ، هرگاه هیچ نقطه‌ی مشترک نداشته باشند.[۱]



$a \parallel b$

قضیه : هر دو خط که با خط سومی موازی باشند، خود با هم موازیند.



فرض : $x \parallel y$ و $y \parallel z$

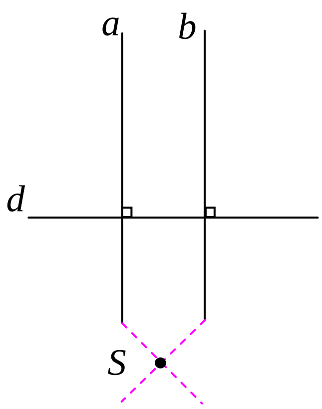
حکم : $x \parallel z$

اثبات: (به روش برهان خلف) ، گیریم که خط x موازی z نباشد. لذا همدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کنند، در این صورت از نقطه‌ی M دو خط موازی y رسم شده است و این خلاف اصل توازی اقلیدس می باشد، پس $x \parallel z$

❋❋❋

[1] . در صفحه اگر دو خط موازی نباشند، متقاطع هستند.

قضیه : در هر صفحه دو خط عمود بر یک خط موازی یکدیگرند.



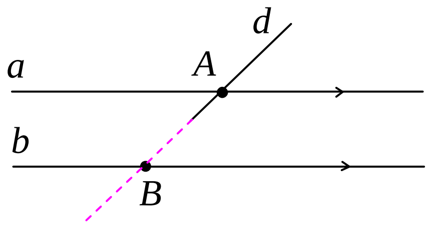
فرض : $a \perp d$ و $b \perp d$

حکم : $a \parallel b$

اثبات : (به روش برهان خلف)، فرض کنیم که $a \parallel b$ نباشد، پس b و a همدیگر را در نقطه‌ای مانند S قطع می‌کنند و لذا از یک نقطه دو خط بر d عمود شده است و این خلاف اصل تعامد اقلیدس است. پس $a \parallel b$

***

قضیه : اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.



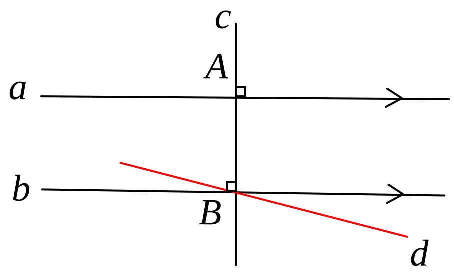
حکم : خط d خط b را قطع می کند.

اثبات : اگر خط d خط b را قطع نکند. پس با آن موازی است (به روش برهان خلف) و لذا از نقطه ی A دو خط موازی b رسم شده است و این ممکن نیست.

***

قضیه : ثابت کنید که، اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد ، بر دیگری نیز عمود است.

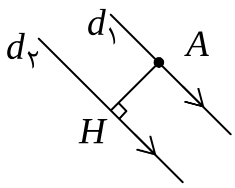
فرض : $a \parallel b$ و $c \perp a$ حکم : $c \perp b$



اثبات: گیریم که $a \parallel b$ و $c \perp a$ است ولی c بر b عمود نباشد.(به روش برهان خلف) پس از نقطه‌ی B خط دیگری مانند d چنان رسم می‌کنیم که بر c عمود باشد طبق قضیه‌ی قبل d نیز موازی a است ، یعنی از نقطه‌ی B دو خط موازی a رسم شده است و این ممکن نیست و لذا $c \perp b$

***

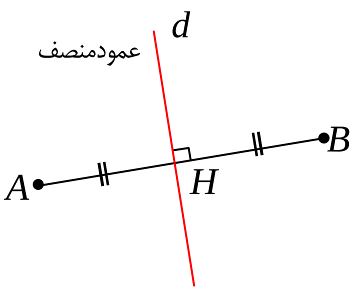
فاصله‌ی دو خط موازی



فاصله‌ی بین دو خط موازی اندازه ی پاره خطی است که از هر نقطه‌ی واقع بر یکی بر دیگری عمود شود.در شکل مقابل اگر $d_۱ \| d_۲$ پس AH فاصله‌ی بین این دو خط است.

***

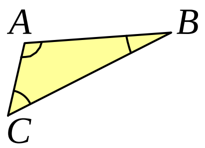
عمود منصف یک پاره خط



هر خط که هم از نقطه‌ی وسط یک پاره خط بگذرد و هم عمود بر آن باشد را عمود منصف آن پاره خط می‌نامند.

***

مثلث

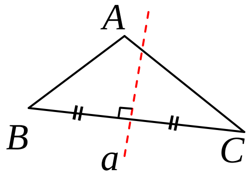


هرگاه سه نقطه‌ی غیر واقع در یک خط راست را دو به دو با سه پاره خـط بـه هـم وصل کنیم، مثلث بوجود می آید. هر یک از این سه نقطه را رأس و هر یک از این پاره خط ها را ضلع مثلث می گویند. مثلث از اساسی ترین اشکال در هندسـه مـی باشد. یک مثلث دارای سه رأس است که سه ضلع این رئوس را به هم وصل می کند. لذا هر مثلث دارای سه رأس ، سه زاویه و سه ضلع است . اضلاع و زاویه های هر مثلث را اجزای اصلی مثلث می نامند.

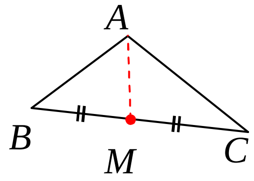
***

اجزای فرعی مثلث

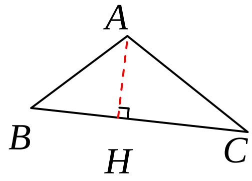
برای هر ضلع مثلث می توان یک عمود منصف و برای هر زاویه ی مثلث می توان یک نیمـساز رسـم کـرد، همچنین می توان از هر رأس مثلث بر ضلع مقابل یا امتداد آن یک عمود رسم کرد. این پـاره خـط عمـود را ارتفاع می نامند.اگر وسط ضلع مثلثی را به رأس مقابل آن وصل کنیم، پاره خط بدست آمده را میانه می نامند. عمود منصف های اضلاع مثلث ، میانه های وارد بر هر ضلع ، نیمساز هر زاویه و ارتفاع های مثلث را اجـزای فرعی مثلث می نامند.



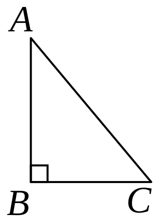
شکل (۱)



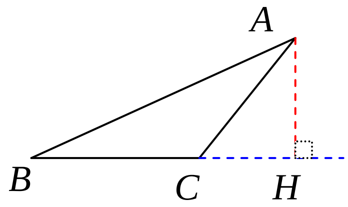
شکل (۲)



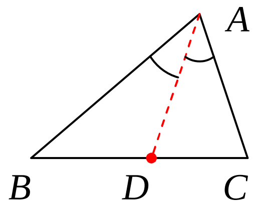
شکل (۳)



شکل (۴)



شکل (۵)

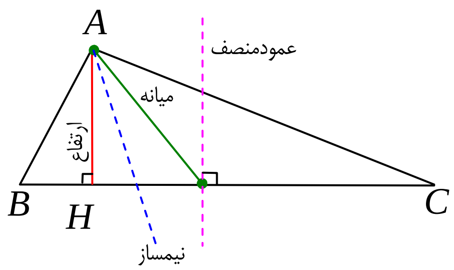


شکل (۶)

در شکل (۱) خط a عمود منصف ضلع BC، در شکل (۲) AM میانه‌ی وارد بر ضلع BC، در شکل (۳) ارتفاع وارد بر ضلع BC، در شکل (۴) AB ارتفاع وارد بر BC، در شکل (۵) AH ارتفاع وارد بر امتداد ضلع BC و در شکل (۶) AD نیمساز زاویه‌ی A محسوب می شوند. در هر مثلث ضلعی که ارتفاع بر آن یا امتداد آن عمود شده باشد را قاعده‌ی مثلث می نامند. مثلاً در شکل های ۴ و ۵ و ۶ ضلع BC قاعده‌ی مثلث می باشند. در شکل ۴ می توانیم ضلع BC را ارتفاع و ضلع AB را قاعده فرض کنیم.

توجه داشته باشید که یک ضلع مثلث می تواند بر ضلع دیگر عمود باشد (مانند شکل۴) و لذا ارتفاع محسوب می شود. همچنین مانند شکل ۵ ممکن است ارتفاع مثلث بر امتداد یک ضلع مثلث عمود باشد. بعد ها خواهیم دید که ممکن است عمود منصف یک ضلع، نیمساز زاویه ی مقابل به آن ضلع ، میانه ی و ارتفاع وارد بر آن ضلع مثلث بر هم منطق شوند.

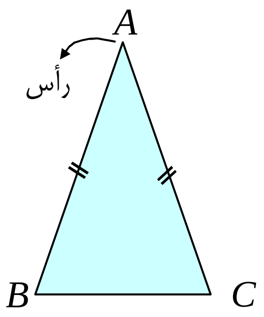
در مثلث ABC شکل زیر، عمود منصف ضلع BC، میانه‌ی وارد بر ضلع BC، ارتفاع نظیر رأس A و همچنین نیمساز زاویه‌ی A رسم شده‌اند.



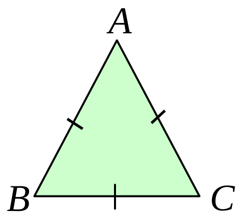
***

انواع مثلث

مثلث ها را با توجه به اندازه‌ی اضلاع یا زاویه های آن به چند نوع تقسیم بندی می کنند. مهمترین انواع این مثلث ها عبارتند از :

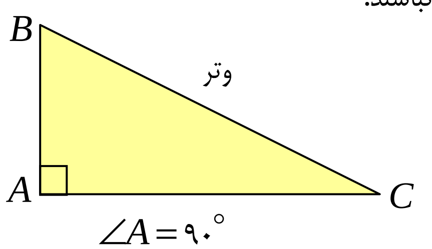


۱ : مثلث متساوی الساقین : مثلثی که دو ضلع مســـــاوی داشته باشد. دو ضلع مساوی را ساق و ضلع سوم را قاعده می‌نامند. رأس مقابل به قاعده را رأس مثلث می‌نامند.



۲ : مثلث متساوی الاضلاع : مثلثی که سه ضلع آن برابرند.

۳ : مثلث مختلف الاضلاع : مثلثی است که اضلاع آن هم اندازه نباشند.



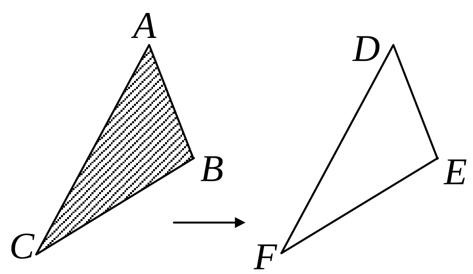
۴ : مثلث قائم الزاویه : مثلثی که یک زاویه قائمه داشته باشد. ضلع مقابل به زاویه قائمه را وتر می‌نامند.

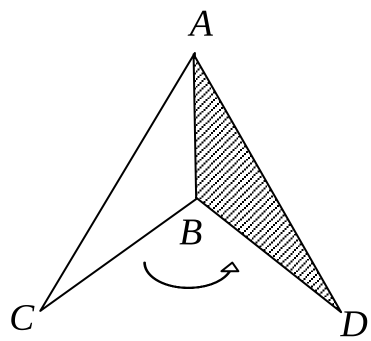
نتیجه : هر مثلث متساوی‌الاضلاع، متساوی الساقین است.

***

هم نهشتی دو مثلث

دو مثلث را هم نهشت گویند ، هرگاه بدون تغییر آنها بر یکدیگر قابل انطباق باشند. اگر با انتقال یک مثلث ABC یا با چرخاندن آن بتوان آن را بر مثلث DEF منطبق کرد، می گویند این دو مثلث هم نهشت هستند و می نویسند $\Delta(ABC) \cong \Delta(DEF)$





توجه داشته باشید که بنابر بر اصل معروف به اصل تغییر ناپذیری هر شکل هندسی ضمن جا به جا شدن تغییر نمی‌کند.

نتیجه : اگر دو مثلث همنهشت باشند، آنگاه

الف) تمام اضلاع و زاویه‌های متناظر آنها مساویند.   ب) مساحت و محیط هر دو نیز مساوی است.

***

حالت های همنهشتی دو مثلث

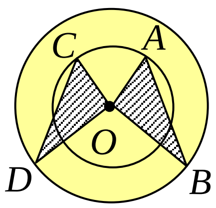
اساسی ترین راه برای تعیین همنهشتی دو مثلث ، انطباق آنها است. اگر چه این روش بسیار ابتدایی و ساده می نماید، اما یک راه حل عملی و مفید نیست و استفاده از حالت های همنهشتی[۲] دو مثلث ساده تر است. لذا می توان اصول زیر برای تعیین همنهشتی مثلث ها را بیان کرد.

اصل ۱) هر گاه دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها از یک مثلث با دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها از مثلث دیگری مساوی باشند،آن دو مثلث همنهشت هستند. (اصل ض‌ز‌ض).

اصل ۲) هر گاه دو زاویه و ضلع بین آنها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلث دیگری مساوی باشند،آن دو مثلث همنهشت هستند. (اصل ز‌ض‌ز).

اصل ۳) هر گاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگری مساوی باشند،آن دو مثلث همنهشت هستند. (اصل ض‌ض‌ض).

تمرین ۶ : در دو دایره‌ی هم مرکز شکل مقابل $AB = CD$. ثابت کنید که $\angle AOB = \angle COD$.



***

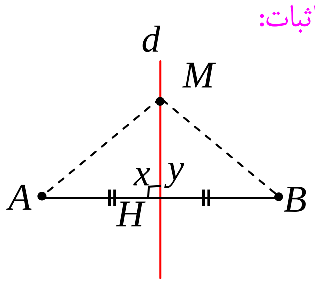
[2] . این اصول را برای تعیین همنهشتی هر دو مثلث ، می توان بکار برد. به همین دلیل آنها را حالت های عمومی همنهشتی دو مثلث می نامند. بعدها خواهیم دید که دو حالت دیگر تحت عنوان، تساوی وتر و یک ضلع و تساوی وتر و یک زاویه حاده را فقط برای مثلث قائم الزاویه می توان استفاده کرد. این دو حالت را حالت های اختصاصی همنهشتی مثلث های قائم الزاویه می نامند.

ویژگی های عمود منصف یک پاره خط

ویژگی های عمود منصف یک پاره خط را در قالب قضیه های زیر بیان می کنیم.

قضیه : هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط قرار دارد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

اثبات:

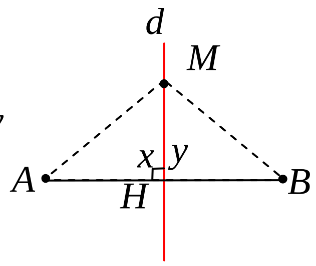


$$\left.\begin{array}{ll} MH = MH & \text{مشترک} \\ \angle x = \angle y = ۹۰^\circ & \\ AH = BH & \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{AMH} \underset{\text{(ض‌زض)}}{\cong} \overset{\Delta}{BMH} \rightarrow MA = MB$$

***

قضیه : اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد،آن نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.

اثبات : از نقطه‌ی M خطی چنان رسم می‌کنیم که از نقطه ی وسط پاره‌خط AB بگذرد. پس:



$$\left.\begin{array}{ll} MA = MB & \text{طبق فرض} \\ MH = MH & \text{مشترک} \\ AH = BH & \end{array}\right\} \rightarrow \overset{\Delta}{AMH} \underset{\text{(ض ض ض)}}{\cong} \overset{\Delta}{BMH} \rightarrow \angle x = \angle y$$

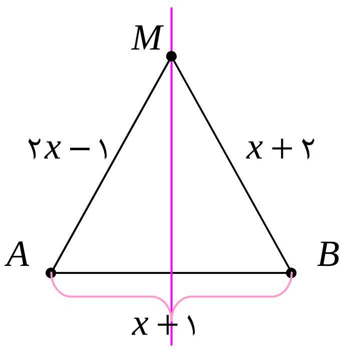
از طرفی طبق اصل زاویه‌ی نیم صفحه، واضح است که $\angle x + \angle y = ۱۸۰^\circ$ پس:

$$\angle x = \angle y = ۹۰^\circ \rightarrow d \perp AB$$

و چون $AH = BH$ و $d \perp AB$ پس d عمود منصف AB است.

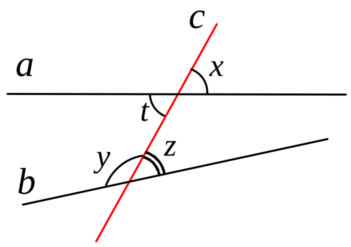
***

تمرین۷ : در شکل مقابل خط d عمود منصف پاره خط AB است. محیط مثلث ABM را تعیین کنید.



خط‌های مورب

هرگاه دو خط را خط سومی قطع کند، این خط را مورب (قاطع) گویند.

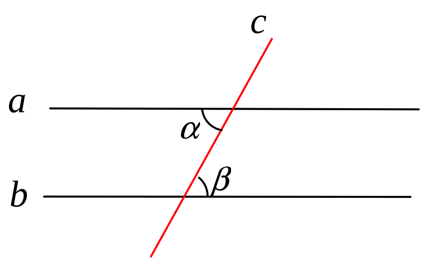


همچنین :

۱ : هر دو زاویه که در یک طرف خط مورب واقع باشند را متقابل گویند. مانند زاویه های (z و x) یا زاویه های (y و t)

۲ : هر دو زاویه که در دو طرف خط مورب واقع باشند را متبادل گویند. مانند زاویه های (t و x) یا زاویه های (z و t)

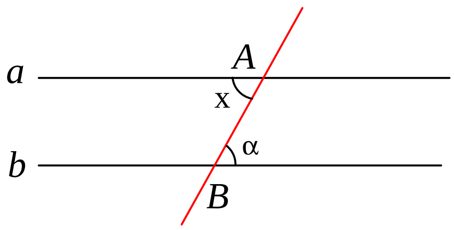
۳ : هر زاویه که بین دو خط قطع شده قرار گرفته باشد داخلی و در غیر این صورت خارجی گویند. برای مثال زاویه ی x خارجی و زاویه های t و z و y داخلی می باشند.



قضیه : (**قضیه‌ی خطوط موازی**[۳]):اگر دو خط موازی را خط سومی قطع کند، زاویه‌های متبادل داخلی مساوی به دست می‌آید.

فرض : $a \parallel b$ حکم : $\angle\alpha = \angle\beta$

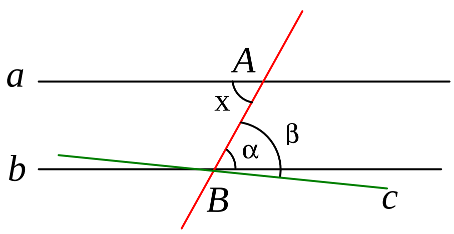
***



قضیه : اگر دو خط را خط سومی قطع کند و دو زاویه ی متبادل داخلی متساوی باشند، آن دو خط موازی یکدیگرند.

فرض : $\angle x = \angle\alpha$ حکم : $a \parallel b$

اثبات (به روش برهان خلف) : گیریم که $a \parallel b$ نباشد. پس از نقطه‌ی B خط c را موازی a رسم می‌کنیم و



لذا می‌توان نوشت: $\angle x = \angle\beta$

از طرفی طبق فرض داشتیم $\angle x = \angle\alpha$ لذا $\angle\alpha = \angle\beta$

این وقتی ممکن است که خط c باید روی b واقع باشد. پس

$a \parallel b$

---

[3] . به دلیل پیچیدگی های موجود در اثبات این قضیه، فعلاً آن را بدون اثبات می پذیریم.

نتیجه : اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، در این صورت :

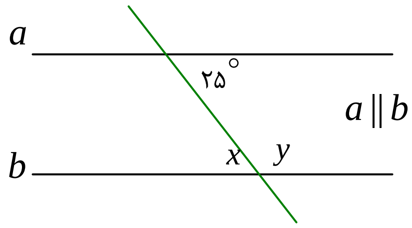
۱ : تمام زاویه‌های حاده با یکدیگر مساویند.

۲ : تمام زاویه‌های منفرجه با یکدیگر مساویند.

۳ : یک زاویه‌ی منفرجه و یک زاویه‌ی حاده مکمل یکدیگرند.

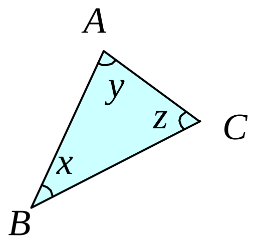
***

تمرین ۸ : با توجه به شکل مقابل مقدار x و y را تعیین کنید.



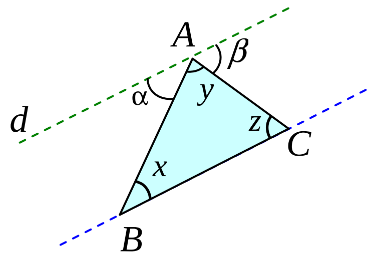
***

قضیه : مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.



حکم : $\angle x + \angle y + \angle z = ۱۸۰^\circ$

اثبات : از رأس A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم.آنگاه داریم :



$d \parallel BC \rightarrow \angle x = \angle \alpha$ و AB مورب

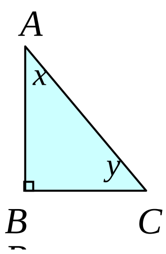
$d \parallel BC \rightarrow \angle z = \angle \beta$ و AC مورب

از طرفی بنا بر اصل زاویه نیم صفحه می‌توان نوشت:

$$\angle \alpha + \angle y + \angle \beta = ۱۸۰^\circ \rightarrow \angle x + \angle y + \angle z = ۱۸۰^\circ$$

***

نتیجه : در هر مثلث قائم‌الزاویه دو زاویه‌ی حاده ، متمم یکدیگرند.



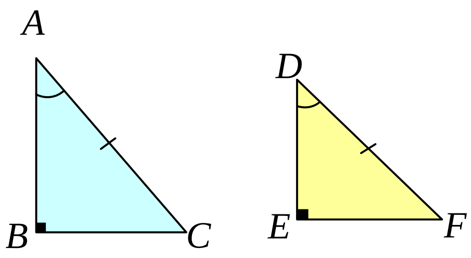
$$\angle x + \angle y = ۹۰^\circ$$

***

قضیه : هرگاه وتر و یک زاویه‌ی حاده از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک زاویه‌ی حاده از مثلث قائم‌الزاویه ی دیگری مساوی باشند،آن دو مثلث همنهشت هستند.

فرض : $AC = DF$ و $\angle A = \angle D$

حکم : $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$



اثبات : طبق قضیه‌ی قبل چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است، پس $\angle C = \angle F$.

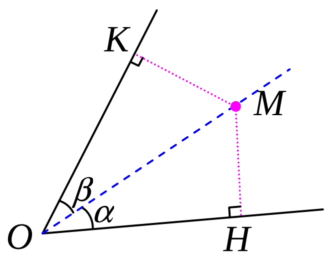
حال داریم:

$$\left.\begin{aligned} \angle C &= \angle F \\ AC &= DF \\ \angle A &= \angle D \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{DEF}$$

***

قضیه : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه ، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

حکم : $MK = MH$

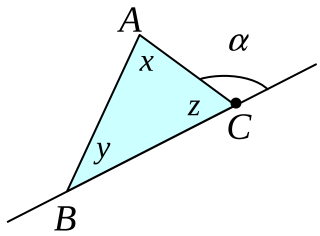


اثبات : دو مثلث $\overset{\Delta}{OHM}$ و $\overset{\Delta}{OKM}$ قائم‌الزاویه هستند. پس :

$$\left.\begin{aligned} \angle\alpha &= \angle\beta \\ OM &= OM \ \text{وتر مشترک} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{(وتر و یک زاویه‌ی حاده)}]{} \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK} \rightarrow MH = MK$$

***

زاویه‌ی خارجی مثلث



زاویه‌ی خارجی زاویه‌ای است که بین یک ضلع و امتداد ضلع دیگر مثلث باشد. مانند زاویه‌ی α در شکل مقابل

بدیهی است که هر زاویه‌ی خارجی و زاویه‌ی داخلی مجاور آن، مکمل یکدیگرند.

$$\angle z+\angle \alpha = ۱۸۰^\circ$$

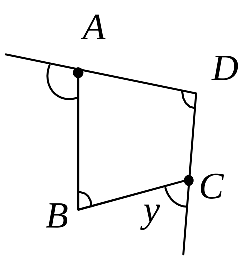
قضیه : در هر مثلث هر زاویه‌ی خارجی با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاورآن برابر است.

حکم : $\angle \alpha = \angle x + \angle y$

اثبات : با توجه به شکل فوق داریم :

$$\left.\begin{array}{r}\angle z+\angle \alpha = ۱۸۰^\circ \\ \angle x+\angle y+\angle z = ۱۸۰^\circ\end{array}\right\} \rightarrow \angle z+\angle \alpha = \angle x+\angle y+\angle z \rightarrow \angle \alpha = \angle x+\angle y$$

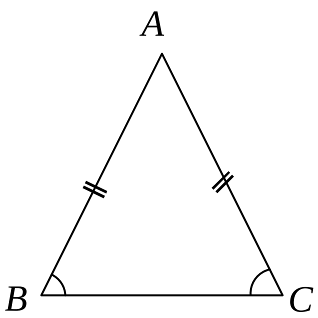
تمرین ۹ : با توجه به شکل مقابل درستی رابطه‌ی زیر را نشان دهید.



$$\angle x+\angle y = \angle B+\angle D$$

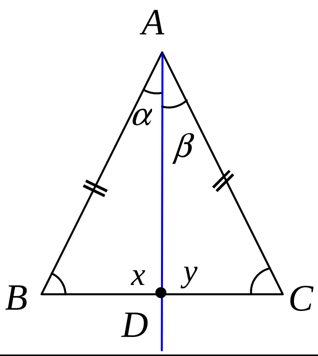
تمرین ۱۰ : ثابت کنید که مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث ۳۶۰ درجه است.

قضیه : در هر مثلث متساوی‌الساقین، زاویه های روبرو به اضلاع مساوی با یکدیگر مساویند.



فرض : $AB = AC$

حکم : $\angle B = \angle C$



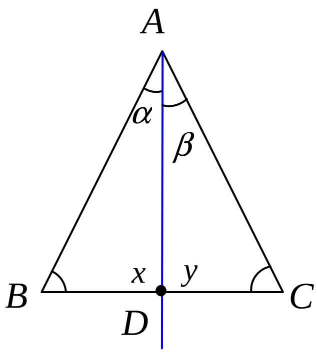
اثبات : از رأس مثلث (رأس A) خطی چنان رسم می‌کنیم که نیمساز زاویه‌ی متناظر آن (زاویه ی A) باشد و قاعده‌ی مثلث (ضلع BC) را در نقطه‌ی D قطع کند. در این صورت داریم :

$$\left.\begin{array}{r} AB=AC \\ \angle\alpha=\angle\beta \\ \text{مشترک}\quad AD=AD\end{array}\right\} \rightarrow \underset{(\text{ض ز ض})}{\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ACD}} \rightarrow \angle B=\angle C$$

قضیه : هر مثلث که دو زاویه‌ی مساوی داشته باشد، متساوی‌الساقین است.

فرض : $\angle B=\angle C$

حکم : $AB=AC$

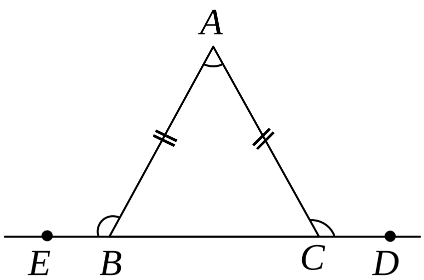


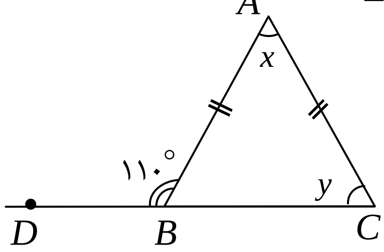
اثبات : از رأس A خطی چنان رسم می‌کنیم که نیمساز زاویه A باشد و ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع کند. چون مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است. پس $\angle x=\angle y$ حال می‌توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{r} \angle\alpha=\angle\beta \\ \text{مشترک}\quad AD=AD \\ \angle x=\angle y\end{array}\right\} \rightarrow \underset{(\text{ز ض ز})}{\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ACD}} \rightarrow AB=AC$$

***

تمرین ۱۱ : در شکل زیر $AB=AC$ نشان دهید که $\angle ABE=\angle ACD$





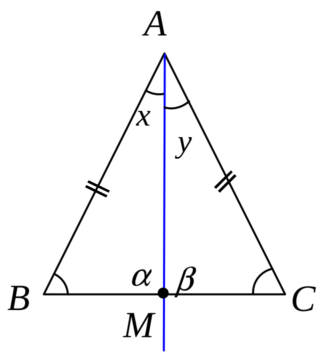
$AB=AC$

تمرین ۱۲ : با توجه به شکل مقابل مقدار y و x را بیابید.

تمرین ۱۳ : ثابت کنید که هر مثلث که سه زاویه‌ی مساوی داشته باشد، متساوی‌الاضلاع است.

تمرین۱۴ : اندازه‌ی دو ضلع مثلثی ۵ سانتی متر و زاویه‌ی بین آنها ۶۰ درجه است. ثابت کنید که این مثلث متساوی الاضلاع است.

قضیه : در هر مثلث متساوی‌الساقین، اجزای فرعی نظیر رأس مثلث برهم منطبقند.



اثبات : در مثلث متساوی‌الساقین ABC در شکل مقابل نیمساز زاویه رأس آن (یعنی رأس A) را رسم می‌کنیم. حال ثابت می کنیم که این نیمساز ، میانه و ارتفاع وارد بر ضلع BC می‌باشند، که نتیجه می شود، عمود منصف نظیر آن نیز هست.

$$\left.\begin{array}{r} AB=AC \\ \angle x=\angle y \\ \text{مشترک}\quad AM=AM \end{array}\right\} \rightarrow \underset{(\text{ض ز ض})}{\overset{\Delta}{ABM} \cong \overset{\Delta}{ACM}} \rightarrow \angle\alpha=\angle\beta$$

و چون دو زاویه‌ی β و α مکمل یکدیگرند، پس :

$$\angle\alpha=\angle\beta=۹۰^{\circ} \rightarrow AM \perp BC$$

پس AM ارتفاع وارد بر ضلع BC است.

از طرفی چون دو مثلث ABM و ACM همنهشت می باشند، لذا $BM=MC$. یعنی AM میانه وارد بر ضلع BC است.

و چون AM هم میانه و هم ارتفاع وارد بر ضلع BC می‌باشند. لذا عمود منصف نظیر آن نیز هست.

***

نتیجه : چون هر متساوی‌الاضلاع ، متساوی الساقین نیز می باشد. لذا در مثلث متساوی الاضلاع ، میانه، نیمساز ، ارتفاع و عمود منصف هر رأس بر هم منطبق هستند.

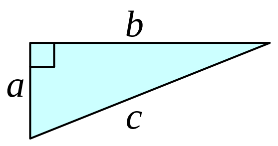
تمرین ۱۵ : ثابت کنید که در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازه‌ی ضلع روبرو به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است.

***

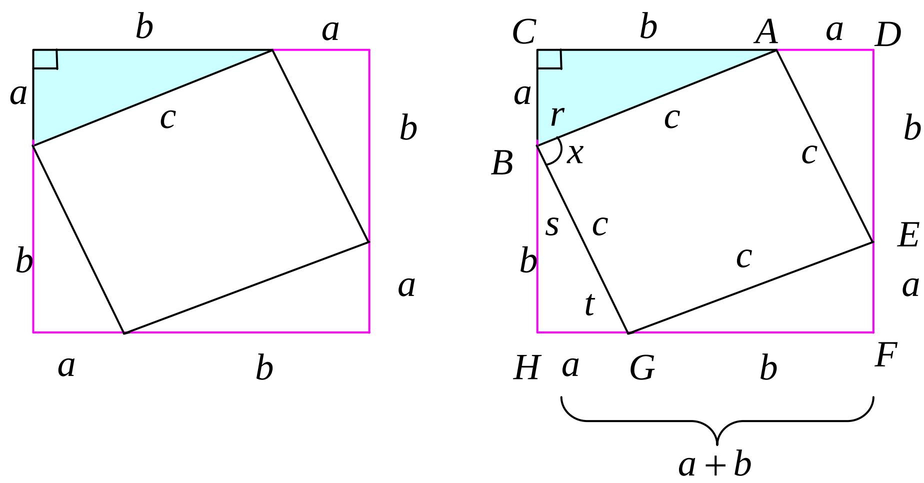
در ادامه یکی از قضیه های اساسی در مورد مثلث قائم الزاویه معروف به قضیه‌ی فیثاغورس را بیـان و اثبـات می کنیم.

قضیه (قضیه‌ی فیثاغورس): در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع وتر با مجموع مربعهای دو ضلع دیگر آن برابر است.

حکم : $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$



اثبات : ابتدا مربعی به ضلع $a+b$ رسم می‌کنیم، سپس در این مربع چهار مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع b و a تشکیل می‌دهیم.



بنا به حالت (ض‌زض) این چهار مثلث با همدیگر و با مثلث اصلی همنهشت هستند. برای مثال:

$$\left.\begin{array}{r} BC=AD \\ \angle C=\angle D=۹۰ \\ AC=DE \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta(ABC)\equiv\Delta(ADE)$$

و لذا تمام مثلث ها دارای وتر های مساوی هستند. از طرفی

$$\left.\begin{array}{l} s+t=۹۰^{\circ} \\ r=t \end{array}\right\} \rightarrow s+r=۹۰^{\circ} \xrightarrow{r+x+s=۱۸۰^{\circ}} x=۹۰^{\circ}$$

یعنی چهارضلعی حاصل از چهار وتر (چهارضلعی $CDFH$) دارای چهارضلع مساوی دارد و یک زاویه‌ی قائمه است و لذا مربع است.

اکنون طبق اصل مجموع مساحت‌ها می‌توان نوشت :

مساحت ۴ مثلث همنهشت + مساحت مربع کوچک = مساحت مربع بزرگ

$$(a+b)^{۲} = c^{۲} + ۴(\frac{۱}{۲}a.b)$$

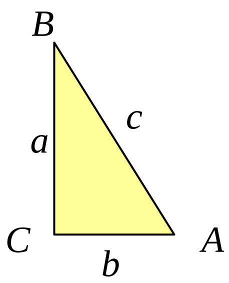
$$\to a^{۲} + ۲ab + b^{۲} = c^{۲} + ۲ab \to a^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$$

توجه : در این اثبات تعریف مربع را دانسته فرض کردیم.

***

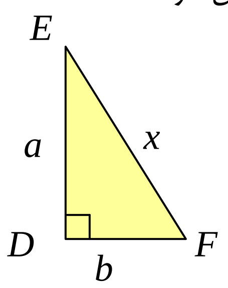
قضیه (عکس قضیه‌ی فیثاغورس) :

اگر در مثلثی مربع بزرگترین ضلع با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر برابر باشد آن مثلث قائم‌الزاویه و زاویه‌ی روبرو به ضلع بزرگتر قائمه است.



فرض : $a^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$

اثبات : مثلثی قائم الزاویه به نام DEF طوری رسم می کنیم که اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی آن b و a باشند.آنگاه داریم



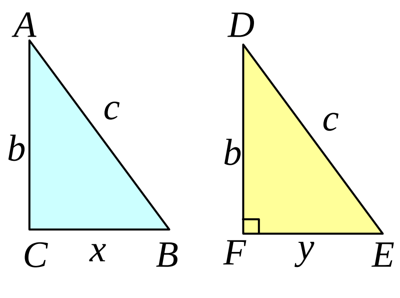
$$a^{۲} + b^{۲} = x^{۲}$$

و با مقایسه با فرض قضیه می‌توان نوشت :

$$x^{۲} = c^{۲} \to x = c$$

لذا مثلث‌های ABC و DEF بنا به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند و چون زاویه‌ی D قائمه است پس زاویه‌ی متناظر آن یعنی زاویه‌ی C نیز قائمه است.

قضیه: هرگاه وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی دیگری برابر باشند آن دو مثلث همنهشت هستند.



فرض : $AB = DE$ و $AC = DF$

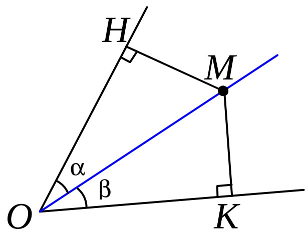
حکم : $\Delta(ABC) \cong \Delta(DEF)$

اثبات : چون هر دو مثلث قائم‌الزاویه هستند پس رابطه‌ی فیثاغورس را برای هر مثلث می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(ABC): x^{۲}+b^{۲}=c^{۲} \\ \Delta(DEF): y^{۲}+b^{۲}=c^{۲}\end{array}\right\} \rightarrow x^{۲}=y^{۲} \rightarrow x=y$$

و لذا دو مثلث به حالت (ض‌ض‌ض) همنهشت هستند.

قضیه : هرگاه نقطه‌ای از دو ضلع زاویه‌ای به یک فاصله باشد آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.



فرض : $MH = MK$

حکم : $\angle\alpha = \angle\beta$

اثبات : دو مثلث OMH و OMK قائم‌الزاویه هستند. پس :

$$\left.\begin{array}{l}MH = MK \\ OM = OM\end{array}\right\} \rightarrow \Delta(OMH) \cong \Delta(OMK) \rightarrow \angle\alpha = \angle\beta$$

(وتر و یک ضلع)

***

چندضلعی منتظم

هر چند ضلعی را منتظم گویند، هرگاه تمام اضلاع آن برابر و تمام زاویه‌های آن نیز برابر باشند.

مثلاً : مثلث متساوی‌الاضلاع که سه ضلعی منتظم و مربع که چهارضلعی منتظم است.

نتیجه : اندازه‌ی هر زاویه داخلی n ضلعی منتظم برابر $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$ درجه است. (چرا؟)

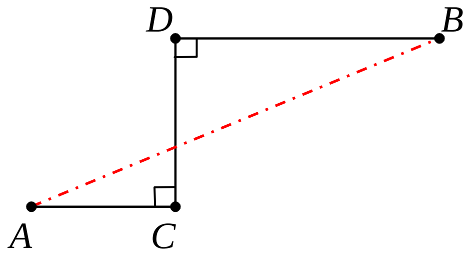
***

تمرین۱۶: ثابت کنید که هر شش ضلعی منتظم توسط قطرهای بزرگ آن به شش مثلث متساوی الاضلاع تبدیل می شود.

***

تمرین برای حل :

۱۷ : شکل زیر $AC=۳$ و $CD=۶$ و $BD=۵$، اندازه‌ی پاره خط AB را تعیین کنید.



***

جدول حروف یونانی

نام فارسی	نام لاتین	حرف کوچک	حرف بزرگ
آلفا	Alpha	α	A
بتا	Beta	β	B
گاما	Gamma	γ	Γ
دلتا	Delta	δ	Δ
اِپسیلون	Epsilon	ϵ	E
زتا	Zeta	ζ	Z
اتا	Eta	η	H
تتا	Theta	θ	Θ
یوتا	Iota	ι	I
کاپا	Kappa	κ	K
لاندا	Lambda	λ	Λ
مو (میو)	Mu	μ	M
نو	Nu	ν	N
زی	Xi	ξ	Ξ
اومیکرون	Omicron	o	O
پی	Pi	π	Π
رو	Rho	ρ	P
سیگما (زیگما)	Sigma	σ	Σ
تاو (تُو)	Tau	τ	T
اوپسیلون	Upsilon	υ	Υ
فی	Phi	ϕ	Φ
خی	Chi	χ	X
سای	Psi	ψ	Ψ
اُمگا	Omega	ω	Ω