

## معادلات شامل عبارات گویا

برای حل این نوع معادله، ابتدا هنجر کسرها را تجزیه کرده و ک.م.م. (کوچکترین مضرب مشترک) آنها را حساب می‌کنیم. سپس طرفین معادله را در ک.م.م. ضرب و ساده می‌کنیم. معادله تبدیل به معادله چند جمله‌ای شده و آن را به سادگی حل می‌کنیم.

توجه: جواب به دست آمده به شرط قابل قبول است نه ریشه‌ی ک.م.م. باشد.

$$\text{مثال: } \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4}$$

ک.م.م. =  $x(x-2)(x+2)$

$$\text{معادله} \times \text{ک.م.م.} \rightarrow 3x(x-2) + 2(x-2)(x+2) = x(4x-4)$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x + 2x^2 - 8 = 4x^2 - 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \rightarrow x = 4 \quad \text{جواب}$$

$x = -2$  غیر قابل قبول زیرا ریشه‌ی ک.م.م. است.

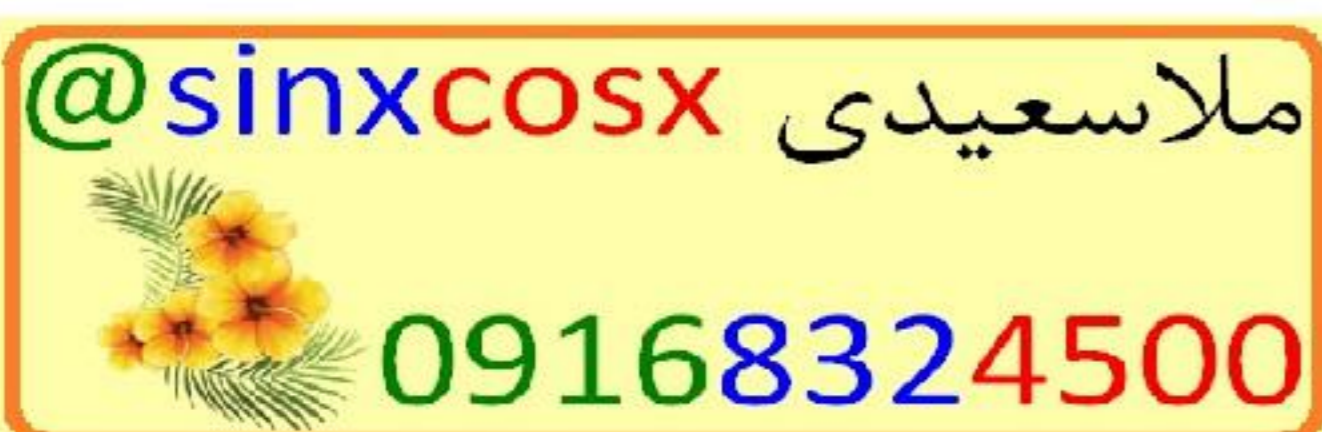
$$\text{مثال: } \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3 \rightarrow \text{ک.م.م.} = (x-2)^2$$

$$\text{معادله} \times \text{ک.م.م.} \rightarrow 1 + 2(x-2) = 3(x-2)^2$$

$$\Rightarrow 1 + 2x - 4 = 3x^2 - 12x + 12 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 11 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(3x-11) = 0 \rightarrow x = 3 \quad \text{جواب}$$

$$\rightarrow x = \frac{11}{3} \quad \text{جواب}$$



$$\text{مثال: } \frac{3y+5}{y^2+5} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

$$\rightarrow \text{ک.م.م.} = y(y+5)$$

$$\text{معادله} \times \text{ک.م.م.} \rightarrow 3y+5 + y(y+4) = (y+5)(y+1)$$

$$\Rightarrow 3y+5 + y^2+4y = y^2+6y+5$$

معادله جواب ندارد  $\Rightarrow$  غیر قابل قبول زیرا ریشه‌ی ک.م.م. است  $y = 0$

## حل مسئله به کمک معادلات لویا

مسئله (۱) ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \text{کار انجام شده توسط A در یک ساعت} \Rightarrow \text{ماشین A کار را در } x \text{ ساعت انجام می‌دهد} \\ \frac{1}{x+15} &= \text{کار انجام شده توسط B در یک ساعت} \Rightarrow \text{ماشین B کار را در } x+15 \text{ ساعت انجام می‌دهد} \\ \frac{1}{18} &= \text{کار انجام شده توسط هر دو در یک ساعت} \Rightarrow \text{هر دو ماشین کار را در } 18 \text{ ساعت انجام می‌دهند} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18} \quad \text{بنابراین در یک ساعت داریم:}$$

$$\text{ک.م.م} = 18x(x+15)$$

$$18(x+15) + 18x = x(x+15) \Rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0$$

$$\Rightarrow (x-30)(x+9) = 0 \rightarrow x=30 \rightarrow \text{ماشین A در } 30 \text{ ساعت، B در } 45 \text{ ساعت}$$

غیر قابل قبول زیرا زمان باید مثبت باشد  $\rightarrow x = -9$

مسئله (۲) پدر بزرگ برای اهدای به مهد کودک چند اسباب بازی بیلان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به پدر بزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

$$\frac{120000}{x} = \text{تعداد اسباب بازی‌ها قبل از تخفیف} \rightarrow x = \text{قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف}$$

$$\frac{120000}{x-1000} = \text{تعداد اسباب بازی‌ها بعد از تخفیف} \rightarrow x-1000 = \text{قیمت هر اسباب بازی بعد از تخفیف}$$

$$\Rightarrow \frac{120000}{x-1000} = \frac{120000}{x} + 4$$

$$\xrightarrow{\times 4} \frac{300000}{x-1000} = \frac{300000}{x} + 1 \quad \text{ک.م.م} = x(x-1000)$$

$$300000x = 300000(x-1000) + x(x-1000)$$

$$\Rightarrow x^2 - 1000x - 3000000 = 0 \Rightarrow (x-6000)(x+5000) = 0$$

$$\swarrow \text{جواب } x = 6000$$

$\searrow$  غیر قابل قبول زیرا قیمت اسباب بازی نمی‌تواند منفی باشد  $x = -5000$

مسئله (۳) اگر در یک مستطیل با طول  $L$  و عرض  $w$  داشته باشیم  $\frac{L}{w} = \frac{w+L}{L}$  کنگاه گوس در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه‌های طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

$$\text{محیط} = 2(w+L) = 144 \Rightarrow w+L = 72 \Rightarrow w = 72-L$$

در نسبت طلایی به جای  $w$  مقدار  $72-L$  را قرار می‌دهیم:

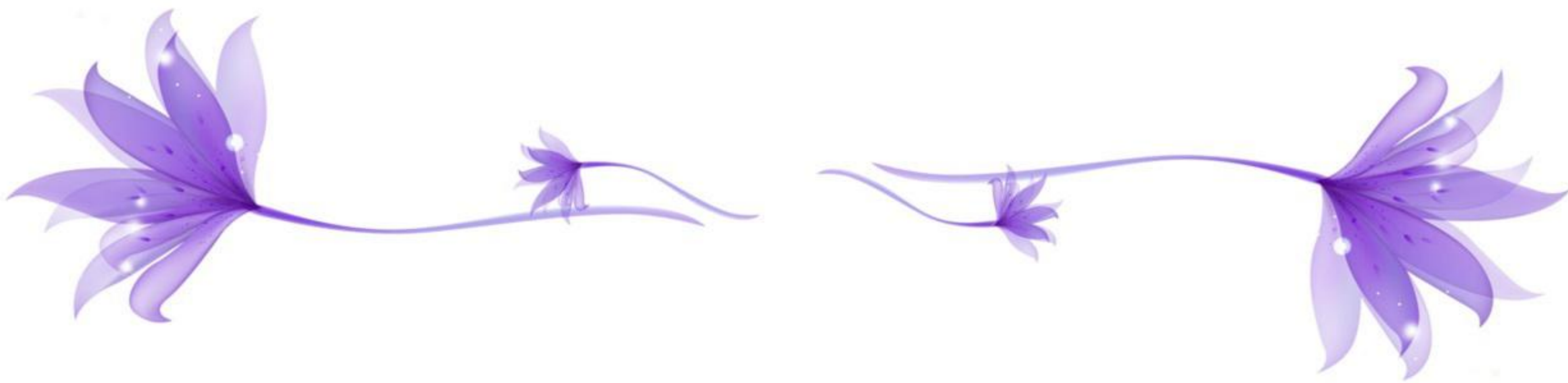
$$\frac{L}{72-L} = \frac{72}{L} \rightarrow \text{ک.م.م} = L(72-L)$$

$$L^2 = 72(72-L) \Rightarrow L^2 + 72L - 5184 = 0$$

$$\Delta = 25920 \Rightarrow L = \frac{-72 \pm \sqrt{25920}}{2}$$

$$L = 36\sqrt{5} - 36 \Rightarrow w = 72 - (36\sqrt{5} - 36) = 108 - 36\sqrt{5}$$

غیر قابل قبول زیرا طول مستطیل نباید عدد منفی باشد  $L = -36\sqrt{5} - 36$



تمرین ۱: معادلات زیر را حل کنید

الف)  $\frac{p}{2-p} + \frac{2}{p} = \frac{-2}{2} \rightarrow \text{ک.م.م} = 2p(2-p)$

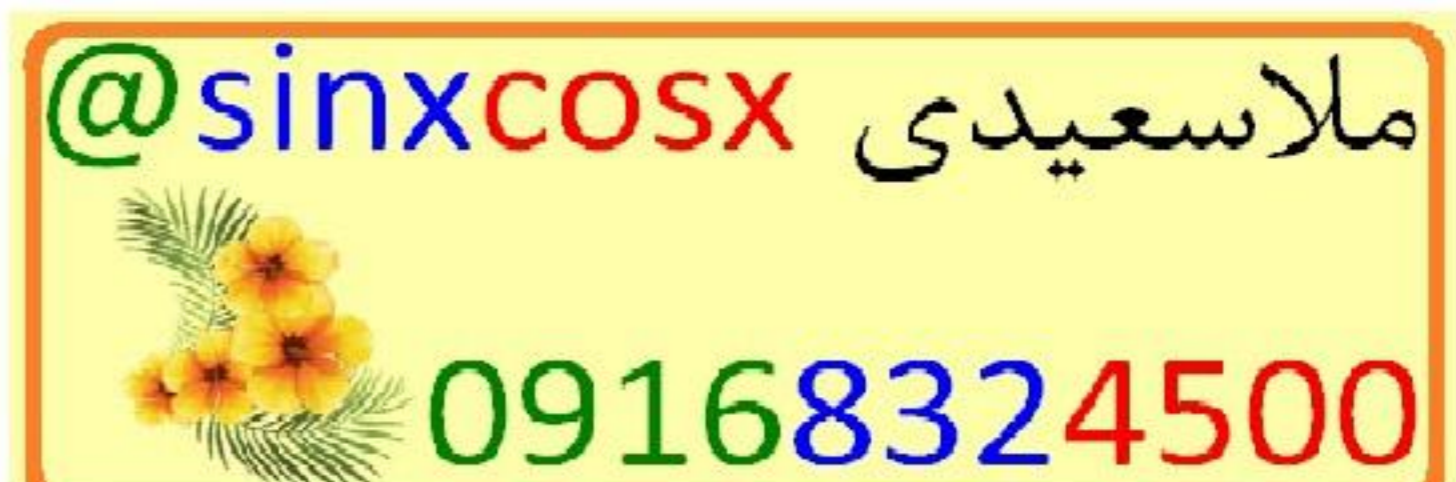
$$2p^2 + 8 - 4p = 2p^2 - 4p \Rightarrow p^2 - 2p - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (p-4)(p+2) = 0 \rightarrow p = 4 \text{ یا } p = -2$$

ب)  $\frac{9}{m} = 2 + \frac{m}{m+1} \rightarrow \text{ک.م.م} = m(m+1)$

$$9m+9 = 2m^2+2m+m^2 \Rightarrow 3m^2-4m-9=0$$

$$\Rightarrow \Delta = 88 \Rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{88}}{6}$$



$$\text{پ) } \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2}{x^2-2x+2} = \frac{6}{x^2-2x+4}$$

بیریم  $y = x^2 - 2x + 2$  به سه برابرش:

$$\frac{1}{y} + \frac{2}{y+1} = \frac{6}{y+2} \rightarrow \text{ک.م.م} = y(y+1)(y+2)$$

$$\text{معادله} \xrightarrow{\text{ک.م.م} \times} y^2 + 3y + 2 + 2y^2 + 4y = 6y^2 + 6y$$

$$\Rightarrow 3y^2 - y - 2 = 0$$

$$\rightarrow \text{جواب } y = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\rightarrow y = \frac{-1}{3} \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 3} 3x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = -60 \text{ حقیقی ندارد}$$

پس تنها جواب معادله  $x = 1$  است.

تمرین ۱: به ازای چه مقدار از  $k$ ، مجموعه جواب معادله  $\frac{k}{x+2} + \frac{x}{x-1} = 1$  برابر  $\{5\}$  است؟

باید در معادله  $x = 5$  را قرار داد تا مقدار  $k$  بدست آید:

$$\frac{k}{8} + \frac{5}{4} = 1 \xrightarrow{\times 8} k + 10 = 8 \Rightarrow k = -2$$

تمرین ۳: هتوی به همراه تعدادی از دوستانش به سیفا رفت و هزینه بلیط هتوی

آنجا ۱۰۰ دلار رسید. ولی چون هتوی شاگرد اول کلاس بود، دوستانش

تصمیم گرفتند هر کدام یک دلار بدهند تا هتوی پول بلیط خودش را ندهد.

دوستان هتوی چند نفر بودند؟

$$\frac{100}{x+1} = \text{پول بلیط هر نفر} \rightarrow x+1 = \text{تعداد کل شاگردان} \rightarrow x = \text{تعداد دوستان هتوی}$$

$$x \times \text{هر نفر یک دلار بدهند} \rightarrow x^2 = \text{پول بلیط هتوی}$$

$$\Rightarrow \frac{100}{x+1} = x^2 \xrightarrow{\times (x+1)} x^2 + x = 100 \Rightarrow x^2 + x - 100 = 0$$

$$\Rightarrow (x+10)(x-9) = 0 \rightarrow x = -10 \text{ غیر قابل قبول تعداد دوستان نمی تواند منفی باشد}$$

$$\rightarrow x = 9 \text{ هتوی ۱۰ دوست دارد} \Rightarrow \text{جواب}$$

تمرین ۴ : فاصله‌ی دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

گیریم سرعت حرکت کشتی در جهت حرکت آب،  $x$  باشد، پس سرعت حرکت در خلاف جریان آب  $x-8$  است.

حال با توجه به اینکه مسافت در رفت و برگشت هر کدام ۱۴۴ کیلومتر بوده، می‌توان گفت:

$$\frac{144}{x-8} = \text{زمان طی شده در خلاف جریان آب} \quad \text{و} \quad \frac{144}{x} = \text{زمان طی شده در جهت حرکت آب}$$

بنابراین با در نظر گرفتن ۲ ساعت زمان توقف داریم:

$$\frac{144}{x} + \frac{144}{x-8} + 2 = 17$$

$$\Rightarrow \frac{144}{x} + \frac{144}{x-8} = 15 \stackrel{\div 2}{\Rightarrow} \frac{72}{x} + \frac{72}{x-8} = 15 \quad \text{ک.م.م} = x(x-8)$$

$$\xrightarrow{\text{ک.م.م} \times \text{عبارت}} 72(x-8) + 72x = 15x^2 - 120x$$

$$\Rightarrow 72x^2 - 136x + 576 = 0 \Rightarrow \Delta = 10816 \Rightarrow x = \frac{136 \pm 104}{10}$$

سرعت حرکت کشتی در جهت حرکت آب ۲۴ کیلومتر در ساعت است  $\rightarrow x=24$   
 غیر قابل قبول است زیرا در این صورت، سرعت حرکت کشتی  $\rightarrow x=32$   
 در خلاف جریان آب  $-4,8 = 32 - 8$  که غیر قابل قبول است



ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

## معادلات شامل عبارت های گنگ

معادلاتی که دارای عبارت های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ نامند. برای حل این نوع معادلات سعی می کنیم تا حد امکان در یک طرف تساوی فقط یک رادیکال و بقیه در طرف دیگر قرار گرفته، سپس طرفین را به توان فرجه ی رادیکال می رسانیم و ... (به مثال های زیر دقت کنید)

توجه: جوابها به شرط قابل قبولند که در معادله اصلی (معادله اولیه) صدق کنند.

مثال:  $2\sqrt{x-1} - 4 = 0$

جواب  $9 = x \Rightarrow x-1=8 \xrightarrow{\text{توان 2}} \sqrt{x-1}=2 \xrightarrow{\div 2} 2\sqrt{x-1}=4$

مثال:  $\sqrt{x+2} + 4 = x$

$\Rightarrow \sqrt{x+2} = x-4 \xrightarrow{\text{توان 2}} x+2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \rightarrow x=2 \rightarrow$  غیر قابل قبول زیرا اگر در معادله اولیه قرار دهیم:  $2+4=2$  غیر منطقی است  
 $\rightarrow x=7$  جواب

مثال:  $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1} = 4$

$\Rightarrow \sqrt{2x+1} = 4 - \sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{توان 2}} 2x+1 = 16 - 8\sqrt{x+2} + x+2$

$\Rightarrow 8\sqrt{x+2} = -2x + 18 \xrightarrow{\div 2} 4\sqrt{x+2} = -x + 9$

$\xrightarrow{\text{توان 2}} 16x + 64 = x^2 - 18x + 81 \Rightarrow x^2 - 34x + 17 = 0$

جواب  $x=1$

$x=33$  غیر قابل قبول زیرا در معادله اولیه  $4+10=4$  خواهد بود که غیر منطقی است.

مثال:  $\frac{4}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

م.م.م =  $(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})$

مضرب  $\times$  م.م.م  $\rightarrow 4\sqrt{x} - 10 = 2x - 8 - \sqrt{x} - 2$

$\Rightarrow 4\sqrt{x} = 2x \xrightarrow{\div 2} 2\sqrt{x} = x \xrightarrow{\text{توان 2}} 4x = x^2 \Rightarrow 9x - x^2 = 0$

$\Rightarrow x(9-x) = 0 \rightarrow x=0$  جواب

$x=9$  جواب

## حل مسئله به کمک معادلات نش

مسئله (۱) سه برابر جذر عددی را با عدد  $\frac{2}{3}$  جمع کرده ایم، آن عدد شده است. این عدد را بدست آورید.

$$\text{عدد مورد نظر} = x \Rightarrow 3\sqrt{x} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}x \quad \times 3 \rightarrow 9\sqrt{x} + 2 = 4x$$

$$\Rightarrow 9\sqrt{x} = 4x - 2 \quad \xrightarrow{\text{توان } 2} 81x = 16x^2 - 72x + 4$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 81x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 18225 \Rightarrow x = \frac{81 \pm 135}{32}$$

$$\Rightarrow x = 9 \quad \text{جواب} \quad ; \quad x = \frac{9}{16} \quad \text{غیر قابل قبول}$$

مسئله (۲) آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

$$\text{عدد صحیح} = x \Rightarrow x + \sqrt{x} = 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 6 - x \quad \xrightarrow{\text{توان } 2} x = 36 - 12x + x^2 \quad \text{روش اول:}$$

$$\Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-9) = 0 \rightarrow x = 4 \quad \text{جواب}$$

$$\rightarrow x = 9 \quad \text{غیر قابل قبول}$$

روش دوم: بگیریم  $\sqrt{x} = t$ ، در نتیجه:

$$\text{معادله: } t^2 + t = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-2) = 0$$

$$\rightarrow t = -3 \Rightarrow \sqrt{x} = -3 \quad \text{غیر صحیح}$$

$$\rightarrow t = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \quad \xrightarrow{\text{توان } 2} x = 4 \quad \text{جواب}$$



مسئله (۳) یک مرغ دریایی در نقطه A به ارتفاع ۴ متر از

سطح آب قرار دارد و فاصله ی تصویر مرغ روی

آب از مانهی که در نقطه ی C قرار دارد ۱۲ متر

است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه B آمده پس در سطح آب از B به C می رود

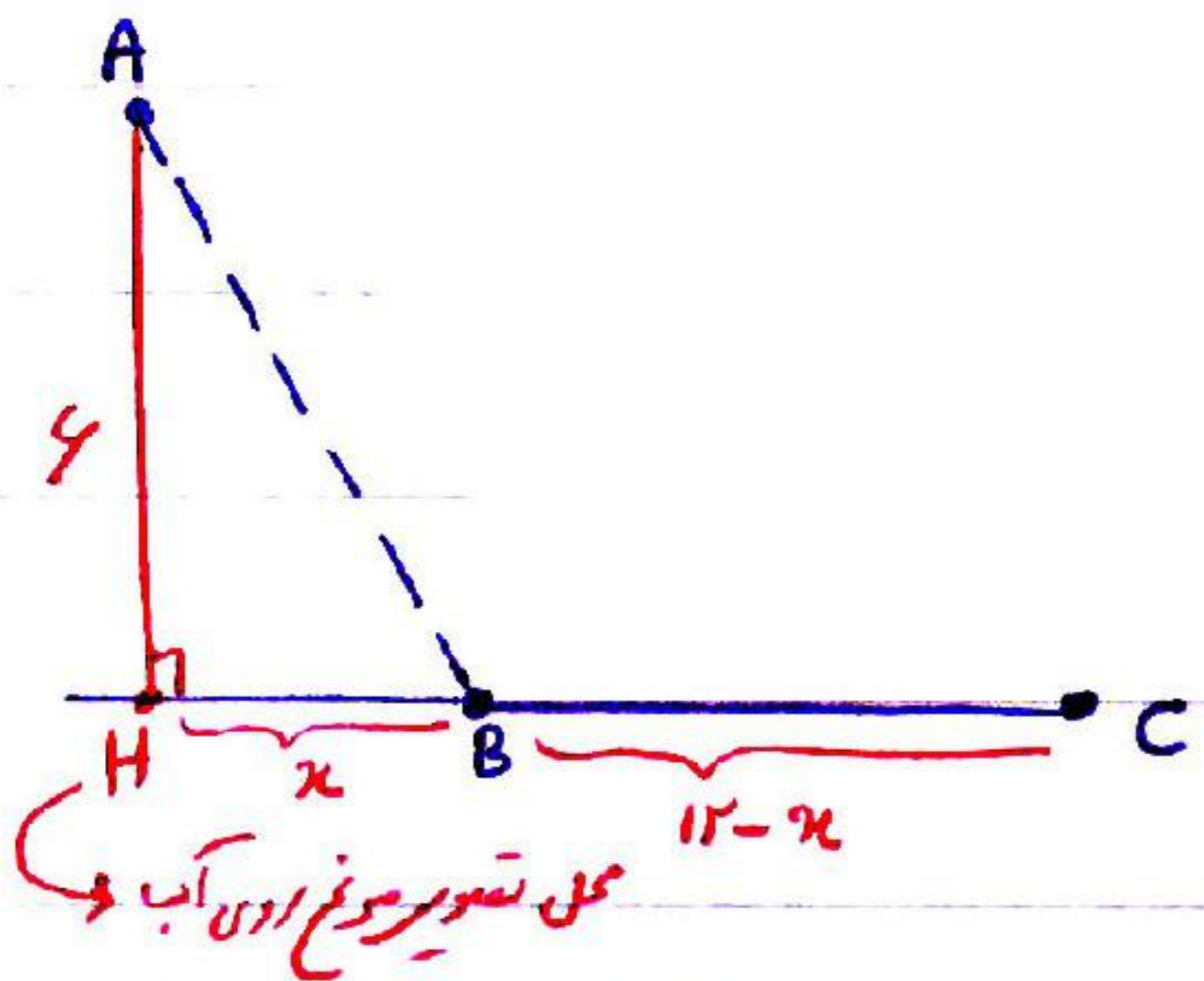
ماهی را شکار می کند. اگر مرغ دریایی برای طر هر متر در هوا ۱۴ کیلو کالری و برای

طر هر متر در سطح آب ۵ کیلو کالری انرژی مصرف کند، نقطه B در چه فاصله ای

از C باید باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلو کالری انرژی مصرف کند؟

اگر مرغ دریایی مستقیماً از A به C پرواز می کرد چقدر کالری مصرف می کرد؟

برای درک بهتر صورت مسئله شکل رو به رو را رسم می‌کنیم:



$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{x^2 + 36} \rightarrow \text{انرژی مصرفی در مسیر } AB = 14\sqrt{x^2 + 36} \\ BC &= 12 - x \rightarrow \text{انرژی مصرفی در مسیر } BC = 10(12 - x) \end{aligned} \right\} +$$

$$14\sqrt{x^2 + 36} + 10(12 - x) = 180 \xrightarrow{\pm 2} 7\sqrt{x^2 + 36} = 4x + 30 \xrightarrow{\text{توان } 2} 2x^2 - 24x + 72 = 0$$

$$\Rightarrow x = 8 \quad \text{ب} \quad x = 4, \text{د}$$

نیابراین فاصله B تا C برابر  $12 - 8 = 4$  یا  $12 - 4 = 8$  متر خواهد بود.

اما در صورتی که مستقیماً از A به C برویم داریم:

$$\text{نیابندون: } AC^2 = 36 + 144 \Rightarrow AC = \sqrt{180} \approx 13,4$$

$$\text{مقدار کار مصرفی در مسیر } AC = 13,4 \times 14 \approx 187,6$$

نکته: هر گاه مجموع دو یا چند عبارت نامنفی، صفر شود، هر کدام از آنها برابر صفر است.

مسئله: معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $\sqrt{x^2 - x} + |x^2 - 1| = 0$

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ب} \quad x = 1 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{ب} \quad x = -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \text{جواب } x = 1$$

ب)  $\sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x} = 0$

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ب} \quad x = 2 \\ x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

تمرین 1: معادلات زیر را حل کنید

الف)  $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 4x = 3x + 4 \Rightarrow x = 4 \quad \text{جواب}$$

ب)  $\frac{x}{3+\sqrt{x}} = \frac{4}{x+3\sqrt{x}}$

$$\xrightarrow{\text{ک.م.م}} \sqrt{x}(\sqrt{x}+3) \quad \text{ک.م.م} = \sqrt{x}(\sqrt{x}+3)$$

$$\xrightarrow{\text{ک.م.م} \times \text{مخرج}} 3\sqrt{x} = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{4}{3} \xrightarrow{\text{توان } 2} x = \frac{16}{9}$$



$$\text{پ) } \sqrt{x} - \sqrt{x-4} = 2$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x - \sqrt{x-4} = 4 \Rightarrow x - 4 = \sqrt{x-4} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 - 8x + 16 = x - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ یا } x = 5$$

$$\text{رت) } \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$$

$$\times (1+\sqrt{x}) \rightarrow 1-\sqrt{x} = 1-x+\sqrt{x}-x\sqrt{x} \Rightarrow x\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}(x+\sqrt{x}-2) = 0$$

$$\swarrow \sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0 \text{ جواب}$$

$$\searrow x+\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x}=2-x \xrightarrow{\text{توان ۲}} x = 4 - 4x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ جواب}$$

$$\searrow x = 4 \text{ غیر قابل قبول}$$

تمرین ۲: جذور مقلوس یک عدد، هست برابر همان عدداست. آن عدد را بیابید.

$x =$  عدد مورد نظر

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x}} = 1/x \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{1}{x} = 1/x^2 \times x \rightarrow 1/x = 1/x^2 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{64}$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم}} x = \frac{1}{4} \text{ جواب}$$

$$\text{تمرین ۳: معادله } \sqrt{x^2-1} + \sqrt{2x^3+x+3} = 0 \text{ را حل کنید.}$$

طبق نشی گفته شده باید هر دو عبارت صفر باشند لذا معادله  $\sqrt{x^2-1} = 0$  را حل

$$\text{ص کنیم: } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -1$$

به جای آنکه عبارت دوم را برابر صفر قرار داده و معادله درجه ۳ را حل کنیم، راه ساده تر است.  
استفاده کنیم.

از این دو جواب  $x = 1$  و  $x = -1$ ، آن جوابی قابل قبول است که عبارت دیگر را

صفر کند، لذا  $x = -1$  جواب خواهد بود.

ملاسعدی @sinxcosx



09168324500

