

# هندسة تحليلی و جبر

فصل



تخمی مسیر حرکت بسیاری از اشیاء را به کمک یک معادله درجه دوم می توان نمایش داد. یادداشت از محیط برنامه نون نمودار تولید هالی را مشاهده کنید که با توابع درجه ۲ مرتبط باشند.



هندسة تحليلی

درس اول

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

درس دوم

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

درس سوم

پایه نهم، کتاب ریاضیات، فصل دوم، درس اول

## یادآوری و تکمیل معادله خط

در بسیاری از پدیده‌های جهان، رابطه خطی بین متغیرها به چشم می‌خورد. بنابراین مطالعه تابع‌های خطی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در سال‌های قبل با مطالبی در این زمینه آشنا شدیم. در این فصل نکات دیگری را در این باره، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

## کار در کلاس

۱ می‌دانیم از هر دو نقطه متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین:  
الف) با داشتن مختصات دو نقطه از یک خط باید بتوان معادله آن را به دست آورد.  
ب) با داشتن معادله یک خط می‌توان با مشخص کردن دو نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم نمود.

۲ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه محورهای مختصات مقابل رسم کنید:

الف)  $L_1: y = 2x + 1$

$x$	-۱	۰
$y$	-۱	۱

ب)  $L_2: y = 2x - 3$

$x$	۰	۲
$y$	-۳	۱

پ)  $L_3: y = 1$

این خط خاص است محور عرض  $y$  را در نقطه  $(0, 1)$  قطع می‌کند و موازی محور  $x$  ها است.

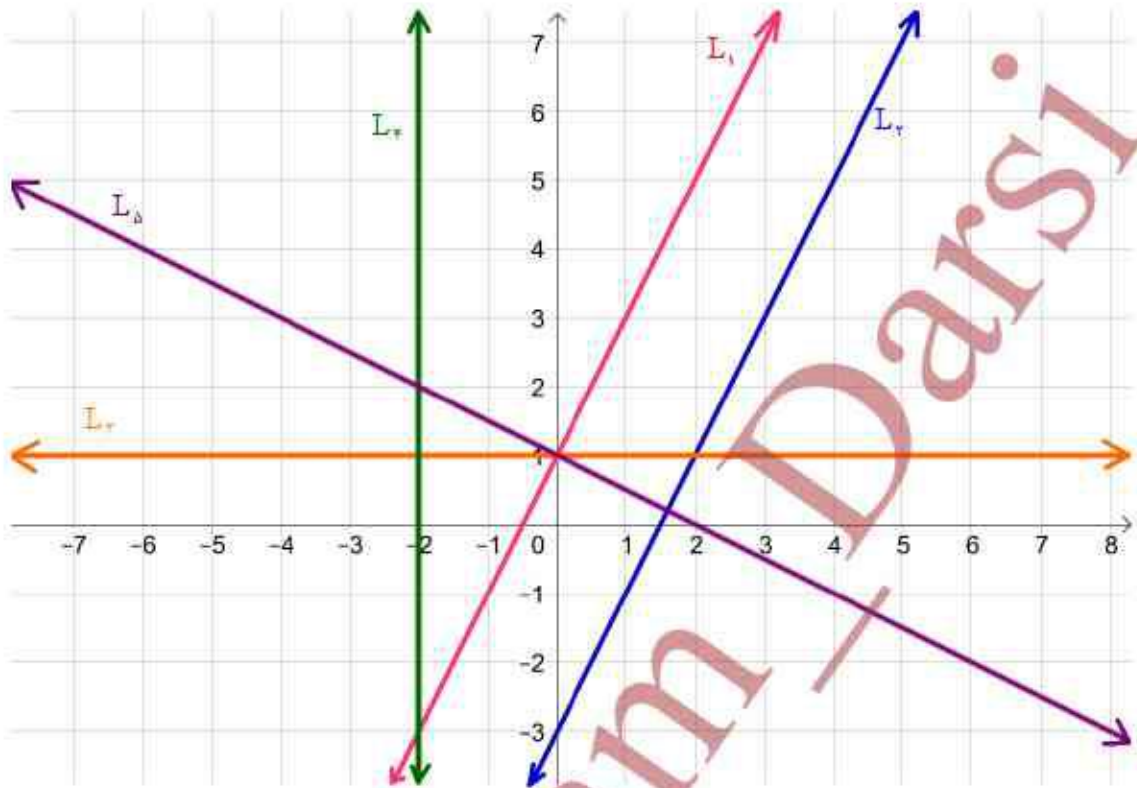
ت)  $L_4: x = -2$

این خط خاص است محور طول  $x$  را در نقطه  $(-2, 0)$  قطع می‌کند و موازی محور  $y$  ها است.

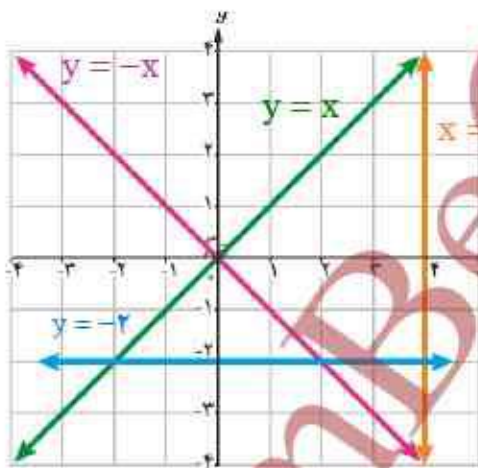
ث)  $L_5: x + 2y = 2$

$x$	۰	۲
$y$	۱	۰

«رسم نمودارها در صفحه بعد»



۳ معادله هر یک از خط‌های مقابل را روی شکل بنویسید.



۴ الف) توجه داریم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی

افقی؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطه غیر هم‌طول  $A$  و  $B$  برابر است با

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای شیب‌های برابر باشند.

۵ الف) از پایه نهم به خاطر داریم که هرگاه خط  $L$  محور  $h$  را در نقطه‌ای با عرض  $h$  قطع کند، آن‌گاه  $h$  ... عرض از مبدأ خط  $L$  نامیده می‌شود.



ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هر یک از پنج خط ذکر شده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی اند؟

الف)  $L_1: y = 2x + 1$

$m = 2, h = 1$

ب)  $L_2: y = 2x - 3$

$m = 2, h = -3$

پ)  $L_3: y = 1$

$m = 0, h = 1$

ت)  $L_4: x = -2$

شیب این خط تعریف نشده است و عرض از مبدأ

هم ندارد.

ث)  $L_5: x + 2y = 2$

$2y = -x + 2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, h = 1$

خط های  $L_1$  و  $L_2$  یا هم موازی هستند.

۶ الف) خط با شیب  $m$  و عرض از مبدأ  $h$  معادله‌ای به صورت  $y = mx + h$  دارد.

ب) می‌خواهیم معادله خط  $L$ ، گذرا از دو نقطه  $A(0, 7)$  و  $B(3, 1)$  را بنویسیم. برای این کار، ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

شیب خط:  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 7}{3 - 0} = -2$

معادله خط:  $y = -2x + h$

روی خط  $L$  واقع است  $B(3, 1)$ :  $1 = -2(3) + h \Rightarrow h = 7$

البته اگر به مختصات نقطه  $A(0, 7)$  از خط  $L$  دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می‌شویم که عرض از مبدأ این خط  $h = 7$  است. پس:

معادله خط  $L$ :  $y = -2x + 7$

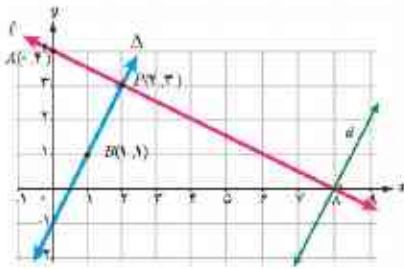
پ) معادله خط گذرنده از نقطه  $P(2, -1)$  را بنویسید؛ به طوری که با خط  $y = 3x - 4$  موازی باشد.

خط گذرنده از نقطه  $P(2, -1)$  با خط  $y = 3x - 4$  موازی است پس  $m = 3$  همچنین  $P(2, -1)$  روی خط است پس

داریم:

$-1 = 3 \times 2 + h \Rightarrow h = -7 \Rightarrow y = 3x - 7$





۱ دو خط  $l$  و  $\Delta$  را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. شیب آنها را مورد توجه قرار می‌دهیم.

شیب خط  $l$  گذرا از نقاط  $A$  و  $B$  :  $m = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{3 - 2}{2 - 0} = \frac{1}{2}$

شیب خط  $\Delta$  گذرا از نقاط  $B$  و  $C$  :  $m' = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{2 - 1}{2 - 1} = 2$

۲ حاصل ضرب شیب‌های دو خط را به دست می‌آوریم :  $mm' = (\frac{1}{2})(2) = 1$

می‌بینیم که شیب‌ها، قرینه معکوس یکدیگرند.

۳ اگر خط دلخواه دیگری مثل  $T$  عمود بر  $L$  را در نظر بگیریم، این خط حتماً با خط  $\Delta$  موازی است؛ پس شیب خط  $T$  برابر عدد

... خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت شیب هر خط عمود بر  $L$  برابر قرینه معکوس شیب خط  $L$  خواهد بود. این مطلب در حالت کلی درست است؛ یعنی

دو خط غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آنها برابر  $(-1)$  باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط  $m$  و  $m'$  باشد، آنگاه شرط عمود بودن آنها آن است که  $mm' = -1$ . به عبارت دیگر شیب هر کدام، قرینه معکوس شیب دیگری باشد.

کار در کلاس ص ۴

۱ در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود؟)

الف)  $L: y = 5x - 2$      $m = 5$      $T: y = -\frac{1}{5}x + 3$      $m' = -\frac{1}{5} \Rightarrow mm' = -1$

ب)  $L: y = \frac{1}{2}x + 7$      $m = \frac{1}{2}$      $T: x - 2y = 1 \Rightarrow x - 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m' = \frac{1}{2} \Rightarrow m = m'$

پ)  $L: 2x - 3y + 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{-a}{b} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$      $T: 3x + 2y = 0 \Rightarrow m' = \frac{-a}{b} \Rightarrow m' = -\frac{3}{2} \Rightarrow mm' = -1$

ت)  $L: x = 1$     این خط عمودی است     $T: y = -3$     خط افقی است بنا بر این دو خط بر هم عمود هستند.

ث)  $L: y = 3x + 1$      $m = 3$      $T: x = 3y - 1 \Rightarrow x = 3y - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m' = \frac{1}{3} \Rightarrow m \neq m', mm' \neq -1$



۲ خط  $L$  به معادله  $2y - 3x = 1$  و خط  $T$  با عرض از مبدأ ۵ به معادله  $y = mx + 5$  را در نظر بگیرید.

الف)  $m$  را طوری بیابید که خط  $T$  با خط  $L$  موازی باشد.

$$2y - 3x = 1 \Rightarrow -3x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow m' = \frac{-a}{b} \Rightarrow m' = \frac{3}{2}$$

$$y = mx + 5 \Rightarrow m = m' = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 5$$

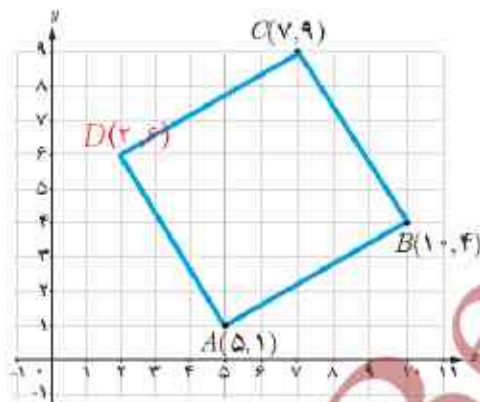
ب) به ازای چه مقداری از  $m$ ، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

$$y = mx + 5 \Rightarrow mm' = -1 \Rightarrow m = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 5$$

۳ مربع  $ABCD$  در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است. به طوری که  $A(5, 1)$  و

$B(10, 4)$  دو رأس مجاور آن هستند.

الف) شیب ضلع  $AB$  را بنویسید.



$$m_{AB} = \frac{4-1}{10-5} = \frac{3}{5} \Rightarrow m_{AB} = \frac{3}{5}$$

ب) شیب ضلع  $AD$  را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید.

می دانیم که ضلع  $AB$  بر ضلع  $AD$  عمود است پس:  $m_{AD} = -\frac{5}{3}$

پ) اگر بدانیم نقطه  $C(7, 9)$  رأس سوم مربع است، مختصات رأس  $D$  را بیابید.

نقطه  $D$  محل برخورد دوباره خط  $AD$  و  $CD$  است اگر معادله ی خط ها گذرنده از این دو خط را به دست آوریم و نقطه ی برخورد آن ها را بیابیم مختصات  $D$  به دست می آید.

$$m_{CD} = \frac{3}{5}, 9 = \frac{3}{5} \times 7 + h \xrightarrow{\times 5} 45 = 21 + 5h \Rightarrow h = \frac{24}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{24}{5} \xrightarrow{\times 5} 3x - 5y = -24$$

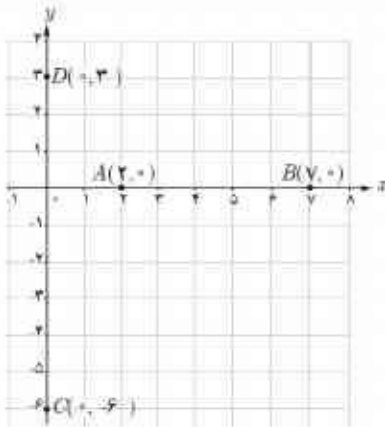
$$m_{AD} = -\frac{5}{3}, 1 = -\frac{5}{3} \times 5 + h \xrightarrow{\times 3} 3 = -25 + 3h \Rightarrow h = \frac{28}{3} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}x + \frac{28}{3} \xrightarrow{\times 3} 5x + 3y = 28$$

$$\begin{cases} 5x + 3y = 28 \\ 3x - 5y = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25x + 15y = 140 \\ 9x - 15y = -72 \end{cases} \Rightarrow 34x = 68 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 5 \times 2 + 3y = 28 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow D(2, 6)$$





شکل مقابل را در نظر بگیرید.



الف) فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  که برابر طول پاره خط  $AB$  است، برابر ۵ است. چه رابطه‌ای بین این عدد با  $x_A$  و  $x_B$  وجود دارد؟

$$AB = |x_B - x_A| = |7 - 2| = |5| = 5$$

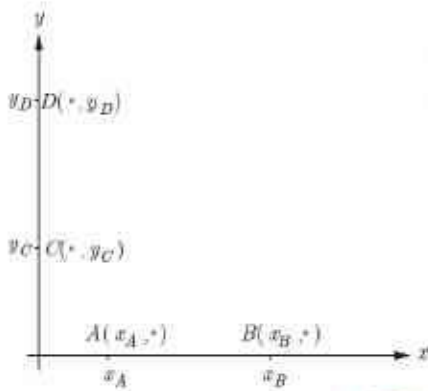
$$BA = |x_A - x_B| = |2 - 7| = |-5| = 5$$

ب) فاصله دو نقطه  $C$  و  $D$  را بر حسب عرض آنها بیان کنید.

$$DC = |y_D - y_C| = |3 - (-6)| = |9| = 9$$

$$CD = |y_C - y_D| = |-6 - 3| = |-9| = 9$$

ب) در شکل مقابل، فاصله نقاط  $A$  و  $B$  را بر حسب طول آنها و فاصله دو نقطه  $C$  و  $D$  را بر حسب عرض آنها به دست آورید.



$$AB = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$

$$CD = |y_D - y_C| = |y_C - y_D|$$

در حالت کلی می‌توان گفت:

۱- اگر  $A$  و  $B$  دو نقطه هم‌عرض در صفحه باشند، آن گاه  $AB = |x_A - x_B|$

۲- اگر  $C$  و  $D$  دو نقطه هم‌طول در صفحه باشند، آن گاه  $CD = |y_C - y_D|$

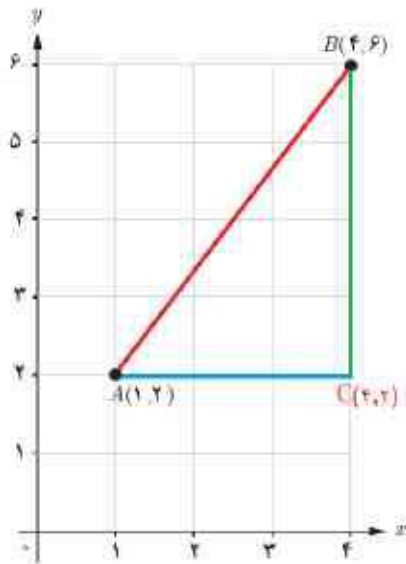
چون طول پاره خط  $AB$  با طول پاره خط  $BA$  برابر است و همواره عددی مثبت است پس باید از قدر مطلق استفاده کنیم (برای پاره خط  $CD$  هم همینطور)

۱ در شکل مقابل فاصله دو نقطه  $A$  و  $B$  را با خط کش به دست آورید.

طول پاره خط مساوی ۵ سانتی متر است.



۲ بدون استفاده از خط کش و تنها با محاسبه، طول پاره خط  $AB$  را به دست آورید. از چه رابطه‌ای استفاده می‌کنید؟



از نقطه  $B$  بر محور  $x$  ها و از نقطه  $A$  بر محور  $y$  ها عمود می‌کنیم تا نقطه  $C$  به دست آید. سپس به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$AB = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

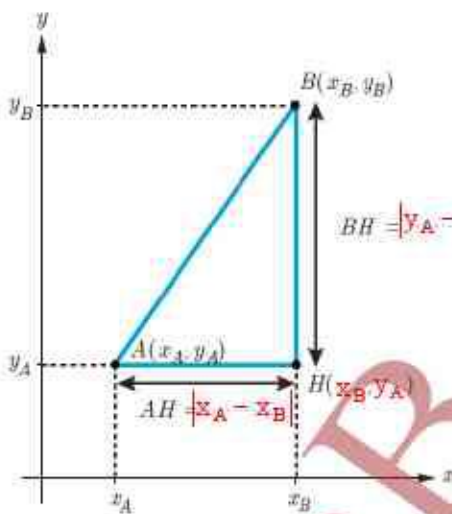
۳ در شکل مقابل:

الف) مختصات نقطه  $H$  را بنویسید.

$$H(x_B, y_A)$$

ب) طول پاره‌های  $AH$  و  $BH$  را مشخص کنید و روی شکل بنویسید.  $BH = |y_A - y_B|$

پ) طول  $AB$  را به کمک قضیه فیثاغورس به دست آورید.



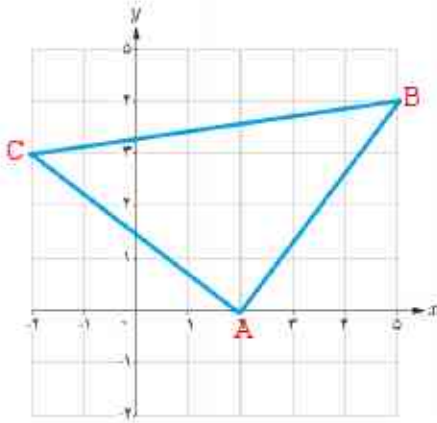
$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{|x_A - x_B|^2 + |y_A - y_B|^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت:

فاصله دو نقطه  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  برابر است با  $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$



۱ نقاط  $A(2, 0)$ ،  $B(5, 4)$  و  $C(-2, 3)$  را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.



الف) محیط مثلث  $ABC$  را با محاسبه طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(2 + 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(5 + 2)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{محیط: } P = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$$

ب)  $ABC$  چه نوع مثلثی است؟

مثلث متساوی الساقین است.

ب) به دوروش نشان دهید  $\triangle ABC$  یک مثلث قائم الزامیه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

الف) طول اضلاع مثلث در قضیه فیثاغورس صدق می کند:  $5^2 + 5^2 = 25 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

ب) دو خط گذرنده از پاره خط های  $AB$  و  $AC$  بر هم عمود هستند زیرا حاصل ضرب شیب این خط ها برابر یا  $-1$  است:

$$m_{AB} = \frac{4 - 0}{5 - 2} = \frac{4}{3}, m_{AC} = \frac{3 - 0}{-2 - 2} = \frac{-3}{4} \Rightarrow m_{AB} \times m_{AC} = \frac{4}{3} \times \frac{-3}{4} = -1$$

$$S = \frac{1}{2} \times AC \times AB \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 12.5$$

۲ در یکی از جاده های کشور تصادفی رخ داده است که مختصات نقطه تصادف بر روی

نقشه مرکز امداد به صورت  $P(50, 30)$  است. نزدیک ترین پایگاه های امداد هوایی به محل

تصادف در نقاط  $A(10, -20)$  و  $B(80, 90)$  واقع اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگرد

امداد به محل حادثه پیشنهاد می کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند).

$$\left. \begin{aligned} PA &= \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(50 - 10)^2 + (30 - (-20))^2} = \sqrt{1600 + 2500} = \sqrt{4100} = 10\sqrt{41} \\ PB &= \sqrt{(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2} = \sqrt{(50 - 80)^2 + (30 - 90)^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500} = 10\sqrt{45} \end{aligned} \right\} = PB > PA$$

پایگاه  $A$  را پیشنهاد می دهیم زیرا به محل نزدیک تر حادثه است.

۳ الف) فاصله نقطه  $N(-6, 8)$  تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

$$ON = \sqrt{(x_N - x_0)^2 + (y_N - y_0)^2} = \sqrt{(-6 - 0)^2 + (8 - 0)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

ب) فاصله نقطه  $E(x_E, y_E)$  تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

$$OE = \sqrt{(x_E - x_0)^2 + (y_E - y_0)^2} = \sqrt{(x_E - 0)^2 + (y_E - 0)^2} = \sqrt{x_E^2 + y_E^2} \Rightarrow OE = \sqrt{x_E^2 + y_E^2}$$

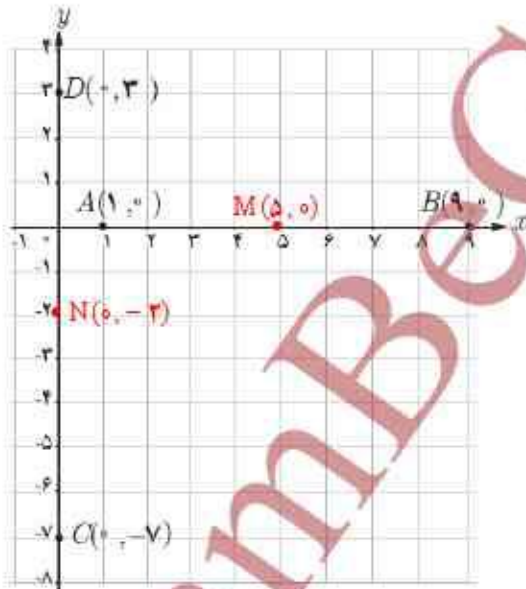
### مختصات نقطه وسط پاره خط

#### فعالیت

این شکل را در نظر بگیرید.

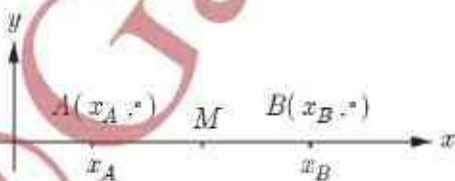
الف) نقطه وسط پاره خط  $AB$  را  $M$  بنامید.  $M$  را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطه وسط پاره خط  $CD$  را  $N$  بنامید و  $N$  را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.



ب) مطابق شکل،  $A$  و  $B$  دو نقطه دلخواه روی محور  $x$  ها هستند. اگر  $M$  وسط  $AB$  باشد،

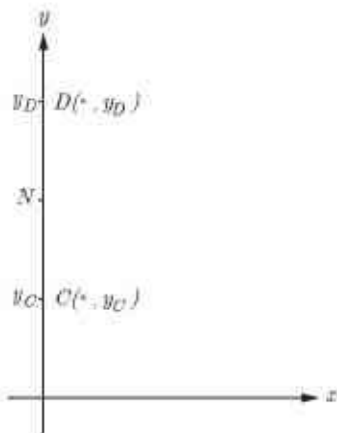
طول نقطه  $M$  را به دست آورید.



$$AB \text{ وسط } M \Rightarrow AM = MB$$

$$\Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$\Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

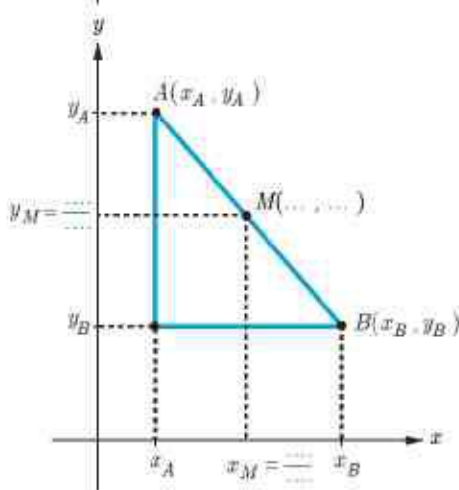


ت) در شکل مقابل،  $C$  و  $D$  دو نقطه دلخواه روی محور  $y$  ها هستند. اگر  $N$  وسط  $CD$  باشد، عرض نقطه  $N$  را بیابید.

$$CD \text{ وسط } N \Rightarrow CN = ND \dots\dots$$

$$\Rightarrow y_N - y_C = y_D - y_N$$

$$\Rightarrow 2y_N = y_C + y_D \Rightarrow y_N = \frac{y_C + y_D}{2}$$



ت) اگر  $A$  و  $B$  دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند و  $M$  نقطه وسط  $AB$ ، آنگاه با توجه به شکل مقابل می توان نشان داد:

مختصات نقطه وسط پاره خط  $AB$  عبارت است از  $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ .

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

کار در کلاس

۱) مثلث با رئوس  $A(1, 9)$ ،  $B(3, 1)$  و  $C(7, 11)$  را در نظر بگیرید و آنها را در دستگاه

محورهای مختصات مقابل مشخص کنید.

الف) مختصات  $M$ ، نقطه وسط ضلع  $BC$  را مشخص کنید.

$$M = \left(\frac{3+7}{2}, \frac{1+11}{2}\right) = (5, 6)$$

ب) طول میانه  $AM$  را محاسبه کنید.

در این قسمت یاد آوری میانه مثلث ضروری به نظر می رسد.

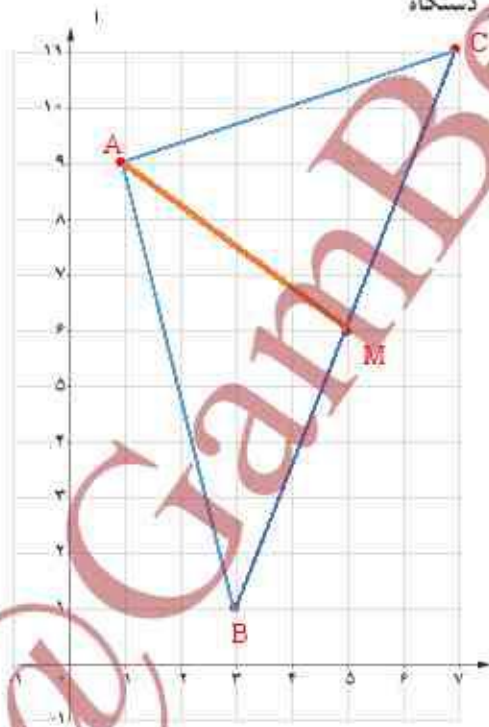
(پاره خطی که وسط یک ضلع را به رأس مقابل آن ضلع وصل می کند.)

$$AM = \sqrt{(5-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

ب) معادله میانه  $AM$  را به دست آورید.

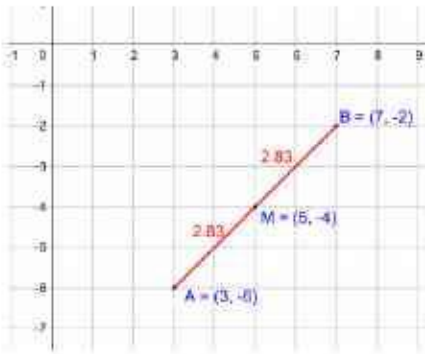
$$m_{AM} = \frac{9-6}{1-5} = \frac{-3}{-4} \Rightarrow y-6 = \frac{-3}{-4}(x-5)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4} \quad \therefore 3x + 4y = 39$$





۲ الف نقطه  $N(5, -4)$  وسط پاره خط واصل بین دو نقطه  $A$  و  $B(7, -2)$  است. مختصات نقطه  $A$  را بیابید.



چون  $N$  وسط پاره خط  $AB$  است پس داریم:

$$\bar{x}_M = \frac{\bar{x}_A + \bar{x}_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{\bar{x}_A + 7}{2} \Rightarrow \bar{x}_A = 3$$

$$\bar{y}_M = \frac{\bar{y}_A + \bar{y}_B}{2} \Rightarrow -4 = \frac{\bar{y}_A + (-2)}{2} \Rightarrow \bar{y}_A = -6$$

ب) قرینه نقطه  $A(1, 2)$  نسبت به نقطه  $M(-1, 4)$  را به دست آورید.

یاد آوری قرینه ی نقطه ای نسبت به یک نقطه ی دیگر در صفحه :

در شکل مقابل نقطه ی  $Q'$  قرینه ی نقطه ی  $Q$  نسبت به نقطه ی  $P$  است به شرطی

که  $PQ = PQ'$  در نتیجه می بینیم که نقطه ی  $P$  وسط دو نقطه ی  $Q$  و  $Q'$  است.

قرینه ی نقطه ی  $A$  را  $A'$  می نامیم و یا توجه به مطالب فوق داریم:

$AM = A'M$  پس  $M$  وسط  $AA'$  در نتیجه

$$\bar{x}_M = \frac{\bar{x}_A + \bar{x}_{A'}}{2} \Rightarrow -1 = \frac{\bar{x}_A + 1}{2} \Rightarrow \bar{x}_A = -3$$

$$\bar{y}_M = \frac{\bar{y}_A + \bar{y}_{A'}}{2} \Rightarrow 4 = \frac{\bar{y}_A + 2}{2} \Rightarrow \bar{y}_A = 6$$

ب) قرینه نقطه  $P(\alpha, \beta)$  نسبت به مبدأ مختصات را به دست آورید.

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_O = \frac{\bar{x}_P + \bar{x}_{P'}}{2} \Rightarrow 0 = \frac{\alpha + \bar{x}_{P'}}{2} \Rightarrow \bar{x}_{P'} = -\alpha \\ \bar{y}_O = \frac{\bar{y}_P + \bar{y}_{P'}}{2} \Rightarrow 0 = \frac{\beta + \bar{y}_{P'}}{2} \Rightarrow \bar{y}_{P'} = -\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow P'(-\alpha, -\beta)$$

۳ سود سالانه یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل

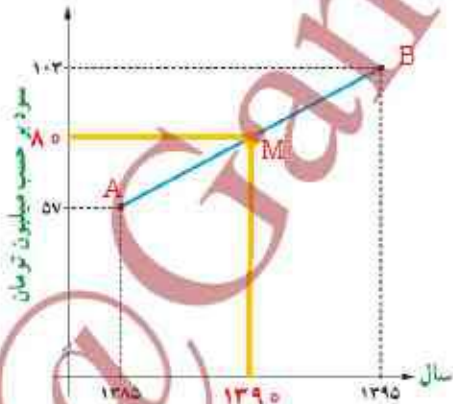
سیر صعودی داشته است. به کمک رابطه نقطه وسط پاره خط، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) میانگین سود سالانه این شرکت در دهه مورد نظر چقدر بوده است؟

برای محاسبه ی میانگین سود سالانه باید مقدار عرض نقطه ی وسط پاره خط آبی

$$\bar{y}_M = \frac{\bar{y}_A + \bar{y}_B}{2} \Rightarrow \bar{y}_M = \frac{57 + 103}{2} \Rightarrow \bar{y}_M = 80$$

رنگ را به دست آوریم



ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

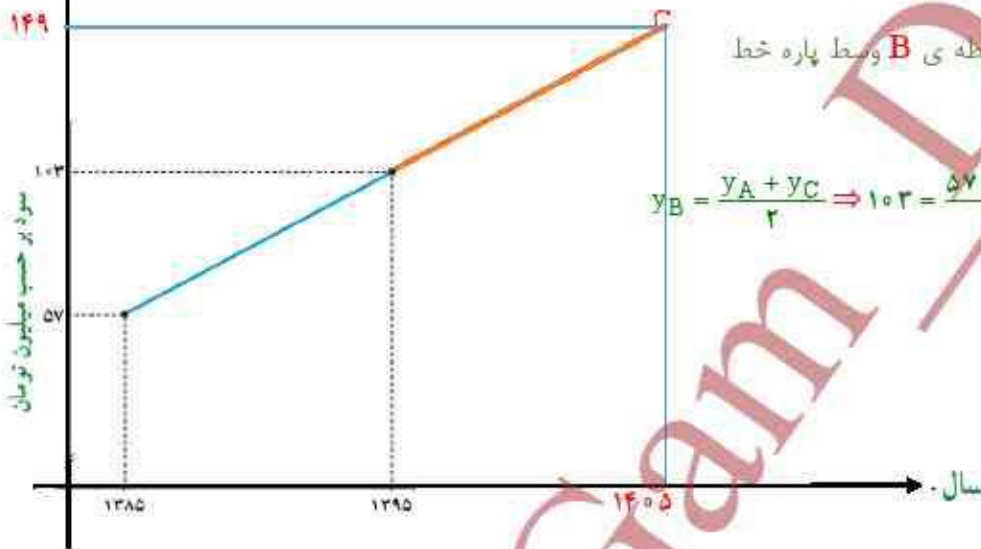
برای اینکه بفهمیم در کدام سال مقدار سود سالانه با این میانگین برابر بوده باید

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \frac{1385 + 1395}{2} \Rightarrow x_M = 1390$$

طول نقطه ی وسط پاره خط آبی را به دست آوریم

ب) اگر سود سالانه در طول یک دهه آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می رود در سال

۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟



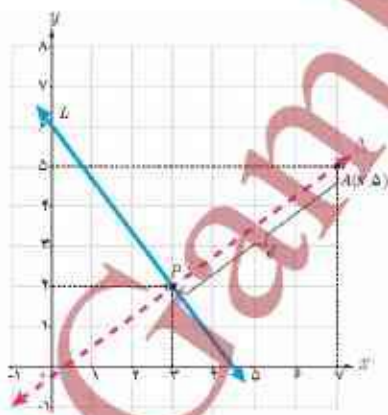
یا توجه به شکل واضح است که نقطه ی **B** وسط پاره خط

**AC** است.

$$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 103 = \frac{57 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 206 - 57 = 149$$

### فاصله نقطه از خط

اگر  $A$  نقطه ای خارج خط  $L$  باشد، فاصله نقطه  $A$  تا خط  $L$  برابر است با طول پاره خطی که از  $A$  عمود بر  $L$  رسم می شود. در اینجا می خواهیم با داشتن مختصات نقطه  $A$  و معادله خط  $L$  این فاصله را محاسبه کنیم.



مثال: فاصله نقطه  $A(7,5)$  را از خط  $L$  به معادله  $4x + 3y = 18$  به دست آورید.

حل: چون شیب خط  $L$  برابر  $-\frac{4}{3}$  است، پس هر خط عمود بر آن دارای شیب  $\frac{3}{4}$  خواهد

بود. معادله خط  $\Delta$  گذرنده از  $A$  و عمود بر  $L$  را می نویسیم.

$$\Delta: y = \frac{3}{4}x + h$$

$$\text{روی } A(7,5) \text{ است } \Delta: 5 = \frac{3}{4}(7) + h \Rightarrow h = \frac{-1}{4}$$

$$\Delta \text{ معادله: } y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta: 3x - 4y = 1$$

اگر معادله دو خط  $L$  و  $\Delta$  را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل

آن مختصات نقطه  $P$ ، محل برخورد دو خط به دست می آید.

$$\begin{cases} L: 4x + 3y = 18 \\ \Delta: 3x - 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 2 \Rightarrow P(3, 2)$$

طول پاره خط  $AP$  جواب مسئله است.

$$AP = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(7-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

با به کارگیری مراحل حل این مثال در حالت کلی می توان ثابت کرد:

فاصله نقطه  $A(x, y)$  از خط به معادله  $ax+by+c=0$  برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

حال مثال قبل را به کمک این رابطه حل می کنیم؛ یعنی فاصله  $A(7, 5)$  را از خط به معادله  $4x+3y-18=0$  به دست می آوریم:

$$d = \frac{|4(7) + 3(5) - 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|25|}{5} = 5$$

کار در کلاس

۱) فاصله نقطه  $P(7, -4)$  را از هر یک از خطوط با معادله های زیر به دست آورید:

الف)  $L: 2x+y=5$   $2x+y-5=0 \Rightarrow a=2, b=1, c=-5, d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$d = \frac{|2(7) + 1(-4) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow d = \sqrt{5}$$

ب)  $T: x=5$   $x-5=0 \Rightarrow a=1, b=0, c=-5, d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$d = \frac{|1(7) + 0 \times (-4) - 5|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow d = 2$$

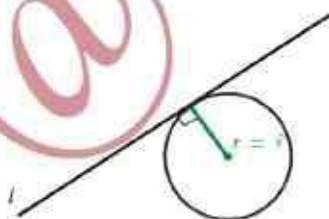
پ)  $\Delta: y=0$   $\Rightarrow a=0, b=1, c=0, d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$d = \frac{|0 \times (7) + 1(-4) + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow d = 4$$

۲) خط  $L: 3x-4y=0$  بر دایره ای به مرکز  $W(2, -1)$  مماس است. شعاع دایره را بیابید. (راهنمایی: خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است).

پس باید با توجه به راهنمایی که کرده فاصله ی نقطه ی مرکز را از خط  $L$  به دست آوریم.

$$r = \frac{|3 \times 2 + (-4) \times (-1) + 0|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{5} \Rightarrow r = 2$$





## حل تمرینات صفحه ی ۹

هرین

۱ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

$$L: 2x - y = 1 \quad m_L = 2$$

$$T: y = 2x - 3 \quad m_T = 2$$

$$\Delta: x + 2y = 0 \quad m_\Delta = -\frac{1}{2}$$

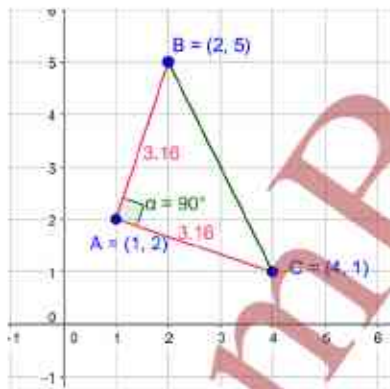
یا توجه به شیب های خط ها - خط  $L$  موازی خط  $T$  است و خط  $\Delta$  بر دو خط  $L$  و  $T$  عمود است.

۲ دو نقطه  $A(14, 3)$  و  $B(10, -13)$  را در نظر بگیرید. فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط  $AB$  به دست آورید.

اگر نقطه  $M$  وسط پاره خط  $AB$  باشد. پس:  $M\left(\frac{14+10}{2}, \frac{3-13}{2}\right) \Rightarrow M(12, -5)$

$$OM = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13 \quad \text{فاصله ی مبدأ از نقطه ی } M$$

۳ نشان دهید مثلث با رئوس  $A(1, 2)$ ،  $B(2, 5)$  و  $C(4, 1)$  یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.



$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \\ AC &= \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = AC$$

$$m_{AB} = \frac{5-2}{2-1} = 3, \quad m_{AC} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3}$$

$$m_{AB} \times m_{AC} = 3 \times -\frac{1}{3} = -1$$

راه اول

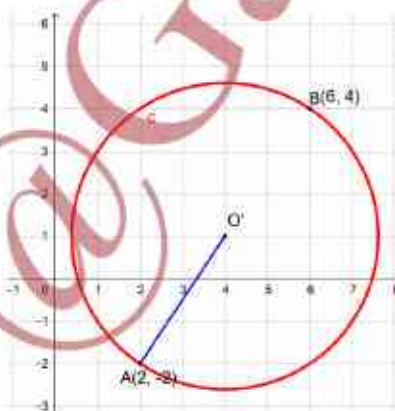
$$\left. \begin{aligned} BC &= \sqrt{(4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \\ (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 &= (\sqrt{20})^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{aligned} \right\} \text{راه دوم}$$

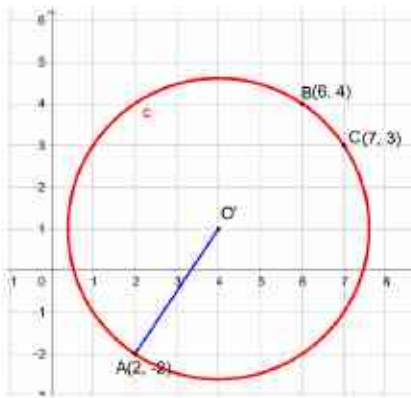
۴ دو انتهای یکی از قطرهای دایره ای نقاط  $A(2, -2)$  و  $B(6, 4)$  هستند. الف) اندازه شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

مختصات مرکز دایره نقطه وسط قطر یعنی وسط پاره خط  $AB$  است:

$$O'\left(\frac{2+6}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) \Rightarrow O'(4, 1)$$

$$O'A = \sqrt{(x_A - x_{O'})^2 + (y_A - y_{O'})^2} \Rightarrow O'A = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$





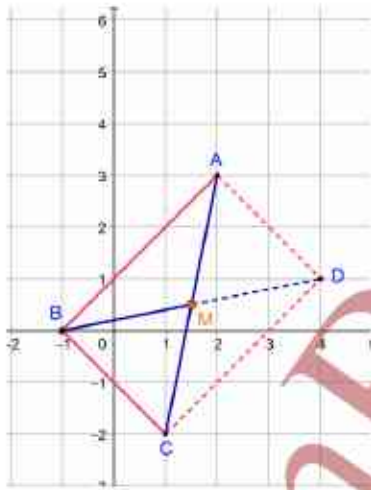
ب) آیا نقطه  $C(7, 3)$  بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

$C$  روی دایره باشد باید  $OC$  نیز برابر یا طول شعاع دایره باشد:

$$O'C = \sqrt{(4-7)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}$$

۵) نقاط  $A(2, 3)$ ،  $B(-1, 0)$  و  $C(1, -2)$  سه رأس از مستطیل  $ABCD$  هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه‌حل کوتاه‌تری برای مسئله ارائه کنید؟)

محل برخورد قطرها را  $M$  می‌نامیم و مختصات آن را با داشتن مختصات دو سر پاره خط  $AC$  به دست می‌آوریم. حالا می‌دانیم که نقطه  $M$  وسط قطر دیگر هم هست باز به کمک فرمول می‌توانیم مختصات رأس چهارم  $D$  را بیابیم.



$$MA = MC \Rightarrow M\left(\frac{2+1}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$MB = MD \Rightarrow x_D = 2x_M - x_B \Rightarrow x_D = 2 \times \frac{3}{2} - (-1) = 4$$

$$\Rightarrow y_D = 2y_M - y_B \Rightarrow y_D = 2 \times \frac{1}{2} - 0 = 1 \Rightarrow D(4, 1)$$

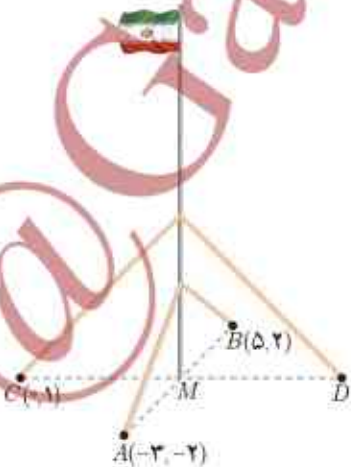
راه کوتاه تر!

$$\overline{AD} = \overline{BC} \Rightarrow \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D - 2 = 2 \Rightarrow x_D = 4 \\ y_D - 3 = -2 \Rightarrow y_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(4, 1)$$

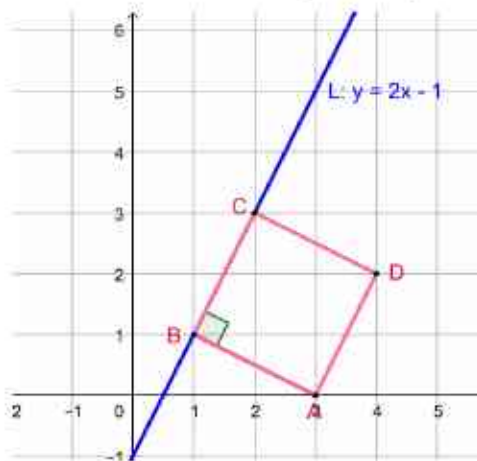
۶) یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصله هر نقطه تا میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا میله. مختصات نقطه  $D$  را به دست آورید.

$$MA = MB \Rightarrow M\left(\frac{-2+5}{2}, \frac{2-2}{2}\right) \Rightarrow M(1, 0)$$

$$\left. \begin{aligned} MC = MD &\Rightarrow x_D = 2x_M - x_C \Rightarrow x_D = 2 - 0 = 2 \\ MC = MD &\Rightarrow y_D = 2y_M - y_C \Rightarrow y_D = 0 - 1 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(2, -1)$$



۷ یکی از اضلاع مربعی بر خط  $L: y = 2x - 1$  واقع است. اگر  $A(3, 0)$  یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.



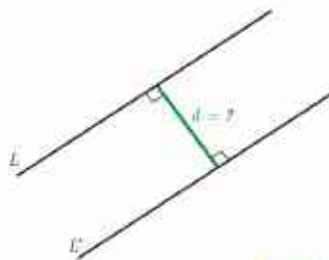
نقطه ی  $A$  روی خط قرار ندارد بنا براین از  $A$  بر خط  $L$  عمود می کشیم. فاصله ی این نقطه از خط طول ضلع مربع است.

$$A(3, 0) = (x_0, y_0), \quad 2x - y - 1 = 0$$

$$AB = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow AB = \frac{|2 \times 3 + (-1) \times 0 + (-1)|}{\sqrt{2^2 + 1}} \Rightarrow d = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$S = AB^2 \Rightarrow S = 5$$

۸ الف) نشان دهید دو خط با معادلات  $5x - 12y + 8 = 0$  و  $-10x + 24y + 10 = 0$  یکدیگر موازی اند.



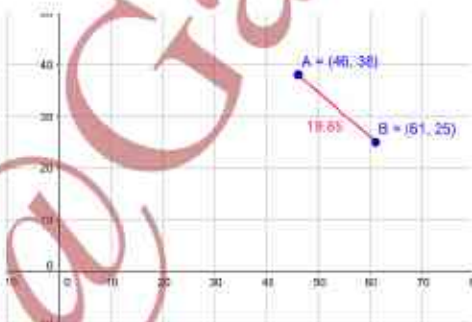
ب) فاصله این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی: یک نقطه دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید).

$$\left. \begin{aligned} 5x - 12y + 8 = 0 &\Rightarrow -12y = -5x - 8 \xrightarrow{-12} y = \frac{5}{12}x + \frac{8}{12} \Rightarrow m = \frac{5}{12} \\ -10x + 24y + 10 = 0 &\Rightarrow 24y = 10x - 10 \xrightarrow{-24} y = \frac{10}{24}x - \frac{10}{24} \Rightarrow m' = \frac{5}{12} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = m'$$

$$x = 1 \Rightarrow -10 \times 1 + 24y + 10 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$$

$$d = \frac{|5(1) - 12(0) + 8|}{\sqrt{1 + 0}} = 1$$

۹ طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجه شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجه شمالی است. برای راحتی، می توانیم موقعیت این شهر را به طور خلاصه، به صورت  $(46, 38)$  نشان دهیم. این اطلاعات درباره جابهار به صورت  $(61, 25)$  است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبه فاصله تقریبی این دو شهر.



$$AB = \sqrt{(61 - 46)^2 + (25 - 38)^2} = \sqrt{225 + 169} = \sqrt{394} = 19/85$$

$$110 \times 19/85 = 2182/5$$

$$AB = \sqrt{(61 \times 110 - 46 \times 110)^2 + (25 \times 110 - 38 \times 110)^2}$$

$$= \sqrt{(110)^2 \times 225 + (110)^2 \times 169} = 110 \times \sqrt{394} = 110 \times 19/85 = 2182/5$$



**روش تغییر متغیر برای حل معادله**

در پایه دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادله درجه ۲ آموختیم. یکی از دلایل اهمیت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادله درجه دوم اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس سوم به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل دسته خاصی از معادله‌ها آشنا می‌شویم که یک شیوه کارآمد برای حل انواع معادله است.

مثال: معادله مقابل را حل کنید.

$$x^2 - 10x^2 + 9 = 0$$

حل: با وجود آنکه این معادله از نوع درجه ۴ است، می‌توان آن را به روش معادله درجه دوم حل کرد. برای این کار به جای عبارت  $x^2$  متغیر (مجهول) جدیدی مثل  $u$  قرار می‌دهیم. به این کار تغییر متغیر می‌گوییم.

$$x^2 = u \Rightarrow u^2 - 10u + 9 = 0$$

این معادله را به روش کلی و همچنین به روش تجزیه حل می‌کنیم:

<p>(روش تجزیه)</p> $(u-1)(u-9)=0$ $\Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ u=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$	<p>(روش کلی)</p> $\Delta = b^2 - 4ac$ $= (-10)^2 - 4(1)(9) = 64$ $u = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2(1)}$ $\Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ u=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$
--	---

**کار در کلاس**

معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف)  $2x^2 - 7x^2 - 4 = 0$

$$2x^2 - 7x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = u \Rightarrow 2u^2 - 7u - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4(2)(-4) = 81 \Rightarrow u = \frac{-(-7) \pm 9}{4} \Rightarrow u_1 = 4, u_2 = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 = u \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2, \quad x^2 = -\frac{1}{2}$$

ب)  $x^2 + 3x^2 + 2 = 0$

$$x^2 + 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = u \Rightarrow u^2 + 3u + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (u+1)(u+2) = 0 \Rightarrow u_1 = -1, u_2 = -2$$

$$x^2 = -1, \quad x^2 = -2 \quad \text{معادله ریشه ندارد}$$

## مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

گاهی به جای مقدار دقیق ریشه‌های یک معادله درجه ۲، تنها مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد که در این صورت بدون حل معادله می‌توان این مقادیر را به دست آورد. معمولاً مجموع دو ریشه را با  $S$  و حاصل ضرب آنها را با  $P$  نمایش می‌دهیم؛ یعنی اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله باشند:  $\alpha + \beta = S$  و  $\alpha\beta = P$ .

### فعالیت

می‌دانیم که معادله درجه دوم در حالت کلی به صورت مقابل است:  $(\Delta) ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

۱ می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه می‌توان بدون حل این معادله درباره وجود و تعداد جواب‌های حقیقی آن اظهار نظر کرد. الف) در این معادله اگر ضرایب  $a$  و  $c$  هم علامت نباشند، درباره علامت  $\Delta$  چه می‌توان گفت؟

چون  $a$  و  $c$  مختلف علامه هستند پس براین حاصل ضرب آن‌ها منفی است در نتیجه در فرمول دلتا مقدار  $4ac$  منفی است یعنی  $-4ac$  مثبت است و  $b^2$  هم که همواره مثبت است پس مجموع دو عبارت مثبت، مثبت می‌شود، در نتیجه  $\Delta$  مثبت است.

$$ac < 0 \Rightarrow 4ac < 0 \Rightarrow -4ac > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > b^2 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

ب) اگر  $a$  و  $c$  هم علامت نباشند، آنگاه معادله (۱) دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

۲ معادله مقابل را در نظر می‌گیریم:  $3x^2 + 5x - 1 = 0$

الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

$a = 3$  و  $c = -1$  پس با توجه به بند ۱ قسمت (ب) فعالیت  $\Delta$  بزرگ تر از صفر است پس معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه‌ها ( $S$ ) رابطه‌ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 37$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{37}}{6} \\ \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{37}}{6} \end{cases}$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-5 + \sqrt{37}}{6} + \frac{-5 - \sqrt{37}}{6} = \frac{-5}{3}$$

ملاحظه می‌شود که:  $S = -\frac{b}{a}$ .

پ) درستی نتیجه فوق را در معادله زیر هم بررسی می‌کنیم:

$$3x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(3x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$S = \alpha + \beta = 0 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} = -\frac{b}{a}$$

ت) درستی نتیجه بالا را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. فرض کنیم برای معادله (۱)، مقدار  $\Delta$  مثبت باشد.

پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز مثل  $\alpha$  و  $\beta$  دارد:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \beta &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

ث) با مفروضات قسمت قبل، ثابت کنید:  $P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$

$$P = \alpha \cdot \beta = \left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{4ac}{4a} = \frac{c}{a}$$

با توجه به این فعالیت می‌توان گفت:

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha \beta = P = \frac{c}{a}$$

کار در کلاس

در معادله  $-2x^2 + x + 5 = 0$  بدون حل معادله، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آورید.

$$a = -2, \quad b = 1, \quad c = 5$$

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow s = -\frac{1}{-2} \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

$$p = \alpha \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow p = \frac{5}{-2}$$



### تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از $S$ و $P$

گاهی برای حل یک مسئله، لازم است برای آن معادله‌ای بنویسیم و سپس آن معادله را حل کنیم. در برخی موارد، این معادله درجه ۲ خواهد بود. مثلاً می‌خواهیم با مجموع و حاصل ضرب دو عدد، معادله درجه دومی بسازیم که آن دو عدد ریشه‌های معادله باشند. برای این کار فرض می‌کنیم آن دو عدد (ریشه‌های معادله)،  $\alpha$  و  $\beta$  باشند. معادله مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-Sx+P=0$$

بنابراین نشان دادیم که:

معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن  $S$  و حاصل ضرب ریشه‌های آن  $P$  باشد، به صورت  $x^2-Sx+P=0$  است.

#### کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها  $1/5$  و حاصل ضربشان  $-7$  باشد.

$$P = -1/5, P = -7$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 1/5x - 7 = 0$$

$$\Delta = 2/25 + 28 = 280/25 \Rightarrow x = \frac{-1/5 \pm \sqrt{280}/5}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -3/5$$

۲ آیا مستطیلی با محیط  $11 \text{ cm}$  و مساحت  $6 \text{ cm}^2$  وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول

و عرض آن را مشخص کنید.

حل: اگر ابعاد مستطیل را  $\alpha$  و  $\beta$  بنامیم، داریم:

$$\text{محیط} = 11 \Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 11 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{11}{2} \Rightarrow \beta = \frac{11}{2} - \alpha$$

$$\text{مساحت} = 6 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = 6 \Rightarrow \alpha \left( \frac{11}{2} - \alpha \right) = 6$$

الف) راه حل بالا را کامل کنید و  $\alpha$  و  $\beta$  را بیابید.

$$\alpha \left( \frac{11}{2} - \alpha \right) = 6 \Rightarrow -\alpha^2 + \frac{11}{2}\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{25}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{-\frac{11}{2} \pm \frac{5}{2}}{-2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}, \quad \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \beta = 4$$

$$\alpha = 4 \Rightarrow \beta = \frac{3}{2} \quad \text{البته با توجه به شکل:}$$

ب) با استفاده از  $S$  و  $P$  این مسئله را حل کنید.

$$S = 5/2, P = 6 \Rightarrow x^2 - 5/2x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25/4 - 24 = 1/4 \Rightarrow x = \frac{5/2 \pm 1/2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 1/2 \end{cases}$$

۳ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  و  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$  باشند.

$$S = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3 \quad , \quad P = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{9-5}{4} = 1$$

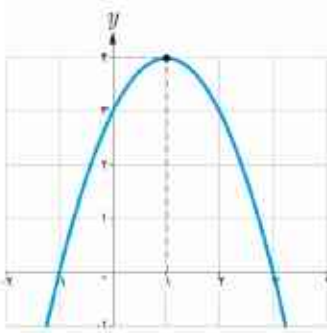
$$\Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

### ماکزیمم و مینیمم سهمی

سهمی با ضابطه  $y = ax^2 + bx + c$  را در نظر می‌گیریم. از سال گذشته می‌دانیم که طول رأس این سهمی  $x = -\frac{b}{2a}$  است.

الف) اگر  $a > 0$ ، آنگاه دهانه سهمی رو به بالاست و به ازای  $x = -\frac{b}{2a}$  کمترین (مینیمم) مقدار سهمی به دست می‌آید.

ب) اگر  $a < 0$ ، آنگاه دهانه سهمی رو به پایین است و به ازای  $x = -\frac{b}{2a}$  بیشترین (ماکزیمم) مقدار سهمی حاصل می‌شود.



مثال: ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$  را در صورت وجود به دست آورید.

حل: چون  $a = -1$  منفی است، پس دهانه سهمی رو به پایین است و این سهمی ماکزیمم دارد. این تابع به ازای  $x = -\frac{b}{2a} = 1$  بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که برابر است با  $f(1) = 4$ .

تذکر: همچنان که در شکل دیده می‌شود، در این مثال نقطه  $(1, 4)$  رأس سهمی و نقطه ماکزیمم آن است. در این حالت منظور از مقدار ماکزیمم سهمی، عرض این نقطه، یعنی 4 است.

مثال: یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره 4m باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

حل: با توجه به شکل داریم:  $3x + 2y = 4 \Rightarrow y = 2 - \frac{3}{2}x$

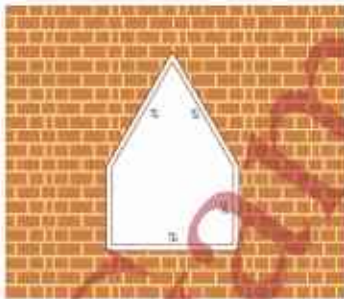
از آنجا که مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $x$  برابر  $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$  است (چرا؟)، می‌توان نوشت:

$$S = x \cdot y + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$S = x \left( 2 - \frac{3}{2}x \right) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$S = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 2x$$

به جای  $y$  معادل آن را بر حسب  $x$  قرار می‌دهیم.



این تابع دارای ماکزیمم است (چرا؟) و بیشترین مقدار آن به ازای  $x = -\frac{b}{2a}$  حاصل می‌شود.

$a = \frac{\sqrt{3}-6}{2} < 0$  پس این تابع ماکزیمم دارد.

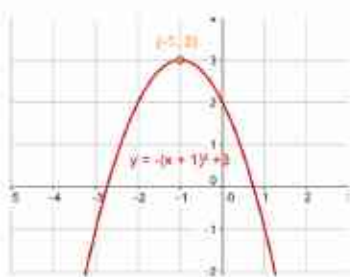
$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{6-\sqrt{3}} = \frac{4}{6-\sqrt{3}} = 0.94(m)$$

$$y = 2 - \frac{3}{2}x = 2 - \frac{3}{2}(0.94) = 0.59(m)$$

کار در کلاس

۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف  $g(x) = -(x+1)^2 + 3$



راه اول: این سهمی در  $x = -1$  ماکزیمم دارد.

$$y = -(x+1)^2 + 3 \Rightarrow -x^2 - 2x - 1 + 3 = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = -1 < 0, x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-2)}{2 \times (-1)} = -1 \Rightarrow y = g(-1) = 3$$

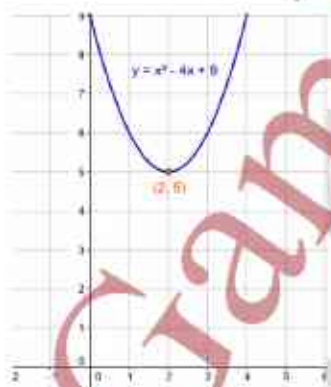
راه دوم: این سهمی در  $x = -1$  ماکزیمم دارد.

$$y = -(x+1)^2 + 3, y = a(x-h)^2 + k \Rightarrow a = -1 < 0, (h, k) = (-1, 3)$$

مقدار ماکزیمم ۳ است.

این سهمی در  $x = 2$  مینیمم ندارد.

ب  $h(x) = x^2 - 4x + 9$



$$y = x^2 - 4x + 9 = 0 \Rightarrow a = 1 > 0, x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-4)}{2 \times 1} = 2 \Rightarrow y = h(2) = 5$$

مقدار مینیمم ۵ است.

۲ یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل را فنس کشی کند. او تنها هزینه ۱۰۰ متر فنس کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

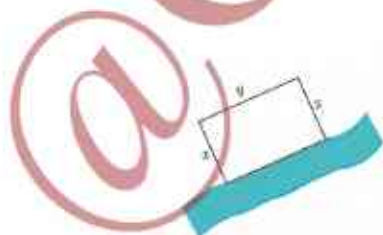
(راهنمایی:  $y + 2x = 100 \Rightarrow y = 100 - 2x$ )

مساحت مستطیل را به صورت تابعی بر حسب  $x$  بنویسید و ماکزیمم آن را بیابید.

$$S_{\square} = xy \Rightarrow S_{\square} = x(100 - 2x) = -2x^2 + 100x$$

$$a = -2 < 0, x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-100}{2 \times (-2)} = 25 \Rightarrow y = 100 - 50 = 50$$

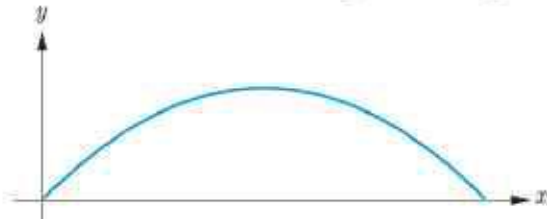
$$S = 25 \times 50 = 1250 \text{ m}^2$$





## صفرهای تابع درجه ۲

همان گونه که می‌دانیم، نمودار هر تابع درجه دوم، یک سهمی است. به عنوان مثال فرض کنیم فوتبالیستی توپ را با زاویه  $45^\circ$  نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه  $20 \text{ m/s}$  شوت کند. معادله مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطه  $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$  است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه  $x$  مسافت افقی طی شده و  $y$  ارتفاع توپ از سطح زمین است.



الف) حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.

$$\text{ارتفاع توپ } x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = -\frac{1}{-\frac{1}{40}} = 40 \text{ m}$$

ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

برای آنکه طول نقاط برخورد نمودار این تابع با محور  $x$ ها را به دست آوریم، باید قرار دهیم  $y=0$ .

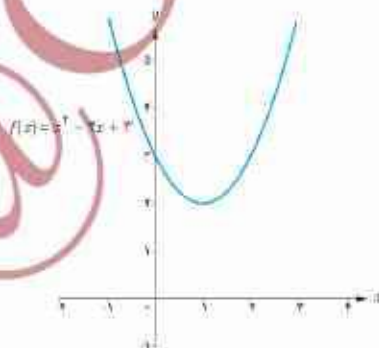
$$y = 0 \Rightarrow x\left(\frac{-1}{40}x + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 40 \end{cases}$$

این نقاط را روی نمودار نشان دهید و توضیح دهید که این اعداد از نظر فیزیکی چه معنایی می‌دهند؟

طول نقطه  $(0,0)$  زمان شروع پرتاب و طول نقطه  $(40,0)$  زمان برخورد گلوله با زمین است.

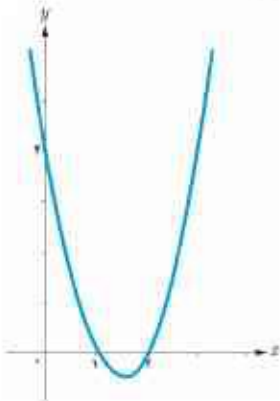
نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند  $f$  با محور  $x$ ها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادله  $f(x) = 0$  هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.

همچنین عرض نقطه برخورد نمودار هر تابع مثل  $f$  با محور  $y$ ها، همان  $f(0)$  است. به عبارت دیگر در تابع درجه ۲ با ضابطه  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، عدد ثابت  $c$  نشان‌دهنده محل برخورد نمودار آن با محور  $y$ هاست. به عنوان مثال، به شکل مقابل توجه کنید.



مثال : معادله سهمی مقابل را بنویسید .

حل : با توجه به شکل دیده می شود که نمودار تابع، محور افقی را در نقاطی با طول های ۱ و ۲ قطع کرده است. پس ضابطه آن به صورت زیر است :



$$y = a(x-1)(x-2)$$

با توجه به نمودار، مقدار  $a$  را به دست می آوریم .

$$\begin{aligned} \text{نقطه } (0, 4) \text{ روی سهمی است} &\Rightarrow 4 = a(0-1)(0-2) \Rightarrow a = 2 \\ &\Rightarrow y = 2(x-1)(x-2) \Rightarrow y = 2x^2 - 6x + 4 \end{aligned}$$

کار در کلاس

۱ همچنان که از سال قبل می دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  را به کمک علامت  $\Delta$  می توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پایین بودن دهانه سهمی از روی علامت  $a$  مشخص می شود. جدول زیر را کامل کنید.

$\Delta$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

۲ درباره تابع درجه دوم  $f$ ، برای تشخیص علامت ریشه های احتمالی معادله  $f(x) = 0$  می توانیم از علامت  $S$  و  $P$  کمک بگیریم. در هر یک از موارد زیر، مانند قسمت الف عمل کنید.

الف)  $y = x^2 + 6x + 5$

معادله  $y = 0$  دو ریشه حقیقی متمایز دارد  $\Rightarrow \Delta = 16 > 0$

ریشه ها هم علامت اند  $\Rightarrow P = \frac{c}{a} = 5 > 0$

هر دو ریشه منفی اند  $\Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -6 < 0$

ب)  $y = 2x^2 - 7x + 1$

معادله  $y = 0$  دو ریشه حقیقی متمایز دارد  $\Rightarrow \Delta = 27 > 0$

ریشه ها هم علامت اند  $\Rightarrow P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0$

هر دو ریشه مثبت اند  $\Rightarrow S = -\frac{b}{a} = \frac{7}{2} > 0$

ب)  $y = x^2 + 4x - 5$

معادله  $y = 0$  دو ریشه حقیقی متمایز دارد  $\Rightarrow \Delta = 26 > 0$

ریشه ها هم علامت نیستند  $\Rightarrow P = \frac{c}{a} = -5 < 0$

قدر مطلق ریشه منفی بزرگ تر از ریشه مثبت است  $\Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -4 < 0$

ت)  $y = -x^2 + 2x - 1$

معادله  $y = 0$  ریشه مضاعف دارد  $\Rightarrow \Delta = 4 - 4(-1)(-1) = 0$

ریشه ها هم علامت اند  $\Rightarrow P = \frac{c}{a} = 1 > 0$

هر دو ریشه مثبت اند  $\Rightarrow S = -\frac{b}{a} = 2 > 0$

۳ هرگاه نمودار تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن علامت ضرایب  $a$ ،  $b$  و  $c$  را مشخص کنیم. به عنوان مثال نمودار تابع  $f$  از مجموعه توابع داده شده زیر را در نظر می‌گیریم:

- دهانه سهمی رو به بالاست؛ پس  $a$  مثبت است.

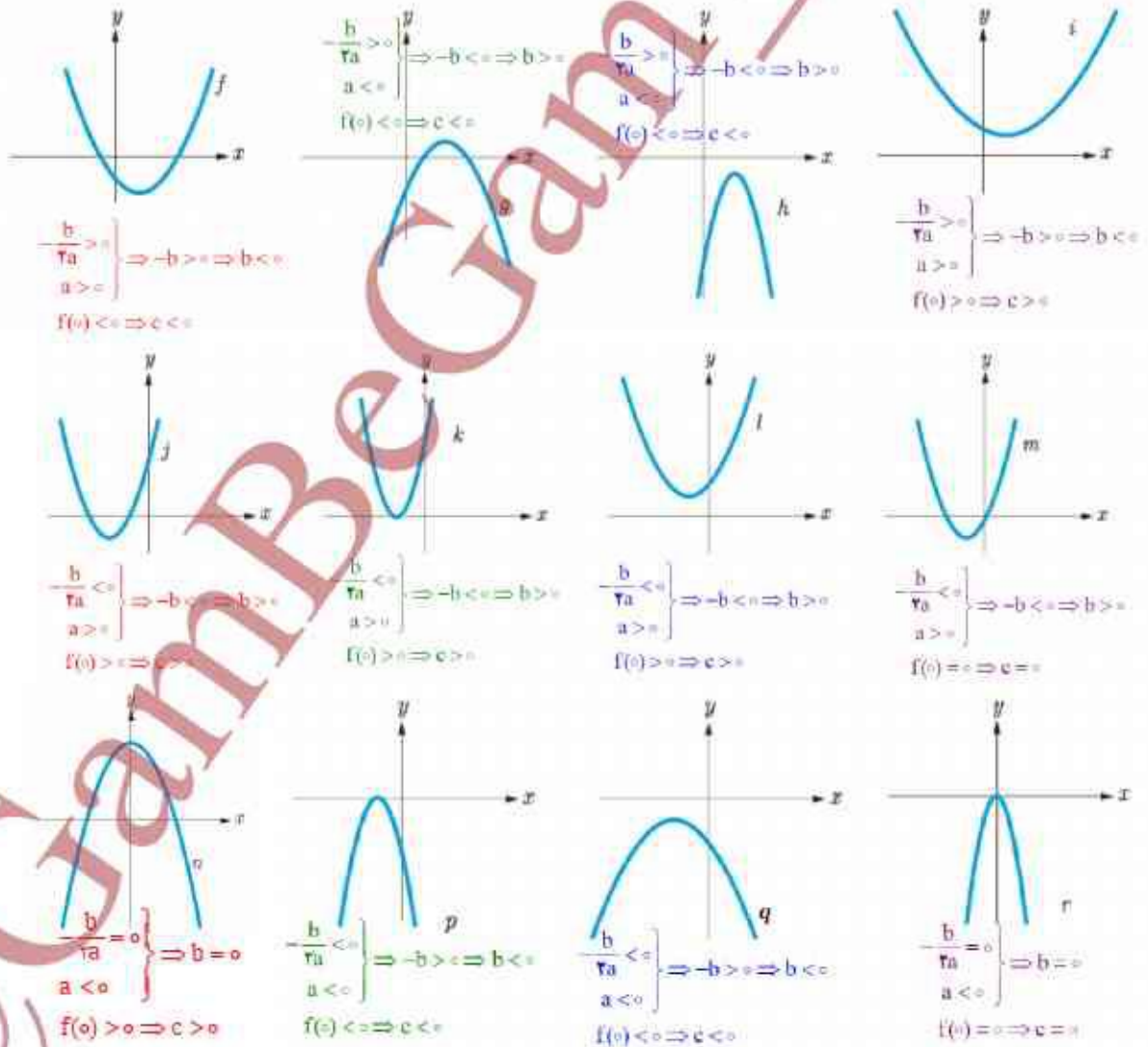
- نمودار تابع  $f$  محور  $y$  را در قسمت منفی ها قطع کرده است؛ پس  $c$  منفی است.
- رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که در آن مقادیر  $x$  مثبت اند؛ پس:

توجه داریم که با توجه به نمودار، مجموع دو ریشه عددی مثبت است (جرا؟) و از این مطلب هم می‌توان منفی بودن علامت  $b$  را نتیجه گرفت.

$$\frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow b < 0$$

جواب چرا - زیرا فاصله ریشه مثبت از مبدأ بیش تر از فاصله ریشه منفی از مبدأ است به عبارتی قدر مطلق ریشه مثبت بزرگ تر از قدر مطلق ریشه منفی است.

خلاصه این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.





ویژگی	تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a		+	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-
b		-	+	+	-	+	+	+	+	۰	-	-	۰
c		-	-	-	+	+	+	+	۰	+	-	-	۰
تعداد ریشه‌ها		دو	دو	ندارد	ندارد	دو	یک	ندارد	دو	دو	یک	فائده ریشه	یک
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)		یکی منفی یکی مثبت	دو نا مثبت	ریشه ندارد	ریشه ندارد	دو نا منفی	یک منفی	ریشه ندارد	یکی منفی یکی صفر	یکی صفر یکی منفی	یک منفی	ریشه ندارد	یک صفر

صرین

۱ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $x^2 - 8x^2 + 8 = 0$

$$x^2 = u \Rightarrow u^2 - 8u + 8 = 0$$

$$\Delta = 32 \Rightarrow u = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$u = 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$u = 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

ب)  $4x^2 + 1 = 5x^2$

$$x^2 = u \Rightarrow 4u^2 - 5u + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 \Rightarrow u = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$u = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

۲ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $1 + \sqrt{2}$  و  $1 - \sqrt{2}$  باشند.

$$\alpha = 1 - \sqrt{2}, \beta = 1 + \sqrt{2}$$

$$s = \alpha + \beta \Rightarrow s = 1 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 2, \quad p = \alpha\beta = (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

۳ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

 $a = -2 < 0$  دمانه سهمی رو به پایین و نقطه ماکزیمم دارد

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = -2 \times 4 + 8 \times 2 - 5 = 3 \Rightarrow f(2) = 3$$

ب)  $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

 $a = 3 > 0$  دمانه سهمی رو به بالا و نقطه مینیمم دارد

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -1$$

$$g(-1) = 3 \times 1 + 6(-1) + 5 = 2 \Rightarrow f(-1) = 2$$



۲ راکتی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده،  $t$  ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع  $h$  متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله آن به صورت مقابل است.

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

الف) جقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

$$h(t) = -5t^2 + 100t \Rightarrow a = -5 < 0 \quad \text{دهانه سهمی رو به پایین و نقطه ماکزیمم دارد}$$

$$t = -\frac{b}{2a} \Rightarrow t = -\frac{100}{2(-5)} \Rightarrow t = 10 \text{ s. پس از } 10 \text{ ثانیه به بالاترین ارتفاع می‌رسد.}$$

ب) ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

$$h(10) = -5 \times 100 + 100 \times 10 = 500 \text{ m} \quad \text{ارتفاع نقطه اوج}$$

ب) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟

$$h(t) = 0 \Rightarrow -5t^2 + 100t = 0 \Rightarrow t(-5t + 100) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ s}, t = 20 \text{ s. پس از } 20 \text{ راکت به زمین بازمی‌گردد.}$$

نکته:  $t = 0$  لحظه شروع پرتاب است.

۵ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است.

اگر محیط استادیوم  $1500$  متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که:

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

$$P = P_O + 2a \Rightarrow P = 2\pi \times \frac{b}{2} + 2a \Rightarrow \pi b + 2a = 1500 \Rightarrow a = 750 - \frac{\pi}{2}b$$

$$S_{\square} = ab \Rightarrow S_{\square} = (750 - \frac{\pi}{2}b)b \Rightarrow S_{\square} = -\frac{\pi}{2}b^2 + 750b \quad \text{دهانه سهمی رو به پایین است و نقطه ماکزیمم دارد}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{750}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{750}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow b = 250 \text{ m}, \quad a = 750 - \frac{\pi}{2} \times \frac{750}{\pi} = 375 \text{ m}$$

$$S_{\square} = 250 \times 375 = 93750 \text{ m}^2, \quad S = S_{\square} + S_O = 93750 + 2(125)^2 = 140625$$



ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

$$a = 750 - \frac{\pi}{2}b$$

$$S = S_{\square} + S_O \Rightarrow S = -\frac{\pi}{2}b^2 + 750b + (\frac{b}{2})^2 \pi \Rightarrow S = -\frac{\pi}{4}b^2 + 750b \quad \text{دهانه سهمی رو به پایین است و نقطه ماکزیمم دارد}$$

$$b = \frac{-750}{-\frac{\pi}{4}} = \frac{1500}{\pi} \Rightarrow a = 750 - \frac{\pi}{2} \times \frac{1500}{\pi} = 0$$

$$S = 2 \times (250)^2 = 125000 \text{ m}^2$$

راه سوم:

$$y = f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$k = -4$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow a(0-h)^2 - 4 = 0 \Rightarrow ah^2 = 4$$

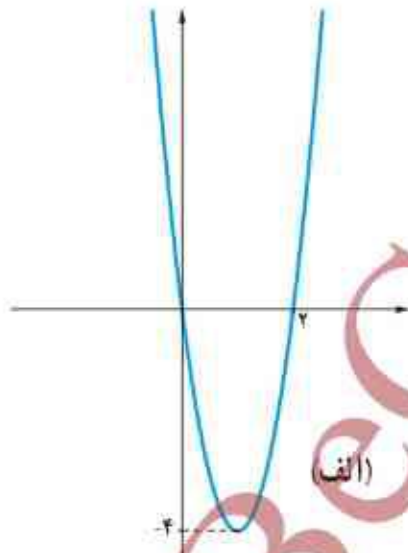
$$f(2) = 0 \Rightarrow a(2-h)^2 - 4 = 0$$

$$4a - 4ah + ah^2 - 4 = 0 \xrightarrow{ah^2=4} 4a - 4ah + 4 - 4 = 0$$

$$4a - 4ah = 0 \Rightarrow 4a(1-h) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} 1-h = 0 \Rightarrow h = 1$$

$$ah^2 = 4 \xrightarrow{h=1} a = 4 \Rightarrow y = f(x) = 4(x-1)^2 - 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 4x^2 - 8x$$



راه اول:

$$f(0) = c \Rightarrow c = 0$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = 0$$

$$f(0) = 0$$

با توجه به این که دو نقطه  $0$  و  $2$  دارای عرض‌های برابر هستند پس می‌توانیم طول را بین سهمی را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\frac{1+0}{2} = 1$$

$$f(1) = -4 \Rightarrow a + b = -4$$

$$\begin{cases} a + b = -4 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b = 8 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a = 8$$

$$\Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = -8$$

$$f(x) = 4x^2 - 8x$$

راه دوم:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -4 \Rightarrow a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) = -4$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} = -4 \Rightarrow b^2 = 16a$$

$$\begin{cases} b^2 = 16a \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 16a \\ 16a + 8b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 + 8b = 0 \Rightarrow b(b+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow a = 0 \\ b = -8 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4x^2 - 8x$$

$$x = 2 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$$

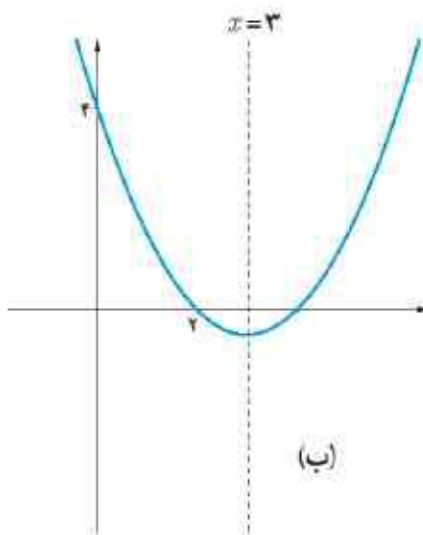
$$f(0) = 4 \Rightarrow c = 4$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + 4 = 0$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a - 8a + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$$





$$x = 2 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$$

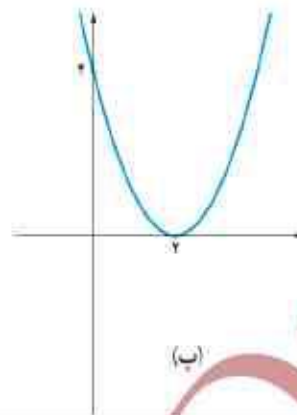
$$f(0) = 4 \Rightarrow c = 4$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow 4a - 8a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow -4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = -4$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

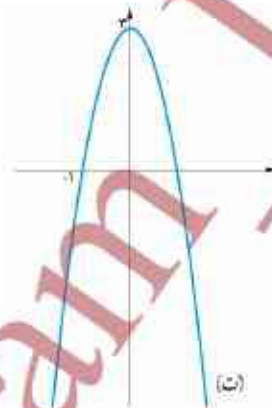


$$f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$f(x) = -2x^2 + 2$$



راه اول :

$$y = f(x) = a(x-h)^2 + k, s(2, 1) \Rightarrow h = 2, k = 1$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a(1-2)^2 + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -(x-2)^2 + 1 = -x^2 + 4x - 3$$

راه دوم :

$$x = 2 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$$

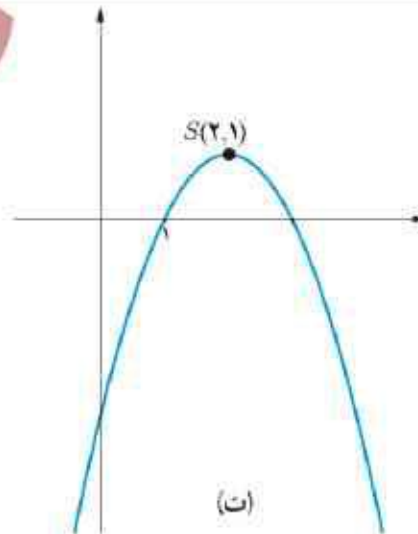
$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \xrightarrow{b = -4a} -3a + c = 0$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 4a + 2b + c = 1 \xrightarrow{b = -4a} -4a + c = 1$$

$$\begin{cases} -3a + c = 0 \\ -4a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + c = 0 \\ a + c = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow b = 4, c = -3$$

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$



راه اول :

$$S(1, -1)$$

$$f(0) = -2 \Rightarrow c = -2$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow a + b - 2 = -1 \Rightarrow a + b = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -2a$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a - 2a = 1 \Rightarrow a = -1, b = 2$$

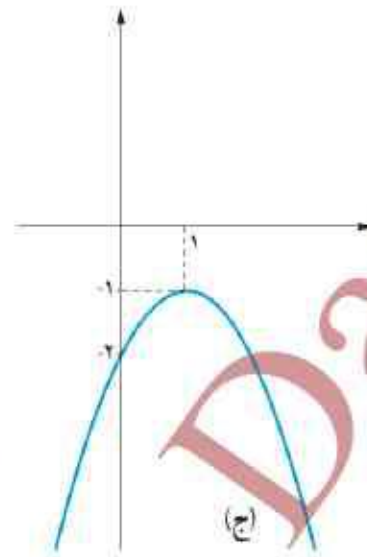
$$f(x) = -x^2 + 2x - 2$$

راه دوم :

$$r = f(x) = a(x - h)^2 + k, s(1, -1) \Rightarrow h = 1, k = -1$$

$$f(0) = -2 \Rightarrow a(0 - 1)^2 - 1 = -2 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = -(x - 1)^2 - 1 = -x^2 + 2x - 2$$



@GamBeGam - Darsi

معادلات گویا



مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب  $x$  و  $y$  باشند داشته باشیم:  $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$ . نسبت طول به عرض این مستطیل را نسبت طلایی می‌گویند. مثال: عرض مستطیل را  $y=1$  در نظر می‌گیریم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

با ضرب دو طرف این معادله در  $x$  می‌توان آن را از حالت کسری خارج کرد (یا به طور معادل در اینجا حاصل ضرب طرفین را مساوی حاصل ضرب وسطین قرار می‌دهیم):

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$



در برخی از اجزای بدن انسان، در بعضی گیاهان و همچنین در باره‌ای از بناها و آثار هنری رد پای عدد طلایی مشاهده می‌شود. تحقیقی در این زمینه انجام دهید و گزارش آن‌را در کلاس ارائه کنید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

غیر قابل قبول



ارگ تاریخی پم

عدد  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  به عدد طلایی معروف است که مقدار تقریبی آن  $1/618$  می‌باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده است.

از کلاس اول ابتدایی که با معادلاتی به شکل  $x^2 + 2 = 5$  مواجه شدیم، تقریباً همیشه درگیر حل معادله بوده‌ایم! گاهی به معادلاتی مانند  $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$  برمی‌خوریم که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای) قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می‌نامیم. همان‌طور که دیدیم:

برای حل یک معادله گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب‌های به دست آمده نباید مخرج کسر را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادله اولیه صدق کنند.



$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x} \quad (1)$$

۱ معادله مقابل را حل کنید.

الف) ابتدا در صورت امکان مخرج کسرها را به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x(x-1)} \quad (2)$$

ب) در مخرج‌ها سه نوع عامل اول متمایز وجود دارد  $x$ ،  $(x+1)$  و  $(x-1)$  که بزرگ‌ترین توان هر کدام از آنها برابر ۱ است؛ پس کم‌م مخرج‌ها عبارت است از  $x(x-1)(x+1)$ .

ب) طرفین معادله (۲) را در  $x(x-1)(x+1)$  ضرب می‌کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود.

$$x(x-1)(x+1) \left[ \frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{x+1} \right] = x(x-1)(x+1) \left[ \frac{2-x}{x(x-1)} \right] \Rightarrow 2x^2 + 2x(x-1) = (x+1)(2-x)$$

ت) پس از ساده کردن، معادله  $5x^2 - 3x - 2 = 0$  حاصل می‌شود.

ت) برای معادله درجه دوم اخیر، مقدار  $\Delta$  را به دست آورید و معادله را حل کنید. آیا هر دو جواب به دست آمده مورد قبول اند؟ چرا؟

$$5x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 40 = 49 \Rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{10} \Rightarrow x = \frac{-2}{5} \text{ غیر قابل قبول, } x = 1 \text{ قابل قبول}$$

اگر  $x = 1$  آنگاه مخرج کسر برابر صفر می‌شود و عبارت تعریف نشده خواهد بود.

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت  $v$  کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار  $10 \text{ km/h}$  کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبه طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطه  $\frac{60}{v}$  به دست می‌آید؟

می‌دانیم مسافت طی شده برابر است با سرعت متوسط ضرب در زمان یعنی  $x = vt$  در نتیجه اگر زمان رفت را با  $t_1$  نمایش

$$x = vt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{x}{v} \Rightarrow t_1 = \frac{60}{v}$$

دهیم داریم:

ب) عبارتی بر حسب  $v$  بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.

زمان بازگشت را با  $t_2$  نمایش می‌دهیم و می‌دانیم که از سرعت قطار  $10 \text{ km/h}$  کاسته شده است پس داریم:

$$60 = (v - 10) \times t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{60}{v - 10}$$

ب) معادله  $\frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2}$  را توضیح دهید.

یا توجه به این که زمان بازگشت نیم ساعت ( $\frac{1}{2}$  ساعت) طولانی‌تر بوده است پس داریم:

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{60}{v-10} = \frac{60}{v} + \frac{1}{2}$$

ت) طرفین این معادله را در کم م مخرج ها ضرب کنید تا به یک معادله درجه دوم تبدیل شود.

کم م مخرج ها  $2v(v-10)$  است. در نتیجه:

$$2v(v-10) \left( \frac{60}{v-10} \right) = 2v(v-10) \times \frac{60}{v} + 2v(v-10) \times \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 120v = 120v - 1200 + v^2 - 10v$$

$$\Rightarrow v^2 - 10v - 1200 = 0 \Rightarrow \Delta = 4900 \Rightarrow v = \frac{10 \pm 70}{2}$$

$$v = 40 \text{ km/h} , \quad v = -30$$

ث) از حل معادله حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن زمان رفت و برگشت قطار را به دست آورید.

سرعت قطار در مسیر شمال به جنوب رفت  $40 \text{ km/h}$  است. (البته سرعت برگشت با توجه به علامت منفی  $30 \text{ km/h}$  است.)

$$t_1 = \frac{60}{40} = 1.5 \text{ h} \quad \text{و زمان برگشت: } t_2 = \frac{60}{40-10} = \frac{60}{30} = 2 \text{ h}$$

کار در کلاس

۱) معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب های به دست آمده مورد قبول هستند؟

الف)  $\frac{3}{x^2} - 12 = 0$

$$x^2 \times \frac{3}{x^2} - x^2 \times 12 = x^2 \times 0$$

$$\Rightarrow 3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

ب)  $\frac{2}{k} - \frac{2k}{k+2} = \frac{k}{k^2+2k}$

$$\frac{2}{k} - \frac{2k}{k+2} = \frac{k}{k(k+2)}$$

$$\Rightarrow k(k+2) \times \frac{2}{k} - k(k+2) \times \frac{2k}{k+2} = k(k+2) \times \frac{k}{k(k+2)}$$

$$2k+4-2k^2 = k \Rightarrow -2k^2+k+4=0 \Rightarrow \Delta=49 \Rightarrow k=\frac{4}{2}, k=-1$$

ب)  $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{(3-x)(3+x)} \Rightarrow \frac{3}{x} - \frac{2}{-(3-x)} = \frac{12}{(3-x)(3+x)} \Rightarrow \frac{3}{x} + \frac{2}{3-x} = \frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

$$x(3-x)(3+x) \times \frac{3}{x} + x(3-x)(3+x) \times \frac{2}{3-x} = x(3-x)(3+x) \times \frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

$$27 - 3x^2 + 6x + 2x^2 = 12x \Rightarrow -x^2 - 6x + 27 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+9) = 0 \Rightarrow x = -9, \quad x = 3 \quad \text{غیر قابل قبول}$$

همانطور می دانیم اگر مخرج کسری صفر شود آن کسر تعریف نمی شود بنابراین عدد ۳ نمی تواند جواب این معادله باشد زیرا مخرج کسر دوم را صفر می کند.



۲ دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفته اول به صورت زیر بود:

$$\frac{36}{5} = 7.2$$

او از هفته ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. می خواهیم بدانیم از هفته ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمره ۹ گرفته است. برای حل مسئله می توان به روش زیر عمل کرد:

الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفته ششم به بعد برابر  $n$  باشد، مجموع امتیازات او در این مدت ۹ $n$  خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب  $n$  بنویسید که نشان دهنده میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آرمان باشد.

$$\frac{9n + 36}{n + 5} \quad \text{و} \quad 9n + 36 \quad \text{تعداد کل امتیازهای به دست آمده}$$

ب) کسر مربوط به قسمت الف را برابر ۸ قرار دهید و  $n$  را بیابید. سپس جواب به دست آمده را امتحان کنید.

$$\frac{9n + 36}{n + 5} = 8 \Rightarrow (n + 5) \times \frac{9n + 36}{n + 5} = (n + 5) \times 8 \Rightarrow 9n + 36 = 8n + 40 \Rightarrow n = 4$$

$$\frac{9 \times 4 + 36}{4 + 5} = \frac{72}{9} = 8$$

مثال: اگر دو ماشین جمن زنی با هم کار کنند، می توانند در ۴ ساعت جمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می توانند این کار را انجام دهند؟

حل: ماشین سریع تر را  $A$  و دیگری را  $B$  می نامیم. فرض کنیم  $t$  مدت زمانی باشد که ماشین  $A$  به تنهایی قادر است کل کار را انجام دهد. جدول زیر را کامل کنید.

ماشین	زمان انجام کل کار	مقداری از کار که در ۱ ساعت قابل انجام است.
$A$	$t$	$\frac{1}{t}$
$B$	$2t$	$\frac{1}{2t}$
$A$ و $B$ با هم	۴	$\frac{1}{4}$

با توجه به جدول، معادله زیر را می توان نوشت:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{2t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 6 \quad \text{زمان ماشین } A$$

$$\Rightarrow 2t = 12 \quad \text{زمان ماشین } B$$

### معادلات رادیکالی

فرض کنید بخواهیم نقطه ای را روی محور  $x$  ها بیابیم که فاصله آن از نقطه  $P(2, 3)$  برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

برای این کار فرض می کنیم مختصات نقطه مورد نظر به صورت  $A(x, 0)$  باشد. مقدار  $x$  را

$$AP = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(x - 2)^2 + (0 - 3)^2} \quad \text{به دست می آوریم.}$$

$$AP = 5 \Rightarrow \sqrt{(x - 2)^2 + 9} = 5 \quad (3)$$



معادلاتی مانند (۳) که در آن عبارت رادیکالی شامل مجهول وجود دارد، یک معادله رادیکالی نامیده می‌شود.

برای حل یک معادله رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادله اولیه صدق می‌کنند.

برای حل معادله (۳) در بالا، اگر طرفین تساوی را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت:

$$(x-2)^2 + 9 = 25$$

$$(x-2)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} (x-2) = 4 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow A(6, 0) \\ (x-2) = -4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow B(-2, 0) \end{cases}$$

تذکر: عبارت رادیکالی معادله (۳) همواره با معناست؛ چون در آن، حاصل زیر رادیکال همواره مثبت است. در این حالت می‌گوییم دامنه متغیر برابر  $\mathbb{R}$  است و می‌توانیم بنویسیم  $D = (-\infty, +\infty)$ .

مثال: در معادله  $2\sqrt{x} = \sqrt{3x-3}$ ، دامنه متغیر به صورت  $D = [1, +\infty)$  است (چرا؟).  
با به توان رساندن دو طرف معادله داریم:

$$4x = 3x - 3 \Rightarrow x = -3 \text{ (غیر قابل قبول)}$$

چون جواب به دست آمده خارج از دامنه متغیر است، قابل قبول نیست. شایان ذکر است که جواب‌های درون دامنه نیز به شرطی مورد قبول اند که در معادله اصلی صدق کنند.

کار در کلاس

۱) معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جواب‌های حاصل، قابل قبول اند؟

(الف)  $2\sqrt{2t-1} - t = 1$

$$(2\sqrt{2t-1})^2 = (t+1)^2 \Rightarrow 4(2t-1) = t^2 + 2t + 1$$

$$\Rightarrow 8t - 4 = t^2 + 2t + 1 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-5) = 0 \Rightarrow t = 1, t = 5$$

$$t = 5 \Rightarrow 2\sqrt{2 \cdot 5 - 1} - 5 = 1 \Rightarrow 6 - 5 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$t = 1 \Rightarrow 2\sqrt{2 \cdot 1 - 1} - 1 = 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.

(ب)  $2x = 1 - \sqrt{2-x}$

$$(\sqrt{2-x})^2 = (1-2x)^2 \Rightarrow 2-x = 1-4x+4x^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 \Rightarrow x = 1, x = -\frac{1}{4}$$

$$x = -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} = 1 - \sqrt{2 + \frac{1}{4}} \Rightarrow -\frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow 2 = 1 - \sqrt{2-1} \Rightarrow 2 = 0$$

پس واضح است که  $x = 1$  قابل قبول نیست.

(ب)  $\sqrt{x+7} = \sqrt{x} + 1$

$(\sqrt{x+7})^2 = (\sqrt{x} + 1)^2 \Rightarrow x+7 = x+2\sqrt{x}+1$

$\Rightarrow 6 = 2\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 3^2 \Rightarrow x = 9$

$x = 9 \Rightarrow \sqrt{9+7} = \sqrt{9} + 1 \Rightarrow 4 = 4$

(ت)  $\frac{1}{\sqrt{u-3}} - \frac{2}{\sqrt{u}} = 0$

$\frac{1}{\sqrt{u-3}} = \frac{2}{\sqrt{u}} \Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{u-3}})^2 = (\frac{2}{\sqrt{u}})^2$

$\Rightarrow \frac{1}{u-3} = \frac{4}{u} \Rightarrow u(u-3) \times \frac{1}{(u-3)} = u(u-3) \times \frac{4}{u}$

$\Rightarrow u = 4u - 12 \Rightarrow 12 = 3u \Rightarrow u = 4$

$u = 4 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-3}} - \frac{2}{\sqrt{4}} = 0 \Rightarrow 1 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

(ث)  $2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$

$\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \Rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 2})^2 = (x - 2)^2 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1$

$x = 2 \Rightarrow 2 + \sqrt{8 - 10 + 2} = 2 \Rightarrow 2 + 0 = 2 \Rightarrow 2 = 2$  ,  $x = -1 \Rightarrow 2 + \sqrt{2 - 5 + 2} = -1 \Rightarrow 2 + \sqrt{-1} = -1$

واضح است که  $x = -1$  قابل قبول نیست

۲ بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه حقیقی اند؟

الف)  $\sqrt{t} + 2 = 0$

ب)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$

در مجموعه ی عدد های حقیقی (یا فرض یا معنی بودن) هر کدام از مجموعه ی اعداد حقیقی  $\sqrt{t}$  یا فرض یا معنی بودن از رادیکال ها عددی بزرگ تر یا مساوی صفر هستند و وقتی یا همیشه بزرگ تر یا مساوی صفر است. و وقتی این عدد ۱ جمع شوند هرگز صفر نمی شوند. رادیکال یا ۲ جمع شود هرگز صفر نمی شود.

ب)  $\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0$

روش اول: در مجموعه ی اعداد حقیقی (یا فرض یا معنی بودن) هر یک از رادیکال ها بزرگ تر یا مساوی صفر هستند و زمانی جمع آن ها صفر است که هر دو همزمان صفر باشند ولی این اتفاق نمی افتد.

روش دوم:  $\sqrt{1-x} = -\sqrt{x-2}$  ، طرف چپ تساوی عبارت بزرگ تر یا مساوی صفر است ولی طرف دیگر کوچکتر یا مساوی صفر است و این تساوی فقط زمانی برقرار است که دو طرف صفر باشند. واضح است نمی توانیم عددی مشترک پیدا کنیم که همزمان دو رادیکال را صفر کند. پس این معادله در مجموعه ی اعداد حقیقی جواب ندارد. به عبارت دیگر جواب مشترک دو معادله ی زیر در صورت وجود جواب معادله است.

$\left. \begin{matrix} \sqrt{1-x} = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow x = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$  جواب مشترک ندارد

پس این معادله در مجموعه ی اعداد حقیقی جواب ندارد.



۱ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

(الف)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5$

$x(x-2) \times \frac{1}{x} + x(x-2) \times \frac{1}{(x-2)} = x(x-2) \times 5$

$x-2+x = 5x^2 - 10x \Rightarrow 5x^2 - 12x + 2 = 0$

$\Delta = 104 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{104}}{10}$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا هیچ یک مخرج را صفر نمی کنند.

(ب)  $\frac{10}{r} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3r} - 5$

$6r \times \frac{10}{r} - 6r \times \frac{15}{2} = 6r \times \frac{20}{3r} - 6r \times 5$

$60 - 45r = 40 - 30r \Rightarrow 20 = 15r \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

$\frac{10}{\frac{4}{3}} - \frac{15}{2} = \frac{20}{3 \times \frac{4}{3}} - 5 \Rightarrow \frac{30}{4} - \frac{15}{2} = 5 - 5 \Rightarrow 0 = 0$

(ب)  $\frac{2x}{x-2} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-2}$

$(x-2)(x+4) \times \frac{2x}{(x-2)} + (x-2)(x+4) \times \frac{(x+1)}{(x+4)} = (x-2)(x+4) \times \frac{(x-1)}{(x-2)}$

$2x^2 + 8x + x^2 - 2x - 2 = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Delta = 1 \Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2}$

هر دو ریشه قابل قبول است زیرا هیچ یک باعث صفر شدن مخرج ها نمی شوند.

(ت)  $\sqrt{t+4} = 3$

$(\sqrt{t+4})^2 = 3^2$

$\Rightarrow t+4=9$

$\Rightarrow t=5$

$\Rightarrow \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$

(ث)  $k = \sqrt{6k-8}$

$k^2 = (\sqrt{6k-8})^2 \Rightarrow k^2 = 6k-8$

$\Rightarrow k^2 - 6k + 8 = 0 \Rightarrow (k-4)(k-2) = 0$

$\Rightarrow k=4, k=2$

$k=4 \Rightarrow 4 = \sqrt{24-8} \Rightarrow 4=4$

$k=2 \Rightarrow 2 = \sqrt{12-8} \Rightarrow 2=2$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

(ج)  $x + \sqrt{x} = 6$

$\sqrt{x} = 6-x \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (6-x)^2 \Rightarrow x = 36 - 12x + x^2$

$\Rightarrow x^2 - 12x + 36 = 0 \Rightarrow (x-6)(x-6) = 0$

$\Rightarrow x=6, x=6$

$x=6 \Rightarrow 6 + \sqrt{6} = 6 \Rightarrow 6=6$

$x=9 \Rightarrow 9 + \sqrt{9} = 6 \Rightarrow 12=6, 12 \neq 6$

همانطور که دیده می شود  $x=9$  قابل قبول نیست.

(ج)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$

$\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{2x-5} \Rightarrow (\sqrt{x+1} - 1)^2 = (\sqrt{2x-5})^2$

$\Rightarrow x+1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 2x-5 \Rightarrow -2\sqrt{x+1} = x-7$

$\Rightarrow (-2\sqrt{x+1})^2 = (x-7)^2 \Rightarrow 4x+4 = x^2 - 14x + 49$

$\Rightarrow x^2 - 18x + 45 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-15) = 0$

$\Rightarrow x=3, x=15$

$x=3 \Rightarrow \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1 \Rightarrow 1=1$

$x=15 \Rightarrow \sqrt{16} - \sqrt{25} = 1 \Rightarrow -1=1, -1 \neq 1$

همانطور که دیده می شود  $x=15$  قابل قبول نیست.

(ح)  $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$

$\sqrt{m} \times \sqrt{m} + \sqrt{m} \times \frac{1}{\sqrt{m}} = \sqrt{m} \times 2 \Rightarrow m+1 = 2\sqrt{m}$

$\Rightarrow (m+1)^2 = (2\sqrt{m})^2 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 4m$

$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0 \Rightarrow m=1$

$m=1 \Rightarrow \sqrt{1} + \frac{1}{\sqrt{1}} = 2 \Rightarrow 2=2$

همانطور که ملاحظه می شود معادله یک جواب قابل

قبول دارد.



۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از تاپ مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک نماید، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

زمانی که علی برای ۱۶ صفحه صرف می‌کند: ۲ ساعت یا ۱۲۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه  $\frac{16}{120}$  صفحه ویرایش می‌کند.  
زمانی که علی و رضا باهم صرف ویرایش ۱۶ صفحه می‌کنند: ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه یعنی ۸۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه باهم  $\frac{16}{80}$  صفحه ویرایش می‌کنند.

اگر زمانی را که رضا صرف ویرایش ۱۶ صفحه به تنهایی می‌کند  $x$  در نظر بگیریم پس در یک دقیقه  $\frac{16}{x}$  صفحه ویرایش می‌کند. پس داریم:

$$\frac{16}{120} + \frac{16}{x} = \frac{16}{80} \Rightarrow \frac{1}{120} + \frac{1}{x} = \frac{1}{80} \Rightarrow 240 \times x \times \frac{1}{120} + 240 \times x \times \frac{1}{x} = 240 \times x \times \frac{1}{80}$$

$$2x + 240 = 3x \Rightarrow x = 240$$

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵ متر سقوط آزاد کند، پس از  $t$  ثانیه

در ارتفاع  $h$  متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به طوری که  $t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

$$t = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{10 - \frac{h}{5}} \Rightarrow 1^2 = \left(\sqrt{10 - \frac{h}{5}}\right)^2 \Rightarrow 1 = 10 - \frac{h}{5} \Rightarrow \frac{h}{5} = 9 \Rightarrow h = 45 \text{ m}$$

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$\sqrt{x} - x = \frac{x}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x} - 2x = x \Rightarrow 2\sqrt{x} = 3x \Rightarrow (2\sqrt{x})^2 = (3x)^2 \Rightarrow 4x = 9x^2 \Rightarrow 9x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(9x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \frac{4}{9}$$

با توجه به این که عدد باید صحیح باشد، بنا براین فقط  $x = 0$  قابل قبول است.

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$x - \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x - 2\sqrt{x} = x \Rightarrow x = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = (2\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 4$$

این مسئله دو جواب دارد.

۵ معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x+3} = 2 \quad (2), \quad \sqrt{2x^2-1} + \sqrt{-x+5} = 3 \quad (1)$$

جواب‌های ۱ با نمودار بررسی شده است.

