درسنامه درس حسابان ۲

(فصل ۲ – مثلثات)

سال دوازدهم – رشته ریاضی فیزیک

شامل درسنامه کاربردی و حل مثال

- ابراهیم موسی پور

★ تناوب و تانژانت ★

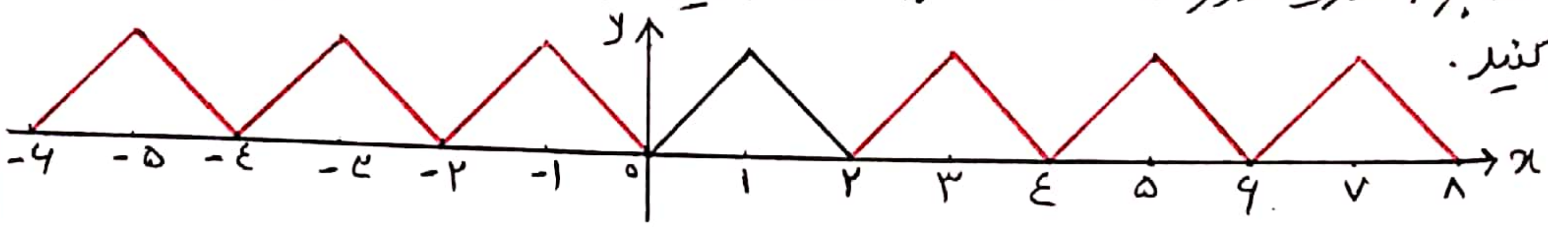
★ تعریف تابع متناوب: تابع f را با دوره‌ی تناوب مثبت T، متناوب می‌نامند، هرگاه:

الف) برای هر $x \in D_f$، داشته باشیم: $(x \pm T) \in D_f$ ب) $f(x \pm T) = f(x)$

★ لازم به تذکر است که کوچک‌ترین عدد مثبت T را دوره‌ی تناوب می‌نامند.

به زبان ساده هرگاه در تابع متناوب f با دوره‌ی تناوب T، از نقطه‌ای به طول x روی محور طول‌ها و واقع در D_f، به اندازه‌ی T جلو یا عقب برویم، یعنی به نقاطی به طول $x+T$ و $x-T$ برسیم، در این نقاط، عرض روی نمودار f، با عرض در نقطه‌ی x برابر است. لذا اگر تکه‌ای از نمودار تابع متناوب f را در فاصله‌ای به طول T داشته باشیم، با تکرار این تکه، می‌توان نمودار کامل این تابع را به دست آورد.

★ مثال: نمودار تابع متناوب f، در یک دوره‌ی تناوب آن به صورت زیر رسم شده است. نمودار f را در فاصله‌ی $[-6, 8]$ رسم کنید.



★ نکته: در مورد توابع با ضابطه‌ی $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$، داریم:

۱) $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ۲) $max = |a| + c$ و ۳) $min = -|a| + c$

★ مثال: دوره‌ی تناوب و مقادیر max و min هر یک از توابع زیر را معین کنید.

الف) $y = 3\sin(2x) - 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ، $max = 3 + (-2) = 1$ ، $min = -3 + (-2) = -5$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos\frac{\pi}{2}x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ ، $max = |-1| + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$ ، $min = -1 + \sqrt{3}$

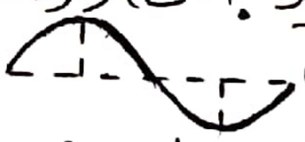
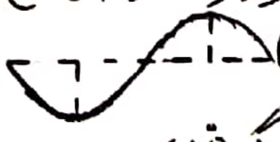
★ مثال: تابعی مثال بزنید (مثلثاتی)، که در آن: $T = 2$ ، $max = 5$ و $min = -1$ باشد.

★ نکته: در این مسائل تابع مورد نظر را می‌توان به صورت: $y = a\sin bx + c$ یا $y = a\cos bx + c$ در نظر گرفت، (فرق نمی‌کند) و بهتر است که b را مثبت در نظر بگیریم.

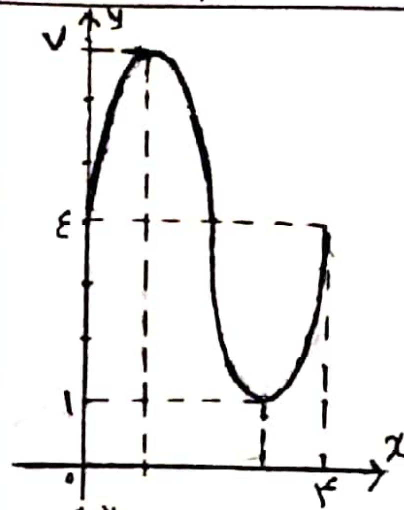
جواب مثال: $y = a\sin bx + c$ و $T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow |b| = \pi \Rightarrow \boxed{b = \pi}$

$$\begin{cases} max = 5 \\ \text{و} \\ min = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 2} \Rightarrow |a| + 2 = 5 \Rightarrow |a| = 3 \Rightarrow \boxed{a = 3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 3\sin \pi x + 2}$$

★ نکته: اگر قسمتی از نمودار تابعی مثلثاتی در سمت راست محور yها (چسبیده به آن) داده شده بود و معادله‌ی تابع را خواسته باشند، به نمودار نگاه می‌کنیم، اگر نمودار به صورت‌های: ①  یا ②  بود، معادله‌ی تابع را به صورت $y = a\sin bx + c$ در نظر می‌گیریم که در حالت ①، $b > 0$ و $a > 0$ معین می‌گردند، و در حالت ② نیز $b > 0$ و $a < 0$ لحاظ می‌شوند.

همچنین اگر نمودار در سمت راست محور yها به صورت‌های: ①  یا ②  بود، معادله‌ی تابع را به صورت $y = a\cos bx + c$ در نظر می‌گیریم. در حالت ①، $b > 0$ و $a > 0$ معین می‌گردند، و در حالت ② نیز $b > 0$ و $a < 0$ لحاظ می‌شود. (مثال مربوط به این نکته، در صفحه‌ی بعد)

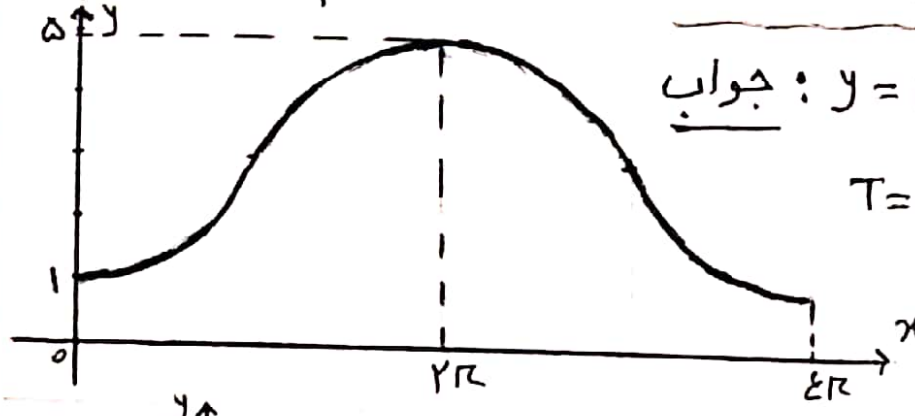


مثال: ضابطه‌ی مربوط به هریک از نمودارهای داده شده زیر را بنویسید.

جواب: $y = a\sin bx + c\,,\ a>0\,,\ b>0\,,\ T=4\,,\ \max=7\,,\ \min=1$

$$T=4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=4 \Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{4} \Rightarrow b=\frac{\pi}{2}$$

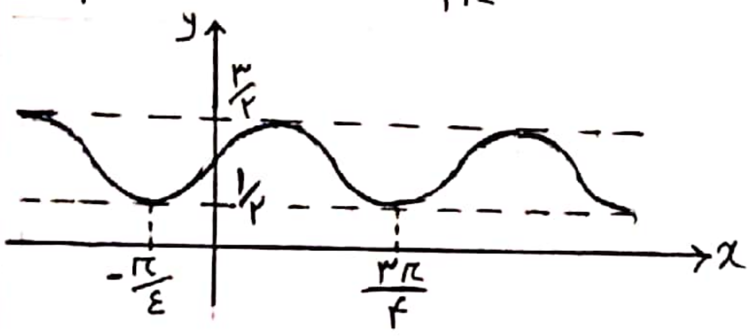
$$\begin{cases}\max=7\\ \min=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|a|+c=7\\ -|a|+c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=4\\ a=3\end{cases} \Rightarrow \boxed{y=3\sin\frac{\pi}{2}x+4}$$



جواب: $y=a\cos bx+c\,,\ a<0\,,\ b>0\,,\ T=4\pi\,,\ \max=5\,,\ \min=1$

$$T=4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=4\pi \Rightarrow |b|=\frac{2\pi}{4\pi} \Rightarrow b=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}\max=5\\ \min=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}|a|+c=5\\ -|a|+c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}c=3\\ |a|=2 \Rightarrow a=-2\end{cases} \Rightarrow \boxed{y=-2\cos\frac{x}{2}+3}$$



* **مثال** (کنکور ۹۸ - داخل کشور): شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=1+a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟

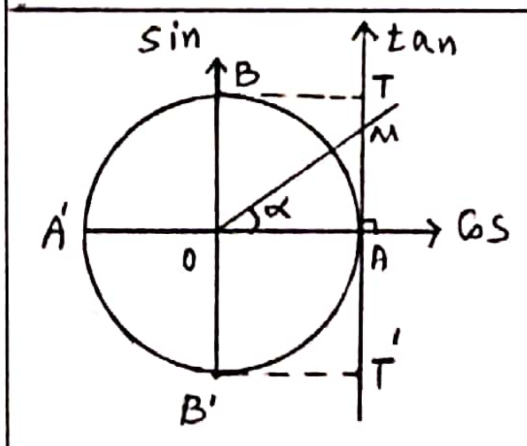
۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

جواب: $y=1+a(\frac{1}{2}\sin 2bx) \Rightarrow y=\frac{a}{2}\sin 2bx+1$ و $T=\frac{3\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=\pi$ (با توجه به نمودار)

$\Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|}=\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{2b}=\pi \Rightarrow \underline{b=1}$ / $\max=\frac{3}{2} \Rightarrow |\frac{a}{2}|+1=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{a=1} \Rightarrow a+b=2$

(گزینه‌ی سوم)

* توجه: چون نمودار در سمت راست محور yها و چسبیده به آن، به صورت  می‌باشد، پس ضریب sin یعنی $\frac{a}{2}$، مثبت و ضریب x یعنی 2b نیز مثبت می‌باشند، در نتیجه $a>0$ و $b>0$ باید در نظر گرفته شوند.



★ **معرفی تانژانت در دایره‌ی مثلثاتی (شکل مقابل):**

می‌دانیم در دایره‌ی مثلثاتی، شعاع، ۱ واحد بوده، نقطه‌ی A روی دایره مبدأ کمانها، و جهت مثبت نیز روی دایره، عکس حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد.

همچنین قطر A'A محور کسینوس و O مبدأ آن و $OA=1$ و $OA'=-1$ می‌باشد.

قطر B'B نیز محور سینوس و O مبدأ آن و $OB=1$ و $OB'=-1$ می‌باشد.

* نکته: همواره $-1 \le \sin\alpha \le 1$ و $-1 \le \cos\alpha \le 1$ می‌باشند.

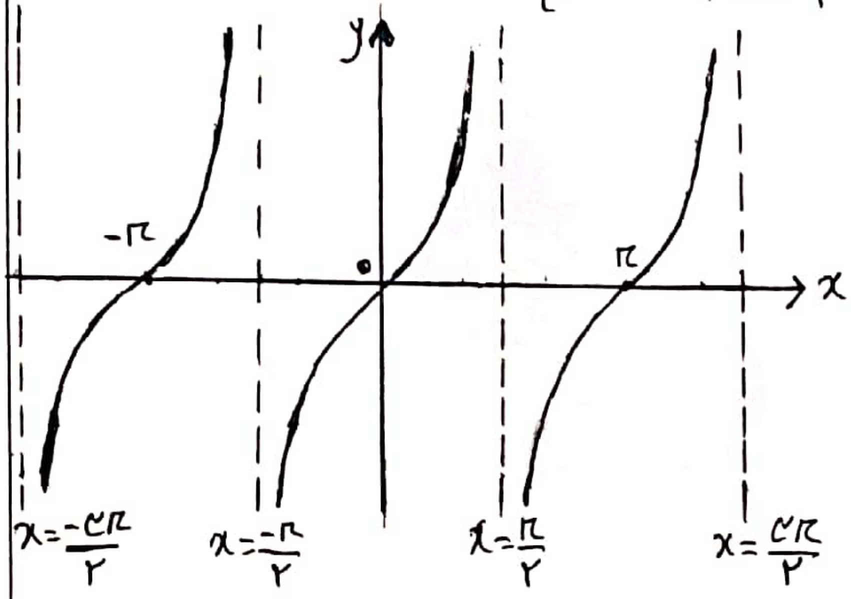
- حال به معرفی tan می‌پردازیم. در دایره‌ی مثلثاتی، خط عمود بر محور کسینوس در نقطه‌ی A را محور تانژانت می‌نامند. نقطه‌ی A هم مبدأ کمانها و هم مبدأ محور تانژانت می‌باشد. ۱ واحد روی محور تانژانت همان شعاع دایره می‌باشد. لذا $AT=1$ و $AT'=-1$. برای تعیین $\tan\alpha$ در دایره مثلثاتی، از مرکز دایره به انتهای کمان (یا زاویه مرکزی) α، شعاعی رسم می‌کنیم و این شعاع را امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت در نقطه‌ای مانند M قطع شود، در این صورت: $\tan\alpha=AM$.

واضح است هرگاه انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی α در ربع اول یا سوم باشد، آنگاه $\tan\alpha>0$ و اگر انتهای کمان مربوط به زاویه‌ی α، در ربع دوم یا چهارم باشد، آنگاه $\tan\alpha<0$ خواهد بود. در نقاط A و A'، مقدار تانژانت صفر است، $\tan 0=0$ ، $\tan\pi=0$ ، و در نقاط B و B'، تانژانت تعریف نمی‌شود، یعنی برای $\tan\frac{\pi}{2}$ و $\tan\frac{3\pi}{2}$، مقداری نمی‌توان در نظر گرفت.

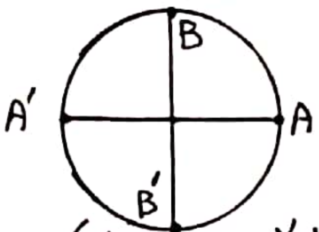
* تغییرات تانژانت: در جدول زیر تغییرات تانژانت در ربع های اول تا چهارم بررسی شده است.
همانطور که ملاحظه می شود، تغییرات تانژانت در هر ناحیه صعودی است.

ناحیه	ربع اول				ربع دوم				ربع سوم				ربع چهارم				
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\tan\alpha$	0	$\nearrow \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow 1$	$\nearrow \sqrt{3}$	$\nearrow +\infty \mid -\infty$	$\nearrow -\sqrt{3}$	$\nearrow -1$	$\nearrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow 0$	$\nearrow \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow 1$	$\nearrow \sqrt{3}$	$\nearrow +\infty \mid -\infty$	$\nearrow -\sqrt{3}$	$\nearrow -1$	$\nearrow -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow 0$

* تابع تانژانت: همان طور که مشاهده شد، به ازای هر: $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ؛ $(k \in \mathbb{Z})$، مقدار $\tan x$، عددی حقیقی می شود. لذا تابع $y = \tan x$ با دامنه‌ی: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$، تابعی متناوب است با دوره‌ی تناوب $T = \pi$ و نمودارش در دستگاه مختصات به صورت روبرو است.



* لازم به تذکر است، تابع $y = \tan x$، max و min ندارد.
این تابع در کل دامنه‌ی تعریفش یکنوا نیست، ولی در هر فاصله ای که تعریف شده باشد، مانند $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ یا $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$، اکیداً صعودی است.



★ درس دوم: معادلات مثلثاتی ★

مقدمه: یادآوری و تکمیل مطالبی از مثلثات (با توجه به شکل مقابل)

۱- الف) هرگاه در دایره مثلثاتی، انتهای کمان x بر نقطه‌ی A واقع باشد، آن گاه: $(k \in \mathbb{Z})$ ؛ $x = 2k\pi$ و بالعکس.

ب) هرگاه در دایره مثلثاتی، انتهای کمان x بر نقطه‌ی A' واقع باشد، آن گاه: $(k \in \mathbb{Z})$ ؛ $x = 2k\pi + \pi$ و بالعکس.

پ) هرگاه در دایره‌ی مثلثاتی انتهای کمان x بر نقطه‌ی B واقع باشد، آن گاه: $(k \in \mathbb{Z})$ ؛ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ و بالعکس.

ت) هرگاه در دایره‌ی مثلثاتی انتهای کمان x بر نقطه‌ی B' واقع باشد، آن گاه: $(k \in \mathbb{Z})$ ؛ $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ و بالعکس.

ث) هرگاه در دایره مثلثاتی انتهای کمان x بر نقطه‌ی A یا A' واقع باشد، آن گاه: $(k \in \mathbb{Z})$ ؛ $x = k\pi$ و بالعکس.

ج) هرگاه در دایره مثلثاتی، انتهای کمان x بر نقطه‌ی B یا B' واقع باشد، آن گاه: $(k \in \mathbb{Z})$ ؛ $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و بالعکس.

چ) هرگاه در دایره مثلثاتی، انتهای کمان x بر نقطه‌ی A یا A' یا B یا B' واقع باشد، آن گاه: $(k \in \mathbb{Z})$ ؛ $x = \frac{k\pi}{2}$ و بالعکس.

۲- جدول نسبت های مثلثاتی بعضی از زوایا (کمانها):

نسبت \ α	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	0° یا $2k\pi$	90° یا $2k\pi + \frac{\pi}{2}$	180° یا $2k\pi + \pi$	270° یا $2k\pi - \frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	0	-1
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
$\tan\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0	نامعین	0	نامعین
$\cot\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	نامعین	0	نامعین	0

۳- علامت نسبت های مثلثاتی در نواحی چهارگانه:

الف) سینوس در ناحیه اول و دوم + است و در ناحیه سوم و چهارم منفی است.

ب) کسینوس در ناحیه اول و چهارم + است و در ناحیه دوم و سوم منفی است.

پ) تانژانت و کتانژانت در ناحیه اول و سوم + می باشند و در ناحیه دوم و چهارم منفی اند.

۴- الف) نسبت های مثلثاتی کمانهای $\frac{5\pi}{6}$، $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ همان نسبت های مثلثاتی $\frac{\pi}{6}$ می باشند، با درنظرگرفتن علامت.

ب) نسبت های مثلثاتی کمانهای $\frac{3\pi}{4}$، $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$، همان نسبت های مثلثاتی کمان $\frac{\pi}{4}$ می باشند، با درنظرگرفتن علامت.

پ) نسبت های مثلثاتی کمانهای $\frac{2\pi}{3}$، $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$، همان نسبت های مثلثاتی کمان $\frac{\pi}{3}$ می باشند، با درنظرگرفتن علامت.

مثال: $\tan\overset{\text{ربع دوم}}{\frac{5\pi}{6}} = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ / $\sin\overset{\text{سوم}}{\frac{5\pi}{4}} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ / $\cos\overset{\text{چهارم}}{\frac{5\pi}{3}} = +\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

۵- روابط بین نسبت های مثلثاتی:

الف) $\sin^2x+\cos^2x=1 \Rightarrow \sin^2x=1-\cos^2x \ , \ \cos^2x=1-\sin^2x$

ب) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ، پ) $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ ت) $\tan x.\cot x=1 \Rightarrow \tan x=\frac{1}{\cot x}, \cot x=\frac{1}{\tan x}$

ث) $\cos^2x=\frac{1}{1+\tan^2x} \Rightarrow 1+\tan^2x=\frac{1}{\cos^2x}$ ج) $\sin^2x=\frac{1}{1+\cot^2x} \Rightarrow 1+\cot^2x=\frac{1}{\sin^2x}$

۶- نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه:

الف) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ب) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

پ) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ت) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

مثال (نکته): درستی هر یک از اتحادهای زیر را ثابت کنید.

1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) \xRightarrow{\text{اثبات}} \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4})$

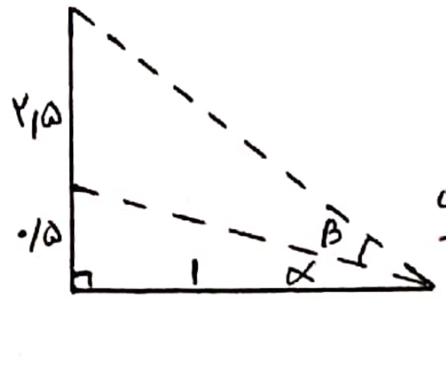
$=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)=\sin x+\cos x$ ✓

2) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$ اثبات شبیه (1)

★ مسأله: ثابت کنید: $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$ و $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

اثبات: $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\frac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}}+\frac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan.\tan\beta}$

* اثبات فرمول مربوط به $\tan(\alpha-\beta)$ هم شبیه $\tan(\alpha+\beta)$ می باشد.



* مثال: با توجه به شکل مقابل، مقدار زاویه β را حساب کنید.

جواب: $\tan\alpha=\frac{0/5}{1}=0/5$ و $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2/5+0/5}{1}=3$

$\Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=3 \Rightarrow \frac{0/5+\tan\beta}{1-0/5\times\tan\beta}=3 \Rightarrow 0/5+\tan\beta=3-1/5\times\tan\beta$

$\Rightarrow 2/5\tan\beta=2/5 \Rightarrow \tan\beta=1 \Rightarrow \boxed{\beta=45^\circ}$

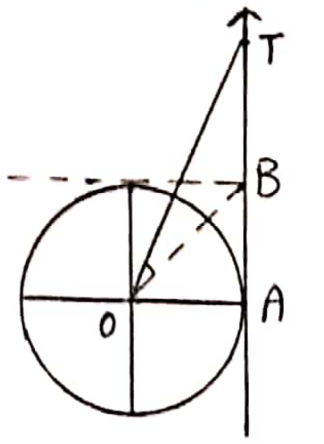
* **مثال**: فرمولی برای $\tan 2x$ بدست آورید.

جواب: $\tan 2x = \tan(x+x) = \frac{\tan x+\tan x}{1-\tan x.\tan x} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

* **مثال**: (کنکور ۹۹ - داخل کشور) اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ برابر ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+3x-1=0$ باشند. $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟ ۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) -3 ۴) -1

جواب: $2x^2+3x-1=0 \Rightarrow x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-3}{2} \Rightarrow \tan\alpha+\tan\beta=\frac{-3}{2}$ و $x_1x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \tan\alpha.\tan\beta=\frac{-1}{2}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}=\frac{-3/2}{1-(-1/2)}=\frac{-3/2}{3/2}=-1$$ (گزینه‌ی چهارم)



* **مثال**: (کنکور ۹۹ - خارج کشور) با توجه به دایره‌ی مثلثاتی زیر، اگر $BT=2$ باشد، مقدار $\tan(T\hat{O}B)$، کدام است؟ ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

جواب: $A\hat{O}B=45, AB=1, T\hat{O}B=\alpha$, $\tan(A\hat{O}T)=1+2=3 \Rightarrow \tan(\alpha+45)=3$

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan45}{1-\tan\alpha.\tan45}=3 \Rightarrow \frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=3 \Rightarrow \tan\alpha+1=3-3\tan\alpha$$

$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{2}$ (گزینه‌ی سوم)

۷- نسبت‌های مثلثاتی $2x$:

الف) $\sin 2x = 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$

$$\cos 2x=\begin{cases}\cos^2x-\sin^2x\\ 2\cos^2x-1\\ 1-2\sin^2x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}\\ \sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}\end{cases}$$

و ب) $\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}$

★ **معادلات مثلثاتی:**

۱- جواب‌های کلی معادله‌ی مثلثاتی: $\sin x=\sin\alpha$، عبارتند از: $x=2k\pi+\alpha$, $x=2k\pi+\pi-\alpha$ $(k\in Z)$

* **مثال**: معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ ، $x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

ب) $2\sin x-\sqrt{3}=0 \Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ، $x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$

پ) $2\sin 3x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow \sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x=\sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases}3x=2k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\\ 3x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{3\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\end{cases}$

ت) $\sin 2x=\sin 3x \Rightarrow \sin 3x=\sin 2x \Rightarrow \begin{cases}3x=2k\pi+2x \Rightarrow x=2k\pi\\ 3x=2k\pi+\pi-2x \Rightarrow 5x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{5}\end{cases}$

ث) $\sin x.\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 2\sin x\cos x=2\times\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x=\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{6}\\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{3}\end{cases}$

ج) $\sin x+\cos x=1$; $0\le x\le 2\pi \Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1 \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2k\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases} \xRightarrow{[0,2\pi]}$ جواب‌های واقع در $[0,2\pi]$: $x=0$ ، 2π ، $\frac{\pi}{2}$

* چند نکته پیرامون معادله ی سینوس: الف) هرگاه: $\sin x=-\sin\alpha$، ابتدا قرار می دهیم $\sin x=\sin(-\alpha)$، سپس معادله را حل می کنیم. مثال: معادله ی زیر را حل کنید.

$$2\sin 2x+\sqrt{3}=0 \Rightarrow \sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x=-\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin 2x=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=2k\pi+\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{6} \\ 2x=2k\pi+\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{4\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi+\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

ب) هرگاه: $\sin x=\cos\alpha$، ابتدا قرار می دهیم $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$، سپس معادله را حل می کنیم. مثال: معادله ی زیر را حل کنید.

$$\sin 3x-\cos x=0 \Rightarrow \sin 3x=\cos x \Rightarrow \sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow 4x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8} \\ 3x=2k\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Rightarrow 3x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{2}+x \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

پ) حالات خاص: $\boxed{\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi}$ ، $\boxed{\sin x=-1 \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}}$ ، $\boxed{\sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$

* مثال: معادله ی مقابل را حل کنید.

$$2\cos^2 x-\sin x+1=0 \Rightarrow 2(1-\sin^2 x)-\sin x+1=0 \Rightarrow 2-2\sin^2 x-\sin x+1=0 \Rightarrow -2\sin^2 x-\sin x+3=0$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-3=0 \Rightarrow \sin x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(-6)}}{4}=\frac{-1\pm 5}{4} \Rightarrow \sin x=-\frac{3}{2}\ ✗ \ ، \ \sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۲- جواب های کلی معادله ی مثلثاتی $\cos x=\cos\alpha$ عبارتند از: $x=2k\pi-\alpha\ (k\in\mathbb{Z})$ ، $x=2k\pi+\alpha$

* مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ ، $x=2k\pi-\frac{\pi}{4}$

ب) $2\cos x-1=0,\ x\in[-3\pi,\pi] \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ، $x=2k\pi-\frac{\pi}{3}$

جواب های واقع در $[-3\pi,\pi]$: $x=\frac{\pi}{3}$ ، $-2\pi+\frac{\pi}{3}=-\frac{5\pi}{3}$ ، $-\frac{\pi}{3}$ ، $-2\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{7\pi}{3}$ (چهار جواب اختصاصی)

* چند نکته پیرامون معادله ی کسینوس:

الف) هرگاه $\cos x=-\cos\alpha$، ابتدا قرار می دهیم $\cos x=\cos(\pi-\alpha)$، سپس معادله را حل می کنیم. مثال: معادله ی زیر را حل کنید.

$$\cos x(2\cos x-9)=5 \Rightarrow 2\cos^2 x-9\cos x-5=0 \Rightarrow \Delta=81-4(-10)=121 \Rightarrow \cos x=\frac{9\pm 11}{4}$$

$$\Rightarrow \cos x=5\ ✗ \ ، \ \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x=-\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

ب) هرگاه $\cos x=\sin\alpha$، ابتدا قرار می دهیم: $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$، سپس معادله را حل می کنیم. مثال: معادله ی زیر را حل کنید.

$$\cos 3x+\sin 2x=0 \Rightarrow \cos 3x=-\sin 2x \Rightarrow \cos 3x=\sin(-2x) \Rightarrow \cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(-2x)\right)$$

$$\Rightarrow \cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+2x \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \\ 3x=2k\pi-\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) \Rightarrow 5x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{5}-\frac{\pi}{10} \end{cases}$$

پ) حالات خاص: $\boxed{\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2}}$ ، $\boxed{\cos x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\pi}$ ، $\boxed{\cos x=1 \Rightarrow x=2k\pi}$

مثال: معادله ی مقابل را حل کنید.

$$\cos 2x=\cos x+2 \Rightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x-2=0 \Rightarrow 2\cos^2 x-\cos x-3=0$$

$$\Rightarrow \Delta=1-4(-6)=25 \Rightarrow \cos x=\frac{1\pm 5}{4} \Rightarrow \cos x=\frac{3}{2}\ ✗ \ ، \ \cos x=-1 \Rightarrow x=2k\pi+\pi$$

۳- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\tan x=\tan\alpha$ عبارت است از: $x=k\pi+\alpha$ ، $(k\in \mathbb{Z})$

* مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\tan x-1=0 \Rightarrow \tan x=1 \Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{4}}$

ب) $\tan x=\tan 5x \Rightarrow \tan 5x=\tan x \Rightarrow 5x=k\pi+x \Rightarrow 4x=k\pi \Rightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{4}}$

* چند نکته پیرامون حل معادله‌ی تانژانت:

الف) هرگاه $\tan x=-\tan\alpha$ ، ابتدا قرار می‌دهیم $\tan x=\tan(-\alpha)$ ، سپس معادله را حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\sqrt{3}\tan x+3=0 \Rightarrow \tan x=-\frac{3}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan x=-\sqrt{3} \Rightarrow \tan x=-\tan\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \tan x=\tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x=k\pi+(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \boxed{x=k\pi-\frac{\pi}{3}}$$

ب) هرگاه $\tan x=\cot\alpha$ ، ابتدا قرار می‌دهیم $\tan x=\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ ، سپس معادله را حل می‌کنیم.

* مثال (کنکور ۹۹- داخل کشور) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\tan(3x)\tan(x)=1$ ، در بازه‌ی $[\pi,2\pi]$ ، کدام است؟

۱) 5π ۲) 6π ۳) $\frac{9\pi}{2}$ ۴) $\frac{11\pi}{2}$

جواب: $\tan(3x).\tan(x)=1 \Rightarrow \tan(3x)=\frac{1}{\tan(x)} \Rightarrow \tan(3x)=\cot(x) \Rightarrow \tan(3x)=\tan(\frac{\pi}{2}-x)$

$\Rightarrow 3x=k\pi+\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow 4x=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$ (گزینه‌ی دوم)

جواب‌های واقع در $[\pi,2\pi]$: $x=\pi+\frac{\pi}{8} , \frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{8} , \frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{8} , \frac{7\pi}{4}+\frac{\pi}{8} \Rightarrow$ مجموع $=\frac{9\pi}{8}+\frac{11\pi}{8}+\frac{13\pi}{8}+\frac{15\pi}{8}=6\pi$

پ) هرگاه $\tan x=0$ ، آنگاه: $x=k\pi$. (حالت خاص)

★ حل تمرینات صفحه‌ی ۴۴ کتاب درسی.

$\boxed{1}$ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{2}=\sin 3x \Rightarrow \sin 3x=1 \Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$

ب) $\cos 2x-\cos x+1=0 \Rightarrow 2\cos^2x-\cancel{1}-\cos x+\cancel{1}=0 \Rightarrow \cos x(2\cos x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\cos x=0 \Rightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{2}} \\ \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}}\end{cases}$

پ) $\cos x=\cos 2x \Rightarrow \cos 2x=\cos x \Rightarrow \begin{cases}2x=2k\pi+x \Rightarrow \boxed{x=2k\pi} \\ 2x=2k\pi-x \Rightarrow 3x=2k\pi \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}\end{cases}$

ت) $\cos 2x-3\sin x+1=0 \Rightarrow 1-2\sin^2x-3\sin x+1=0 \Rightarrow -2\sin^2x-3\sin x+2=0 \Rightarrow \Delta=9+16=25$

$\Rightarrow \sin x=\frac{3\pm 5}{-4} \Rightarrow \sin x=-2$ ✗ ، $\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{6}} , \boxed{x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}}$

ث) $\cos^2x-\sin x=\frac{1}{4} \Rightarrow 1-\sin^2x-\sin x-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow -\sin^2x-\sin x+\frac{3}{4}=0 \Rightarrow \Delta=1+3=4$

$\Rightarrow \sin x=\frac{1\pm 2}{-2} \Rightarrow \sin x=-\frac{3}{2}$ ✗ ، $\sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6} , x=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$

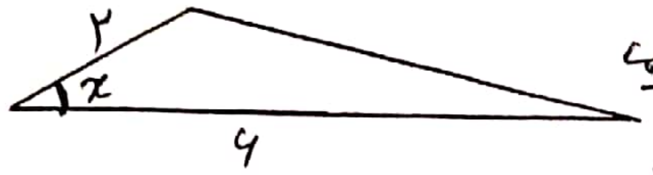
ج) $\sin x-\cos 2x=0 \Rightarrow \sin x=\cos 2x \Rightarrow \cos 2x=\sin x \Rightarrow \cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \\ 2x=2k\pi-(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}+x \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

چ) $\tan(2x-1)=0 \Rightarrow 2x-1=k\pi \Rightarrow 2x=k\pi+1 \Rightarrow x=\frac{k\pi+1}{2}$

2) $\tan 3x = \tan \pi x \Rightarrow 3x = k\pi + \pi x \Rightarrow 3x - \pi x = k\pi \Rightarrow x(3-\pi) = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{3-\pi}$

[۲] مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشد. آنگاه چند مثلث با این خاصیت می‌توان ساخت؟



جواب: $S = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin x = 3 \Rightarrow 6\sin x = 3 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \ ,\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

جواب‌های واقع در $(0, \pi)$: $x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \ ,\ x = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ \Rightarrow$ پس دو مثلث با این خاصیت می‌توان ساخت، یکی مثلثی که زاویه بین دو ضلع ۲ و ۶ آن برابر ۳۰° و دیگری برابر ۱۵۰° است.

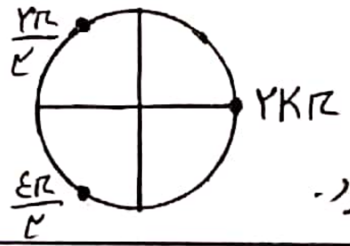
* مثال (کنکور ۹۹ - خارج کشور) جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin(x+\frac{\pi}{6}) + \cos(x+\frac{\pi}{3}) = \cos 2x$، کدام است؟

1) $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in Z$ 2) $x = \frac{k\pi}{3}, k \in Z$ 3) $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$ 4) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$

جواب: $\sin x \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \sin\frac{\pi}{6} + \cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3} = \cos 2x$ (گزینه‌ی اول)

$\Rightarrow \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x} = \cos 2x \Rightarrow \cos x = \cos 2x \Rightarrow \cos 2x = \cos x$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow$



$\Rightarrow$ توضیح اینکه جواب‌های تولید شده توسط $\frac{2k\pi}{3}$، جواب‌های تولید شده توسط $2k\pi$ را نیز شامل می‌شود.

* مثال (کنکور ۹۸ - داخل کشور) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

1) $\frac{5\pi}{2}$ 2) $\frac{7\pi}{2}$ 3) 2π 4) 3π

جواب: $(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cdot \cos x)$

$\Rightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) - (1 - \sin x\cos x) = 0 \Rightarrow (1 - \sin x\cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin x\cos x = 1 \Rightarrow 2\sin x\cos x = 2 \Rightarrow \sin 2x = 2 \ \times \\ \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x+\frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$ جواب‌های واقع در $[0, 2\pi]$: $x = 0, 2\pi, \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ مجموع $= 0 + 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$ (گزینه‌ی اول)

* مثال (کنکور ۹۸ - خارج کشور) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$، در بازه‌ی $[0, 2\pi]$، کدام است؟

1) $\frac{5\pi}{2}$ 2) 3π 3) $\frac{7\pi}{2}$ 4) 4π

جواب: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$\Rightarrow (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow -2\sin^2 x\cos^2 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 4\sin^2 x\cos^2 x = 1 \Rightarrow (2\sin x\cos x)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 2x = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \sin 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow$ جواب‌های واقع در $[0, 2\pi]$: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

$\Rightarrow$ مجموع $= \frac{16\pi}{4} = 4\pi$ (گزینه‌ی چهارم)

پایان جزوه‌ی فصل دوم حسابان (۲)