جزوه دست نویس ریاضی ششم

فصل چهارم

مهدیه آتش افروز
مدرس پایه ششم

تقارن چرخشی

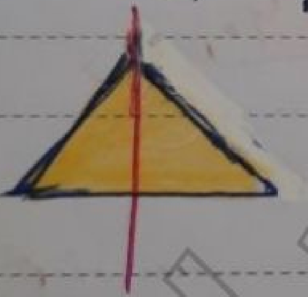
تقارن محوری «خط تقارن»

تقارن نقطه ای «مرکز تقارن»

تقارن

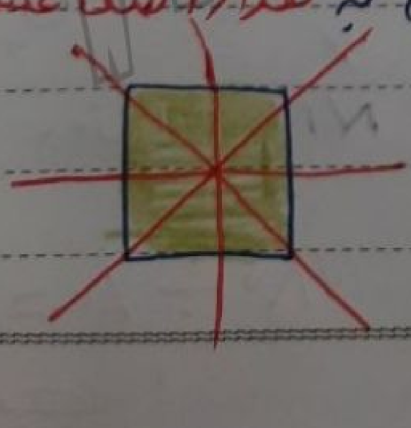
محور تقارن «خط تقارن»

خط فرضی است که شکل را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند به طوری که هرگاه شکل را روی آن خط تا بزنید دو قسمت مساوی کاملاً بر روی هم منطبق می شوند



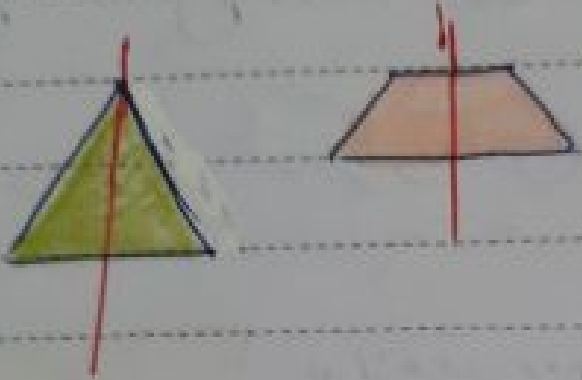
نکته

شکل های منتظم «شکلی که ضلع هایش با هم مساوی و زاویه هایش با هم مساوی است» به تعداد اضلاعشان خط تقارن دارند



نکته

مثلث متساوی الساقین و ذوزنقه ی متساوی الساقین یک خط تقارن دارند.



- خط بی نهایت خط تقارن دارد
- پاره خط دو خط تقارن دارد که یکی از آن ها روی خودش منطبق است
- نیم خط یک خط تقارن دارد که روی خودش منطبق است

مرکز تقارن یک شکل

وقتی شکلی حول نقطه ای دقیقا چرخش ۱۸۰ درجه داشته باشد و بعد از آن دقیقا روی خودش منطبق گردد نقطه ی مورد نظر مرکز تقارن شکل می باشد مثلاً

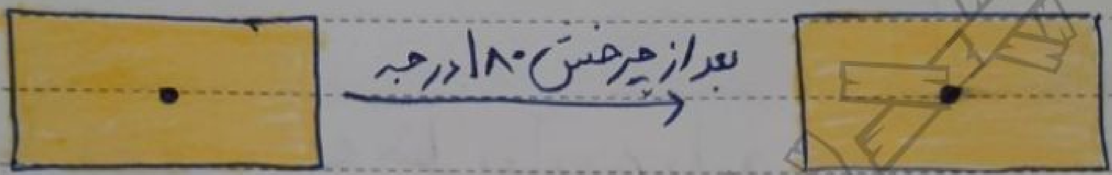
Subject.

Day. Month. Year.

اگر شکل مستطیل زیر را حول نقطه‌ی مشخص شده بچرخانیم

شکل مستطیل دوباره روی خودش منطبق می‌گردد و

نقطه‌ی مورد نظر مرکز تقارن مستطیل می‌باشد



نکته

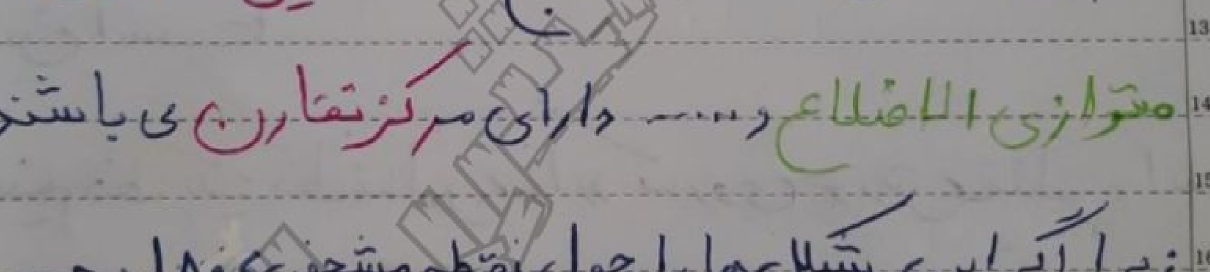
بعضی از شکل‌ها مانند مربع، مستطیل، لوزی،

متوازی الاضلاع و ...... دارای مرکز تقارن می‌باشند،

زیرا اگر این شکل‌ها را حول نقطه مشخص، ۱۸۰ درجه

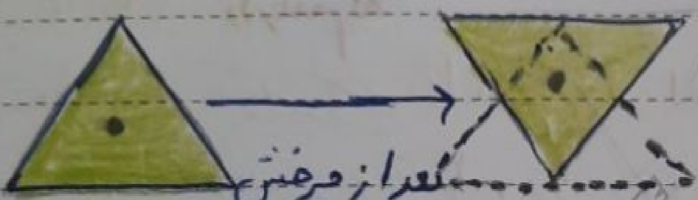
بچرخانیم شکل روی خودش منطبق می‌گردد «مرکز تقارن

شکل‌های زیر، محل برخورد قطرها می‌باشد

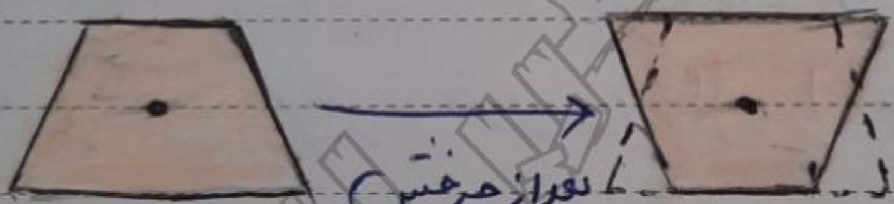


نکته

بعضی از شکل ها مانند مثلث و ذوزنقه و ..... دارای مرکز تقارن نمی باشند زیرا اگر این شکل ها را حول هر نقطه ی مشخصی ۱۸۰ درجه بچرخانیم، شکل روی خودش منطبق نمی گردد



خطوط نقطه چین نشان دهنده ی شکل قبل از چرخش می باشد



نکته

- نقطه یک مرکز تقارن دارد
- خط بی شمار مرکز تقارن دارد
- پاره خط یک مرکز تقارن دارد
- نیم خط مرکز تقارن ندارد

Day.... Month.... Year........

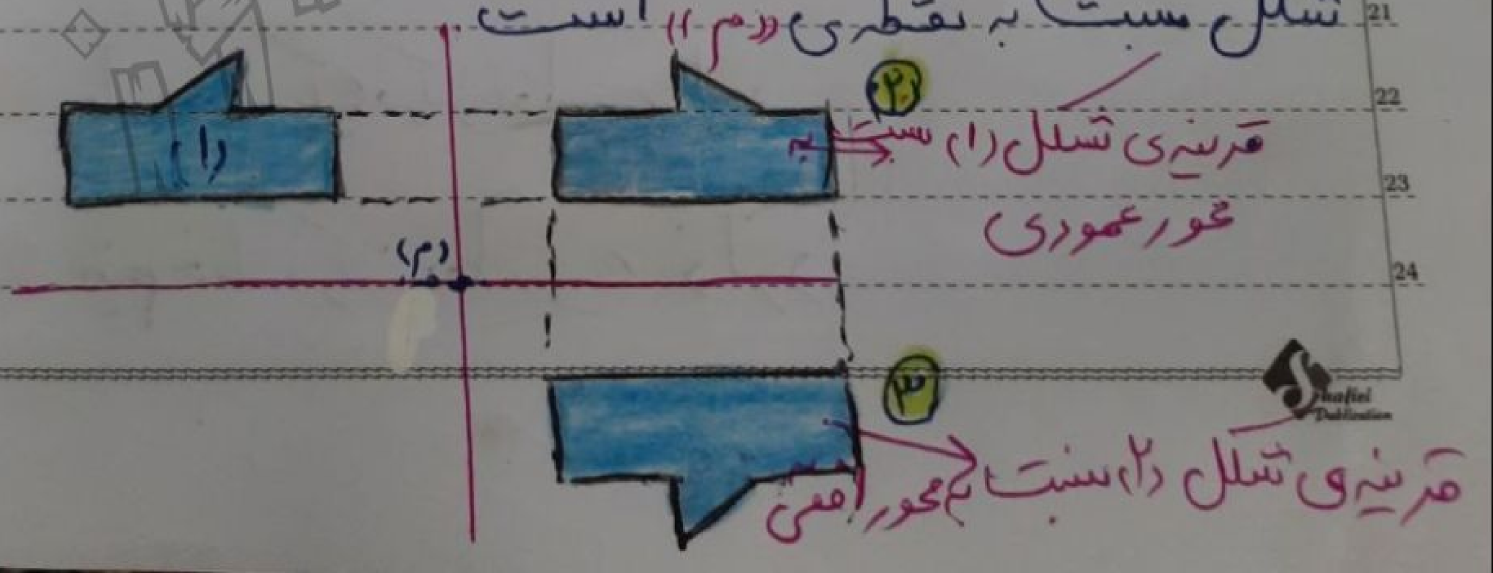
تقارن مرکزی

قرینه ی هر شکل نسبت به یک نقطه را تقارن مرکزی می گویند

روش اول به دست آوردن قرینه ی یک شکل نسبت به یک نقطه

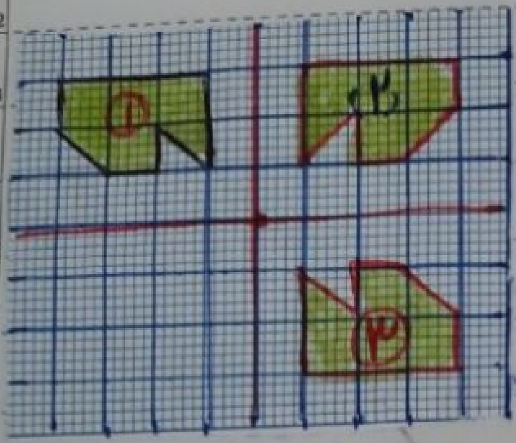
رسم تقارن مرکزی با استفاده از انتقال شکل نسبت به محور عمودی و افقی

می خواهیم قرینه ی شکل رو به رو را نسبت به نقطه ی (م) به دست آوریم ابتدا از نقطه ی «م» دو خط عمود بر هم رسم می کنیم. سپس قرینه ی شکل را نسبت به محور عمودی به دست می آوریم سپس قرینه ی شکل جدید را نسبت به محور افقی به دست می آوریم شکل نهایی قرینه ی شکل نسبت به نقطه ی «م» است



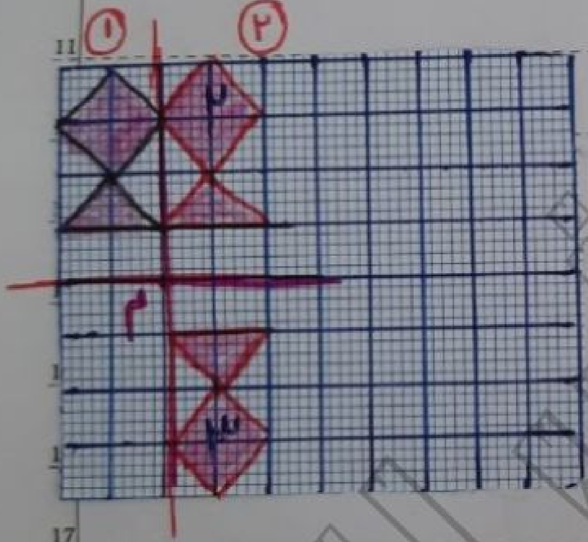
Day. Month. Year.

به کمک روش اول قرینه شکل را نسبت به نقطه م به دست آورید



پاسخ

از نقطه ی م دو خط عمود بر هم رسم می کنیم ابتدا قرینه شکل را نسبت به محور عمودی و سپس قرینه شکل به دست آمده نسبت به خط افقی را رسم می کنیم

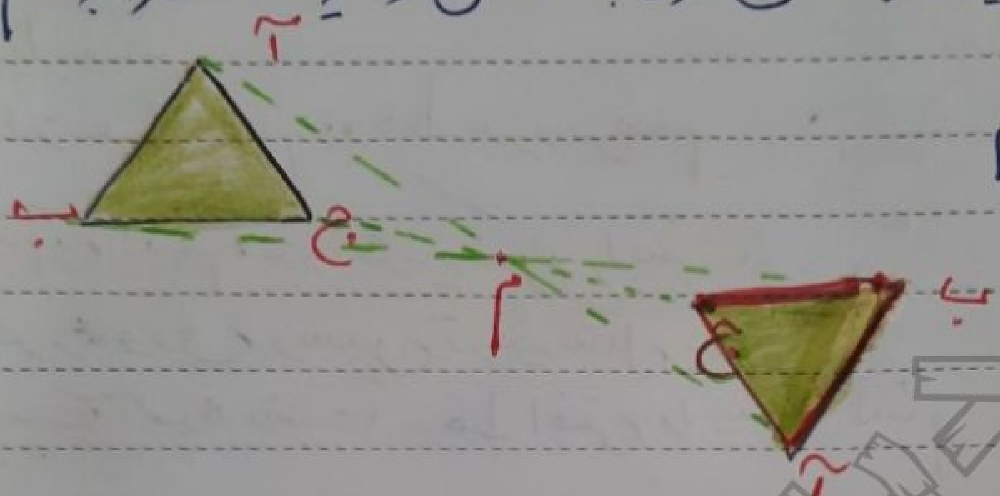


روش دوم: رسم تقارن مرکزی با استفاده از انتقال رأس های شکل نسبت به نقطه ی مورد نظر

ابتدا رأس های شکل مورد نظر را مشخص کرده و در صورت نیاز نام گذاری یا شماره گذاری کنید. هر رأس را با استفاده از خط کش به نقطه (م) وصل کرده و به همان

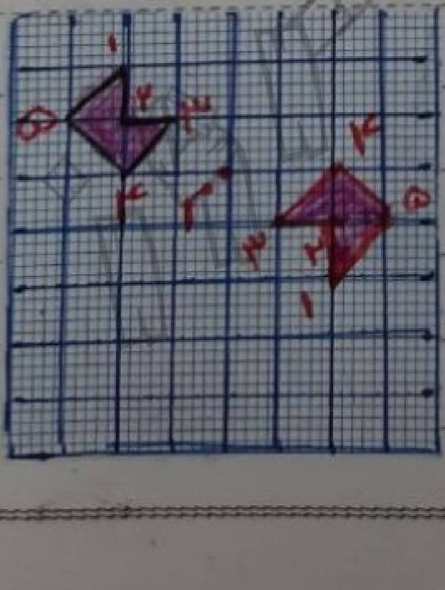
Day. Month. Year.

اندازه را هم داده و مکان قرینه ی رأس های مورد نظر را مشخص کنید و با همان ترتیب شکل اولیه، نقاط را به هم وصل می کنیم



توجه

اگر در یک صفحه ی شطرنجی از ما بخواهند که قرینه ی یک شکل را نسبت به یک نقطه به دست بیاوریم، می توان قرینه ی هر رأس شکل را نسبت به مرکز تقارن با شمردن حرکت های افقی و عمودی به دست آورد

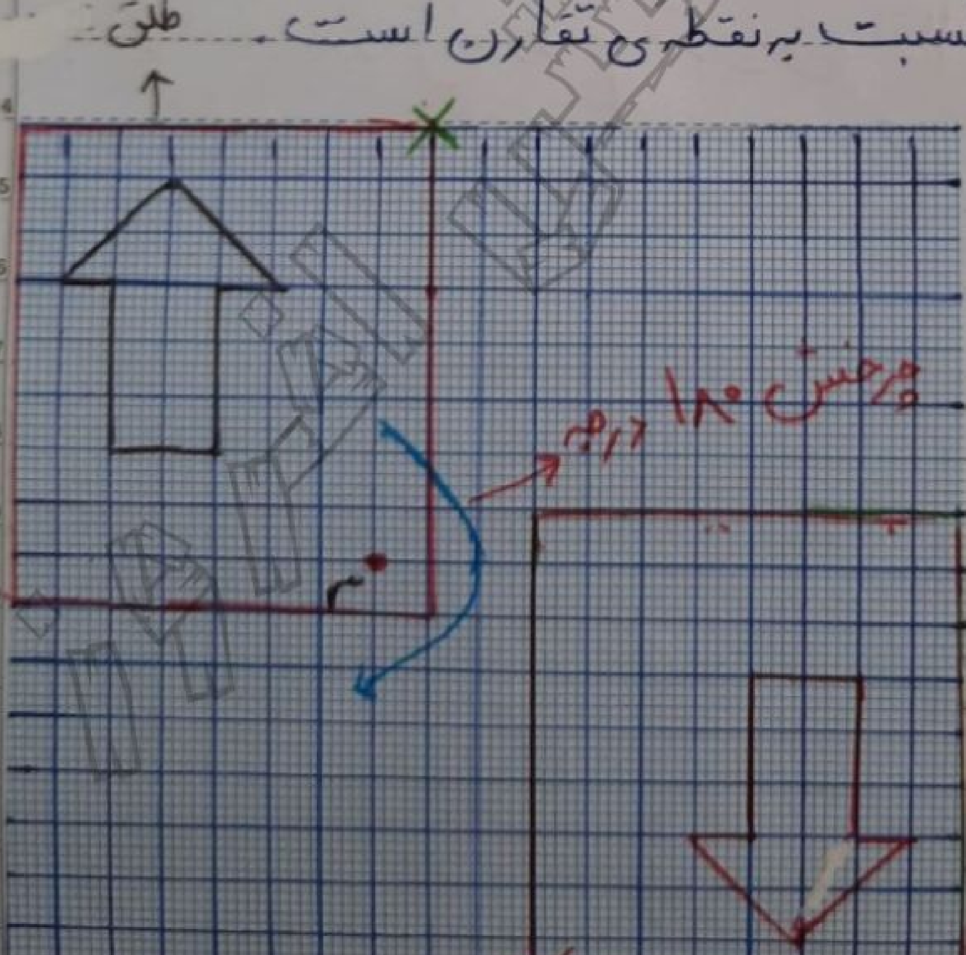


Subject.

Day. Month. Year.

روش سوم

برای قرینه کردن یک شکل نسبت به یک نقطه «نقطه‌ی تقارن»، یک کاغذ شفاف یا طلق را روی شکل قرار می‌دهیم و تصویر شکل را روی کاغذ شفاف رسم می‌کنیم. سپس نوک مداد را روی مرکز تقارن قرار داده و کاغذ شفاف را ۱۸۰ درجه در جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم و شکل حاصل را رسم می‌کنیم این شکل قرینه‌ی شکل اصلی نسبت به نقطه‌ی تقارن است.

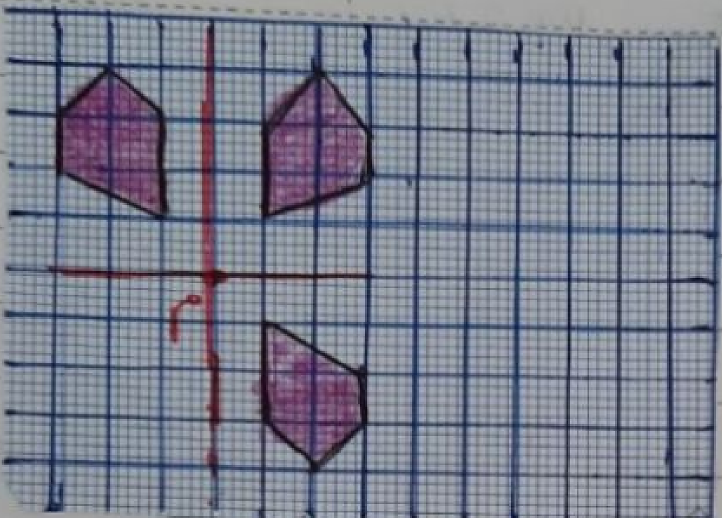


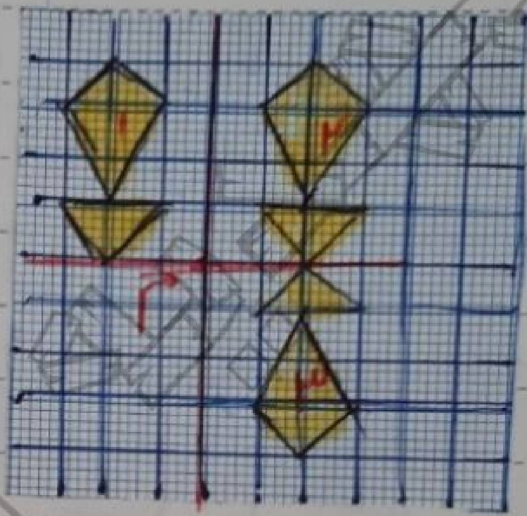
Subject.

Day. Month. Year.

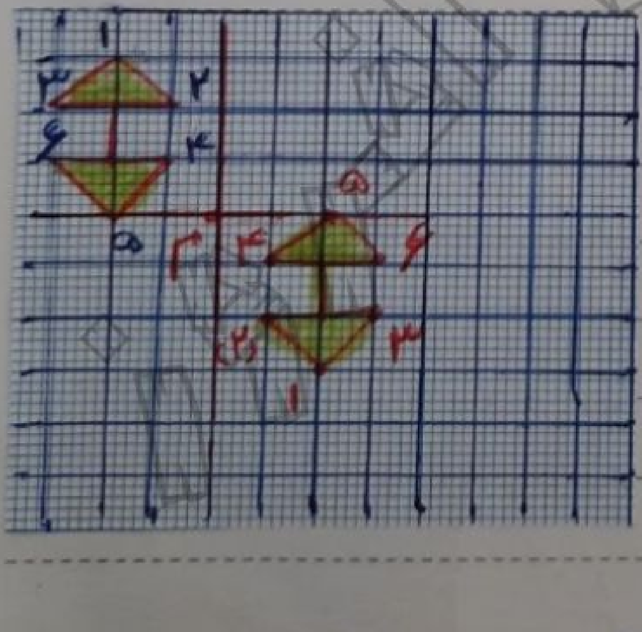
مثال:

با روش اول تقارن شکل ها را نسبت به نقطه ی «م» به دست آورید





به کمک روش دوم قرینه ی شکل را نسبت به مرکز تقارن نقطه ی «م» به دست آورید

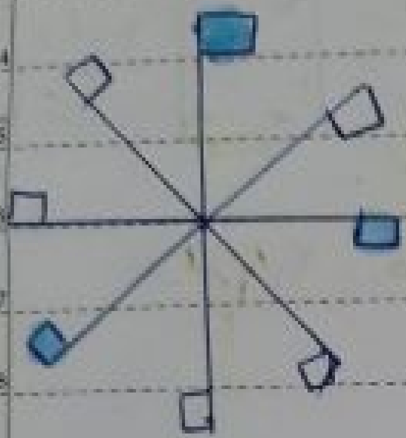


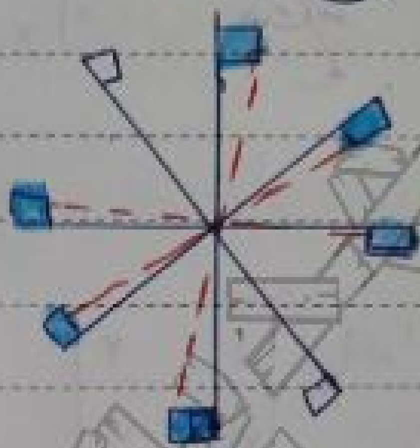
قرینه ی هر رأس شکل را نسبت به مرکز تقارن با شمردن حرکت های افقی و عمودی به دست آورد

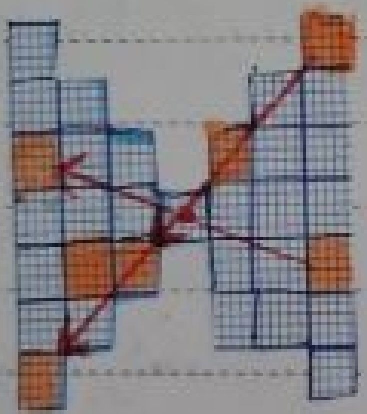
مثال:

شکل های زیر را طوری رنگ کنید که نقطه‌ی «م»

مرکز تقارن باشد



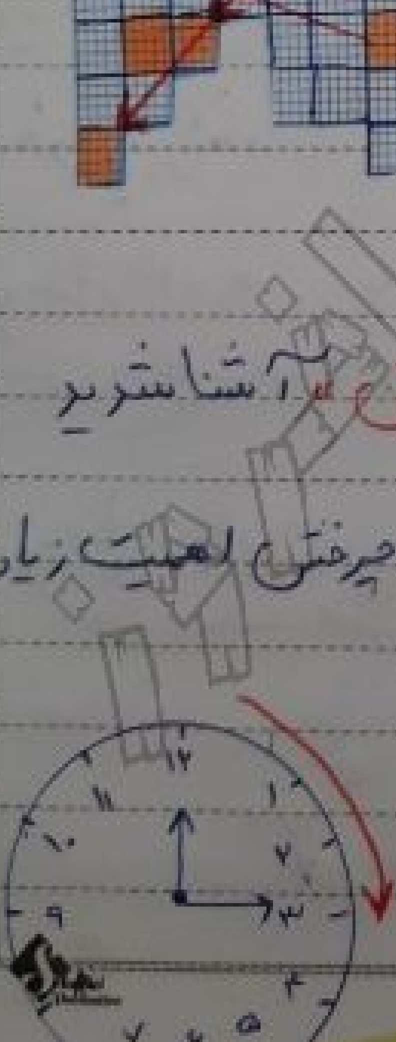




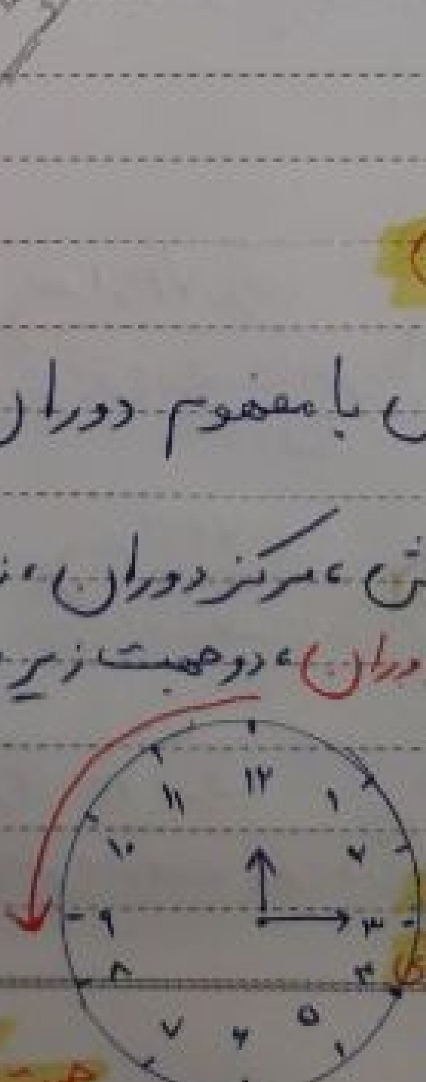
دوران

در سال قبل با مفهوم دوران «چرخش» آشنا شدید

در هر چرخش، مرکز دوران، زاویه و جهت چرخش اهمیت زیادی دارد. در دوران، دو جهت زیر مهم هستند

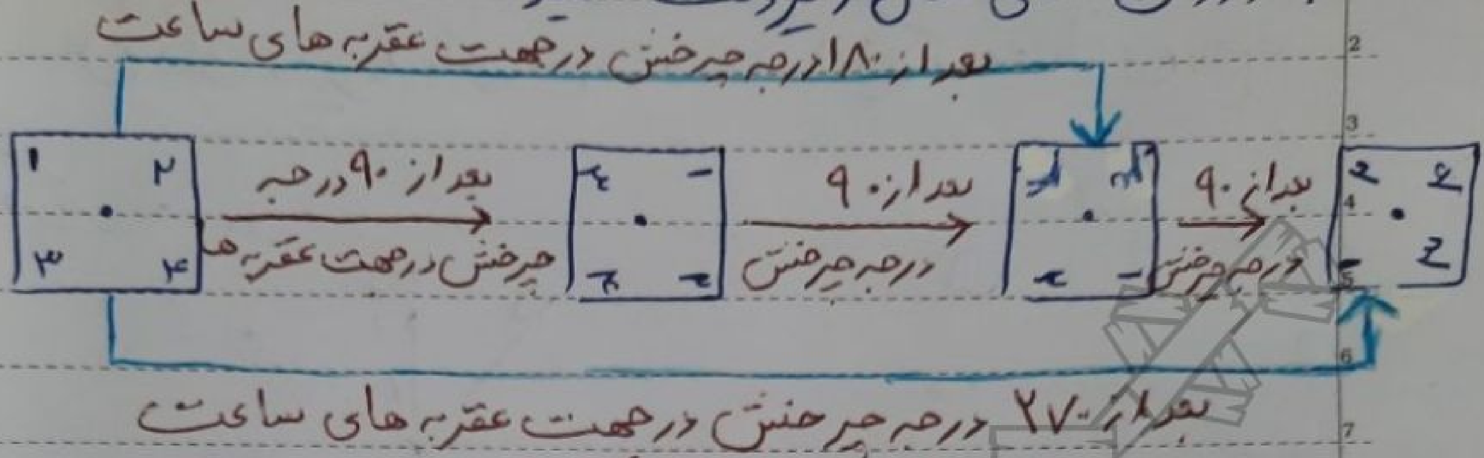


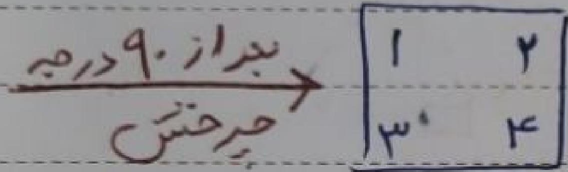
جهت حرکت عقربه های ساعت



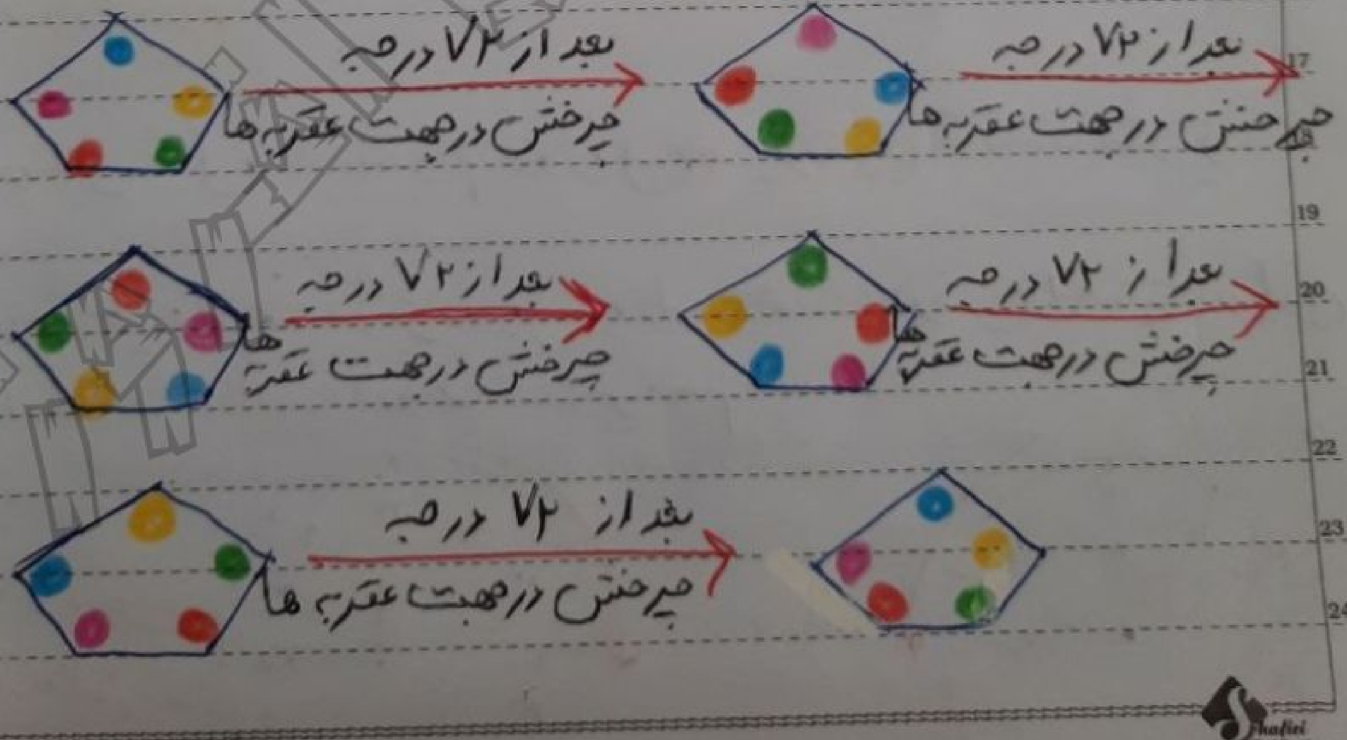
خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت

به دوران های شکل زیر دقت کنید





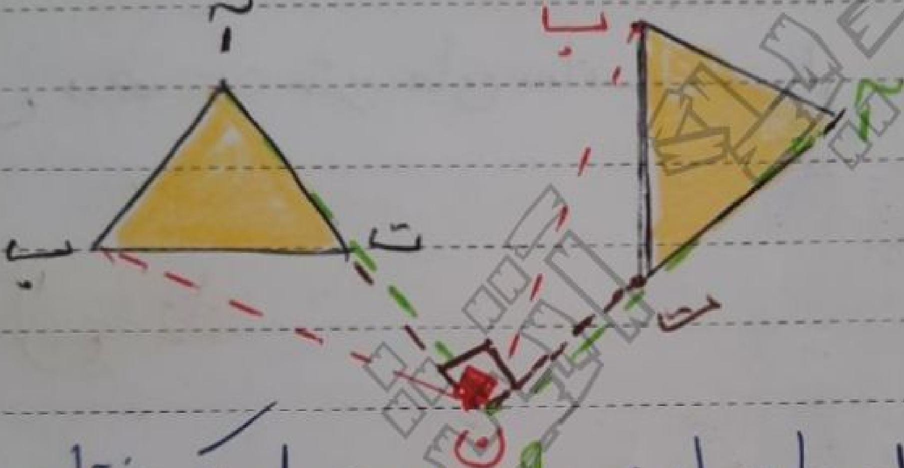
همان طور که ملاحظه می کنید این شکل با ۴ چرخش یا همان ۳۶۰ درجه چرخش به موقعیت اولیه ی خود برگشت



Subject.
Day. Month. Year.

همان طور که ملاحظه می‌کنید. این شکل پس از
۵ بار چرخش یا همان ۳۶۰ درجه چرخش
به موقعیت اولیه‌ی خود باز گشت...

طریقه‌ی رسم دوران یافته‌ی یک شکل



برای رسم شکل با دوران ۹۰ درجه حول یک نقطه، هر
رأس از شکل را به نقطه‌ی مورد نظر وصل کنید حال به کمک
گونیا یا نقاله یک زاویه‌ی راست از نقطه‌ی دوران
رسم کنید مثلاً در شکل نقطه‌ی آ را به نقطه‌ی ن وصل کنید و
آن را اندازه بزنید حال یک لبه‌ی گونیا روی ضلع «آن» بگذارید
و روی ضلع دیگر گونیا، به همان اندازه ادامه دهید

Subject..................
Day...... Month...... Year..........

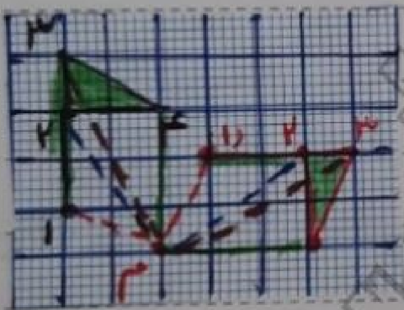
ضلع «ن آ» شکل جدید مشخص می‌شود

دقت کنید بین دو ضلع از شکل و شکل دوران زاویه‌ی ۹۰ درجه وجود دارد

این کار را برای هر رأس و ضلع دیگر تکرار کنید

شکل در جهت عقربه‌های ساعت دوران یافته است

مثال ۲)

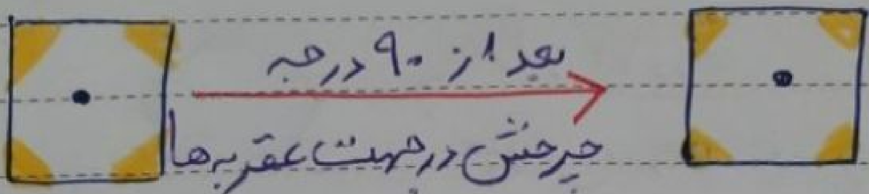


تقارن چرخشی

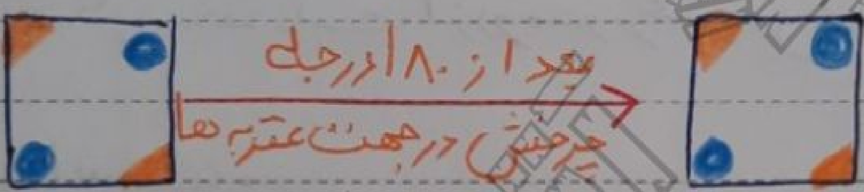
وقتی شکلی را حول یک نقطه به اندازه‌ی ۱۸۰ درجه یا کم‌تر در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخانیم و شکل روی خودش منطبق بشود می‌گوییم شکل تقارن چرخشی دارد

Subject.
Day. Month. Year.

مثال

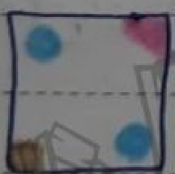


چون این شکل بعد از ۹۰ درجه چرخش در جهت حرکت عقربه های ساعت دوباره روی خودش منطبق می شود پس دوران چرخشی دارد



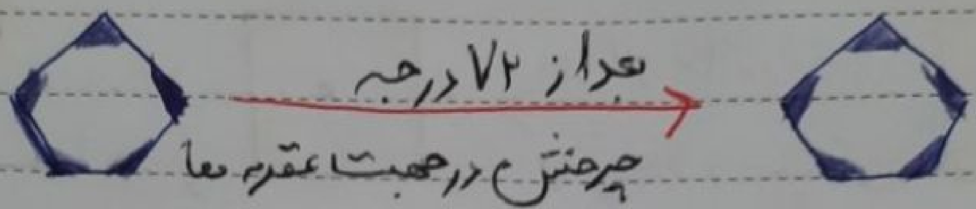
شکل بعد از ۱۸۰ درجه چرخش در جهت حرکت عقربه های ساعت دوباره روی خودش منطبق می شود پس دوران

مثال



اگر شکل را از ۱ تا ۱۸۰ درجه بچرخانیم هیچ گاه برخودش منطبق نمی شود لذا این شکل دوران چرخشی ندارد

Subject.
Day. Month. Year.



شکل تقارن چرخشی دارد

درس سوم: محورهای مختصات

صفحه‌ی مختصات از دو محور عمودی و افقی تشکیل شده است.

محور افقی را محور طول‌ها و محور عمودی را محور عرض‌ها می‌گویند

به محل تقاطع این محورها مبدأ مختصات می‌گویند

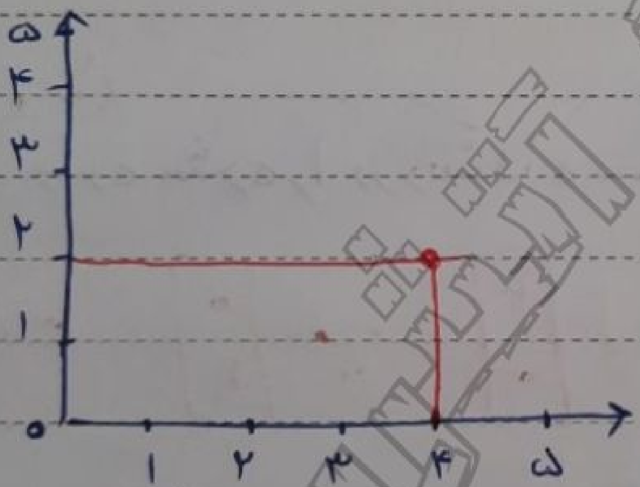
هر نقطه در صفحه را با دو عدد به صورت $\begin{bmatrix}\text{طول}\\ \text{عرض}\end{bmatrix}$ نشان می‌دهیم

و آن را مختصات نقطه می‌نامیم.

عدد بالایی در مختصات یک نقطه، مؤلفه افقی «طول»

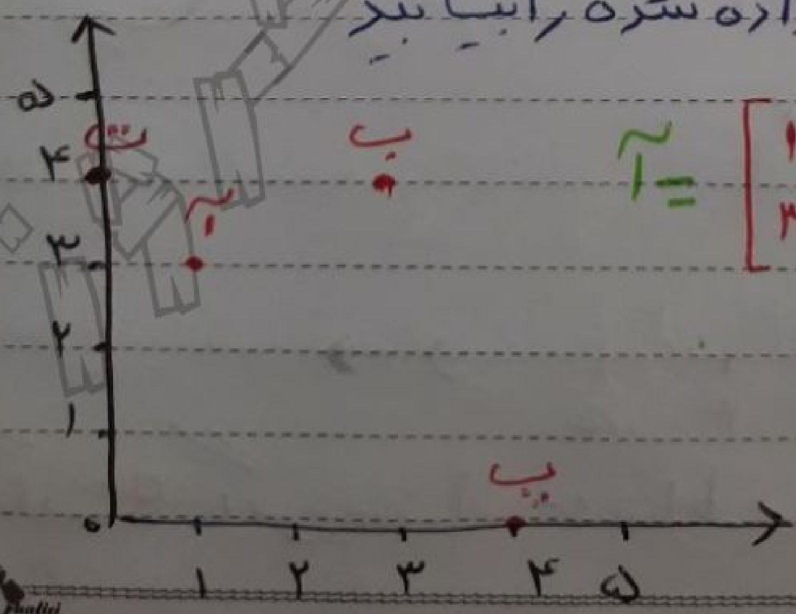
و عدد پایینی مؤلفه‌ی عمودی «عرض» آن نقطه می باشد

برای پیدا کردن مؤلفه‌های افقی و عمودی یک نقطه باید از آن نقطه دو خط عمود بر محورها رسم کرده و فاصله‌ی محل تقاطع آن ها با محورها را تا مبدأ مختصات پیدا کنیم مثلاً نقطه‌ی (آ) در شکل زیر دارای مختصات $\begin{bmatrix}۴\\۲\end{bmatrix}$ است



مثال

مختصات نقاط داده شده را بیابید



آ = $\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$ ب = $\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$

پ = $\begin{bmatrix}۴\\۰\end{bmatrix}$ ت = $\begin{bmatrix}۰\\۴\end{bmatrix}$

نکته

● نقاطی که روی محور طول ها قرار دارند (مثل نقطه ی ب در مثال قبل) عرض آن صفر است

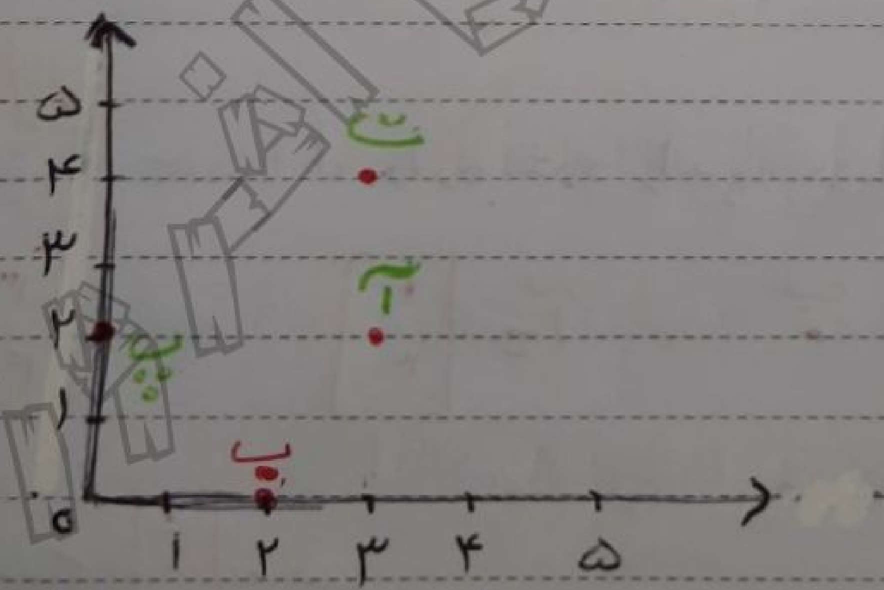
● نقاطی که روی محور عرض ها قرار دارند (مثل نقطه ی ت در مثال قبل) طول آنها صفر است

مثال ۲)

نقاط داده شده را در دستگاه مختصات نمایش دهید

ت = $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ ، پ = $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ، آ = $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$

پاسخ:



نکته

اگر مختصات نقاط، داده شده باشند،

برای نمایش آن ها کافی است از مبدا مختصات ابتدا به اندازه ی عدد داده شده برای **طول** به صورت افقی و به اندازه ی عدد داده شده برای عرض به صورت عمودی حرکت کرده و نقطه را مشخص می کنیم

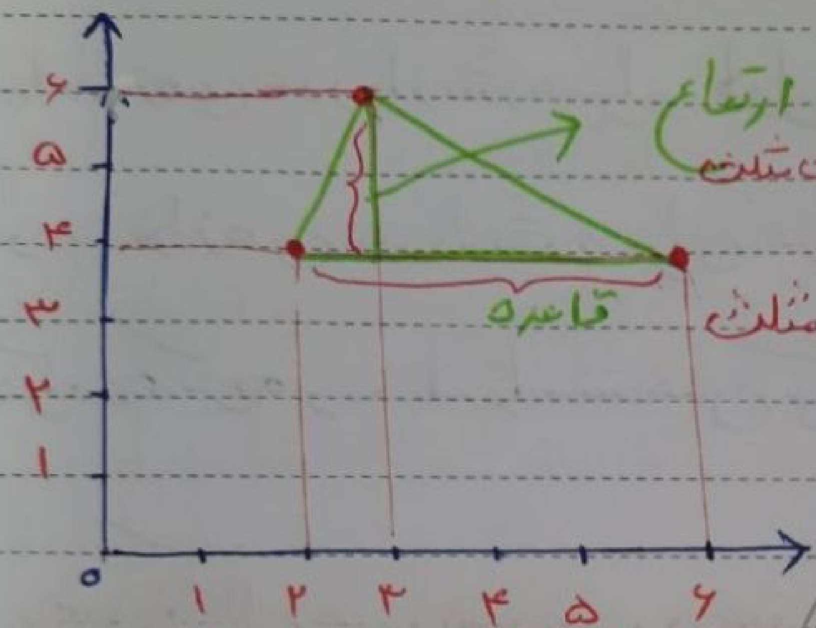
رسم شکل های هندسی در صفحه و به دست آوردن مساحت آن ها

با داشتن مختصات رأس های یک شکل و نمایش آن ها در دستگاه مختصات می توان یک شکل را در دستگاه مختصات رسم نمود. همچنین می توان از راه شمردن مربع های داخل شکل یا استفاده از فرمول های هندسی، مساحت شکل را حساب کرد.

مثال:

مثلث با رأس های $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۶ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$ را در صفحه ی مختصات

رسم کرده و سپس مساحت آن را بیابید



مساحت مثلث = $\frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{۲}$

مساحت مثلث = $\frac{۴ \times ۲}{۲} = \boxed{۴}$

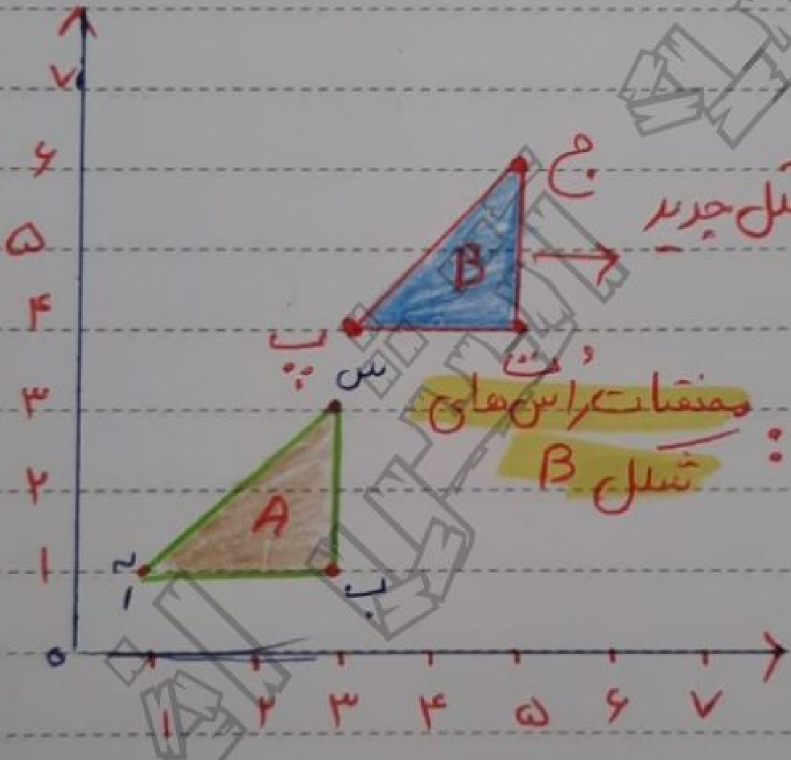
انتقال

به جابه‌جا شدن یک شکل در امتداد یک خط، انتقال می‌گوییم. اگر مختصات نقاط رأس‌های یک شکل را در نظر گرفته و طول آن‌ها را با یک عدد و عرض آن‌ها را هم با یک عدد جمع کنیم، آن شکل به جای دیگری از صفحه منتقل می‌شود که به این عمل **انتقال می‌گویند**.

نکته: در انتقال، شکل عیناً منتقل می‌شود و طول اضلاع و مساحت شکل تغییری نمی‌کند.

مثال

مختصات رأس های شکل (A) را به دست آورده و سپس آن را ۲ واحد به سمت راست و ۳ واحد به بالا منتقل کنید مختصات رأس های شکل جدید را پیدا کرده و سپس آن را رسم نمایید



مختصات رأس های شکل B : پ = $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ و ث = $\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$ و ج = $\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$

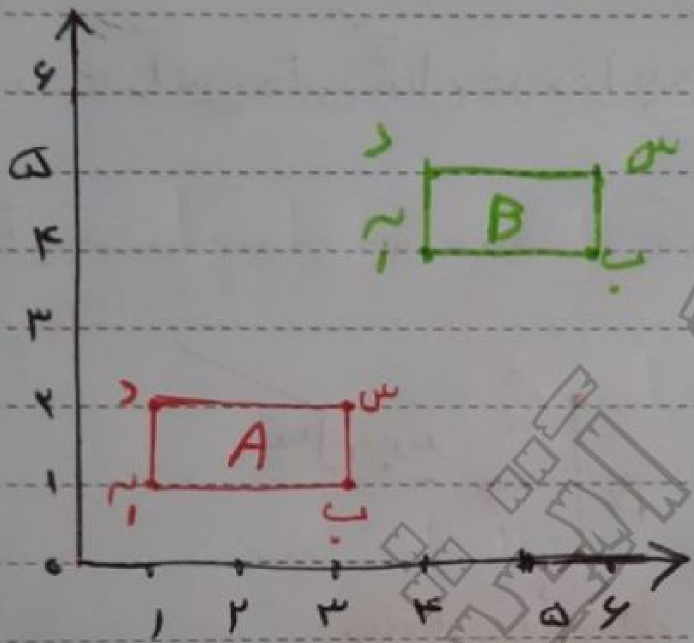
پاسخ:

مختصات رأس های شکل A : آ = $\begin{matrix}+2\\+3\end{matrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{matrix}+2\\+3\end{matrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ و س = $\begin{matrix}+2\\+3\end{matrix}\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$

حالا طول هر یک از نقاط را با $\boxed{2}$ و عرض هر یک از آنها را با $\boxed{3}$ جمع می کنیم تا مختصات شکل جدید به دست آید «B»

مثال:

مختصات رأس های شکل A و B را پیدا کرده و مقایسه کنید. سپس رابطه ی بین آن ها را بنویسید



پاسخ

شکل A: آ $= \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و ب $= \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و س $= \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و د $= \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$

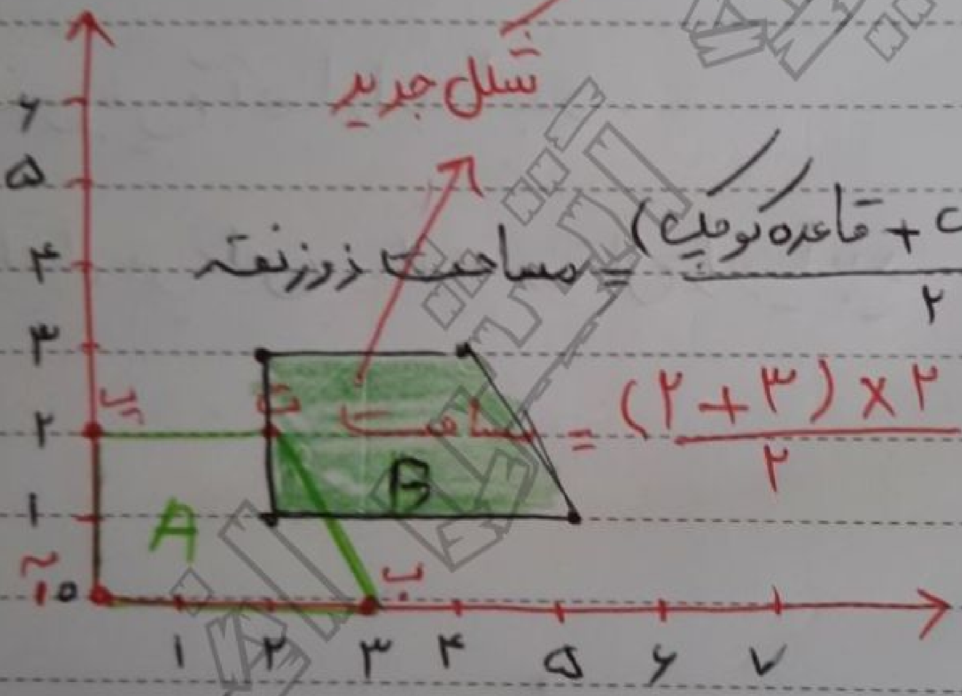
شکل B: آ $= \begin{bmatrix} ۴ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و ب $= \begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و س $= \begin{bmatrix} ۶ \\ ۵ \end{bmatrix}$ و د $= \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$

همانطور که ملاحظه می شود اگر طول و عرض رأس های شکل A را با عدد ۳ جمع کنیم شکل B به دست می آید

مثال:

① ذوزنقه‌ای با رأس‌های $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ = آ و $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ = ب و $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ = پ و $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ = ت را رسم کرده و مساحت آن را بیابید

② مختصات هر رأس آن را ۲ واحد به سمت راست و ۱ واحد به بالا منتقل کرده و مختصات شکل جدید را به دست بیاورید



$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{ارتفاع} \times (\text{قاعده بزرگ} + \text{قاعده کوچک})}{2}$$

$$\text{مساحت} = \frac{(2+3)\times 2}{2} = 5$$

مختصات رأس شکل جدید: $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ = آ و $\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$ = ب و $\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ = پ

$\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ = ت

Subject

Day Month Year

بزرگ نمایی

اگر مختصات رأس های یک شکل در عددی ضرب

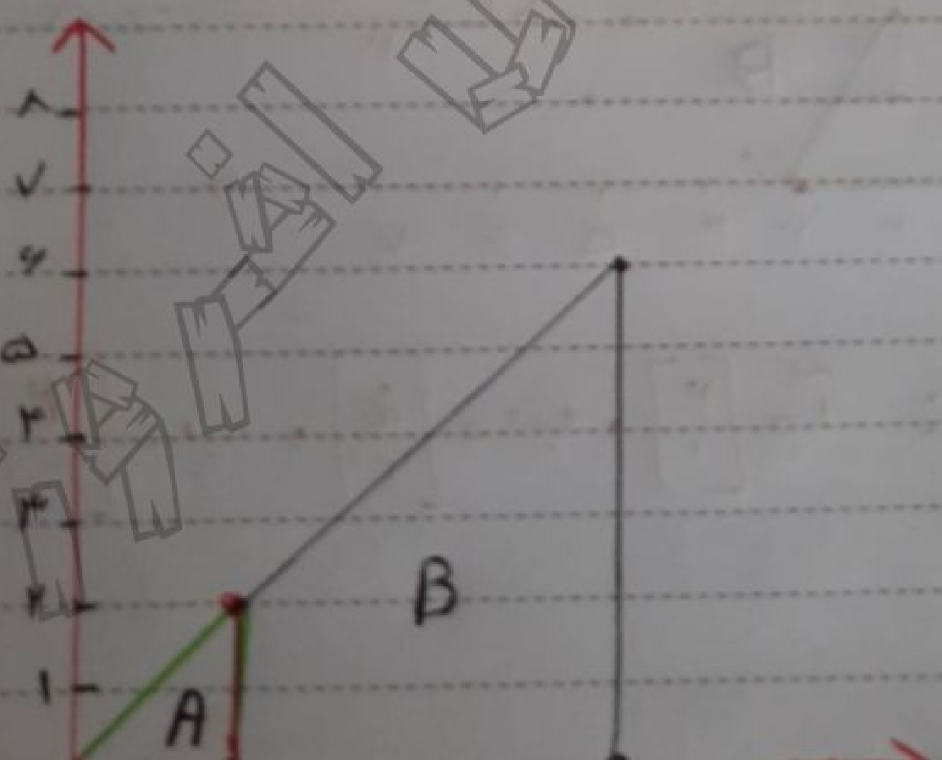
شود، شکل اولیه چند برابر می شود

مثال:

الف) مختصات رأس های شکل A و B را بنویسید و

رابطه ی بین آنها را بیابید

ب) رابطه بین این دو شکل را بیابید



پاسخ

شکل A: $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

شکل B: $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۶ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۶ \\ ۰ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

همانطور که مشاهده می‌شود مختصات رأس‌های شکل B، سه برابر مختصات رأس‌های شکل A است.

پ

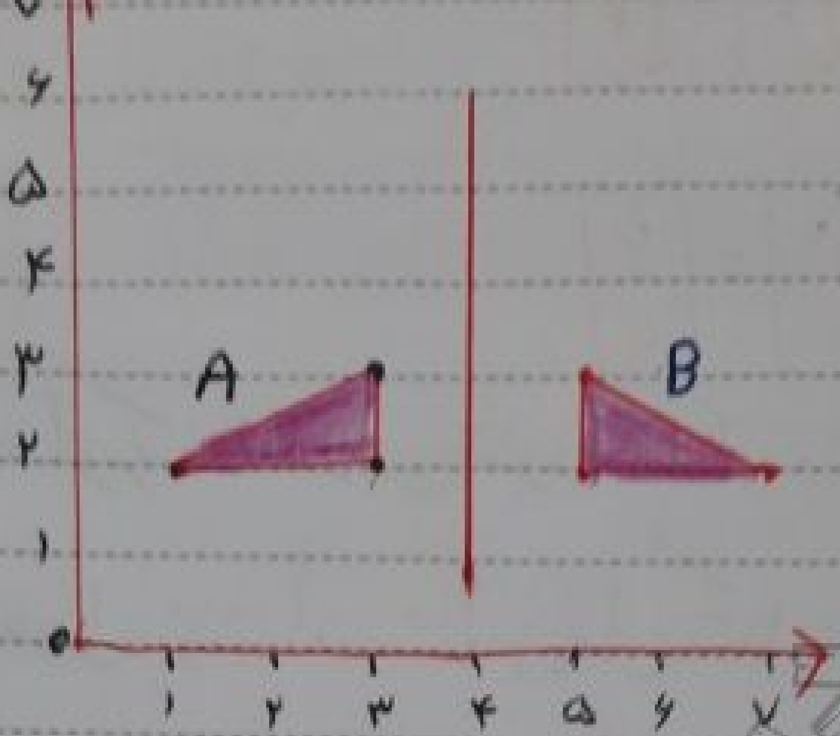
مساحت شکل A $= \frac{۲ \times ۲}{۲} = ۲$

مساحت شکل B $= \frac{۶ \times ۶}{۲} = ۱۸ \Longrightarrow \frac{۱۸}{۲} = ۹$

مساحت شکل B ۹ برابر شکل A است.

مثال:

در شکل زیر قرینه‌ی شکل A را نسبت به خط عمودی رسم کرده و مختصات رأس شکل A و قرینه‌اش را به دست آورید.



مختصات رأس های شکل A : $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

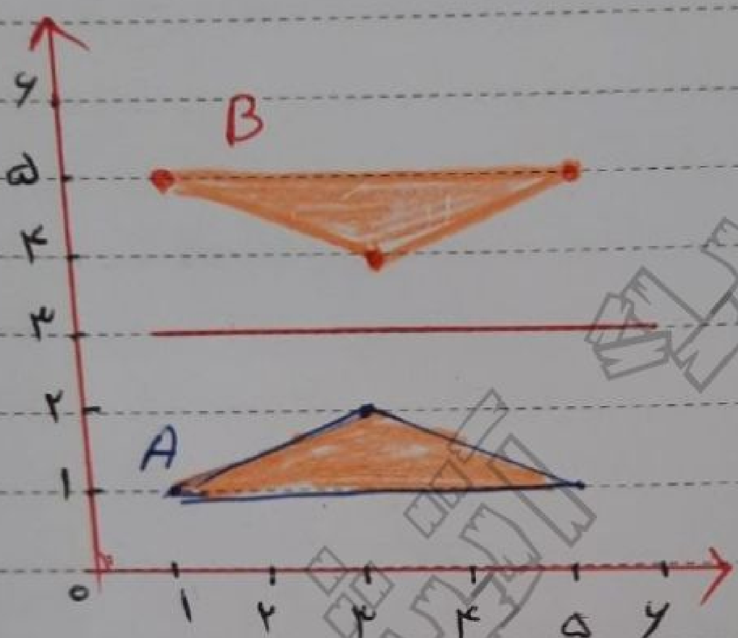
مختصات رأس های قرینه شکل A (شکل B) : $\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$

همانطور که مشاهده می شود چون **محور تقارن خط عمودی** است عرض های نقاط شکل اصلی با عرض های نقاط متناظر در شکل قرینه یکسان است

Day. Month. Year.

مثال

در شکل زیر قرینه‌ی شکل A را نسبت به خط افقی رسم کرده و مختصات رأس های شکل A و قرینه اش را به دست آورید



مختصات رأس های شکل A: $\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۵\\۱\end{bmatrix}$

مختصات رأس های قرینه‌ی شکل A «شکل B»: $\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}۱\\۵\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}۵\\۵\end{bmatrix}$

همانطور که مشاهده می شود، اگر محور تقارن، افقی باشد طول های نقاط شکل اصلی با طول نقاط متناظر در شکل قرینه اش یکسان است