بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

ریاضی (۳)

پایه دوازدهم علوم تجربی

فصل ۵

۱ اکسترمم های تابع

۲ بهینه سازی

تهیه و تنظیم : مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2

Majid.ghaderi.mathclass.2

فصل ۵ درس ۲	بهینه سازی

اهداف

- آشنایی با مفهوم بهینه سازی به عنوان یکی از کاربردهای مهم مشتق تابع
- آشنایی با مدل سازی ریاضی از پدیده ها و مسائل دنیای واقعی
- آشنایی با حل مسائل دنیای واقعی به کمک مشتق تابع

صفحه ۱۱۳ کتاب درسی

افراد در طول روز کارهای بسیاری انجام می دهند؛ به جاهای مختلفی می روند، از وسایل متنوعی استفاده می کنند، خرید می کنند، درس می خوانند و ... . در تمام این فعالیت ها، هدف آن است که بهترین تصمیم ها اتخاذ گردند.

به عنوان مثال:

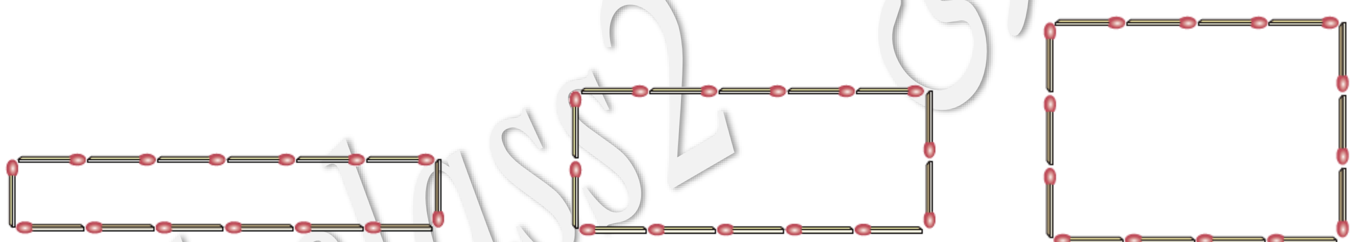
- ✓ مدیر یک شرکت تولیدی همواره به دنبال آن است که بیشترین سود را با صرف کمترین هزینه کسب نماید.
- ✓ یک باغدار را درنظر بگیرید که با استفاده از روش های نوین کشاورزی، درصدد آن است که با صرف کمترین هزینه، بیشترین مقدار محصول را از واحد سطح برداشت کند.

چنین مسئله هایی در زمرهٔ مسائل بهینه سازی هستند که برخی از آنها به کمک مشتق قابل حل اند.

در اینجا مسائلی را با هدف ماکزیمم کردن مساحت، حجم، سود یا مینیمم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد.

فعالیت ۱ صفحهٔ ۱۱۳ کتاب درسی

فرض کنید ۱۴ چوب کبریت در اختیار داشته باشیم و طول هرکدام از آنها را یک واحد درنظر بگیریم. با استفاده از همه این چوب کبریت ها، مستطیل می سازیم. نتیجه کار در سه حالت مختلف در شکل زیر آمده است:



الف) در هر سه حالت، محیط مستطیل ها ثابت و برابر ...۱۴... واحد است.

ب) در این مستطیل های هم محیط، دیده می شود که مساحت ها برابر نیستند و به ترتیب برابر ۶ ، ۱۰ و ...۱۲... واحد مربع هستند.

پ) مشاهده می شود که هرچقدر اندازه طول و عرض یک مستطیل به هم نزدیک تر می شود، مساحت آن ...افزایش... می یابد.

فعالیت ۲ صفحهٔ ۱۱۳ کتاب درسی

جدول زیر را مورد توجه قرار دهید که در آن ابعاد و مساحت چند مستطیل با محیط ۱۴ واحد آمده است.

ابعاد مستطیل	۰/۵×۶/۵	۱×۶	۲×۵	۲/۵×۴/۵	۳×۴	۳/۲×۳/۸	...
محیط مستطیل	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
مساحت	۳/۲۵	۶	۱۰	۱۱/۲۵	۱۲	۱۲/۱۶	...

الف) در این جدول، بزرگ ترین عددی که برای مساحت مستطیل دیده می شود، ۱۲/۱۶ است. اگر برای طول و عرض مستطیل تنها به اعداد طبیعی محدود نباشیم، آیا می توانید مستطیل دیگری با محیط ۱۴ واحد ارائه کنید که مساحت آن از عدد ۱۲/۱۶ واحد مربع هم بزرگ تر باشد؟

بله، به عنوان مثال؛ مستطیلی با ابعاد ۳/۳×۳/۷ دارای محیط ۱۴ و مساحت ۱۲/۲۱ واحد مربع است.

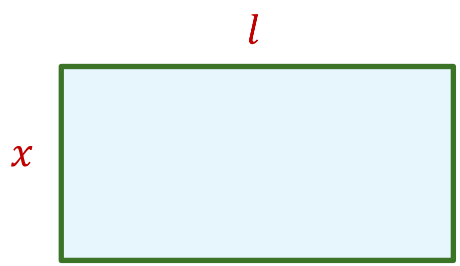
ب) برای حالتی که مساحت مستطیل بزرگ ترین مقدار ممکن می شود، چه حدسی می زنید؟ ۱۲/۲۵

مستطیلی با ابعاد ۳/۵×۳/۵ دارای محیط ۱۴ و مساحت ۱۲/۲۵ واحد مربع است.

درستی نتیجه ای را که در این فعالیت حدس زدیم، در مثال بعد با استفاده از مشتق بررسی می کنیم.

مثال ۱ صفحه ۱۱۴ کتاب درسی

نشان دهید در بین تمام مستطیل های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشند.



فرض کنید ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است. داریم: $S = x.l$

برای این که S تابعی برحسب x باشد، l را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از محیط مستطیل استفاده می کنیم.

$$۲(x+l) = ۱۴ \rightarrow (x+l) = ۷ \rightarrow l = ۷ - x$$

$$S(x) = x.l \xrightarrow{l = ۷ - x} S(x) = x(۷-x) \rightarrow S(x) = -x^۲ + ۷x \quad , \quad x \in [۰ , ۷]$$

مشتق تابع S را به دست آورده و آن را مساوی صفر قرار داده، ریشه های آن را می یابیم.

$$S'(x) = -۲x + ۷ \xrightarrow{S'(x) = ۰} -۲x + ۷ = ۰ \rightarrow x = ۳/۵$$

بنابراین نقاط به طول ۳/۵ ، ۰ و ۷ نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[۰ , ۷]$ هستند. (۰ و ۷ ابتدا و انتهای دامنه تابع هستند)

ادامهٔ مثال ۱ صفحه ۱۱۴ کتاب درسی

جدول تغییرات تابع S در بازهٔ $[۰ , ۷]$ را رسم می کنیم.

x	۰	۳/۵	۷
علامت S'	+	۰	−
یکنوایی S	اکیدا صعودی		اکیدا نزولی
	۰	۱۲/۲۵ max مطلق	۰

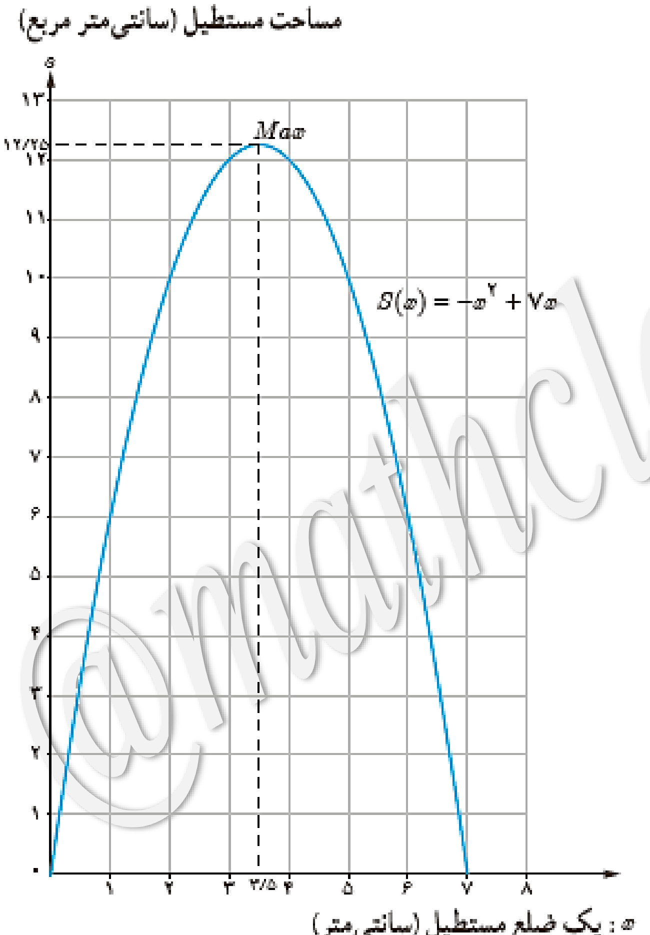
$$S(۰) = -(۰)^۲ + ۷(۰) = ۰$$

$$S(۳/۵) = -(۳/۵)^۲ + ۷(۳/۵) = ۱۲/۲۵$$

$$S(۷) = -(۷)^۲ + ۷(۷) = ۰$$

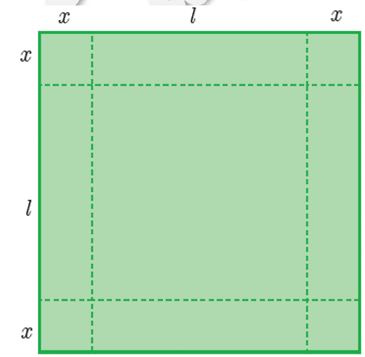
از جدول تغییرات دیده می شود که بیشترین مقدار مساحت، ۱۲/۲۵ سانتی متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می شود که طول و عرض مستطیل هم اندازه و مساوی ۳/۵ سانتی متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع ۳/۵ سانتی متر مربع داشته باشیم.

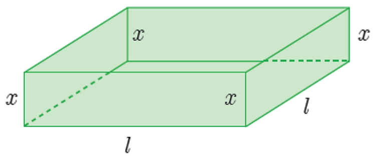
نمودار تابع S در بازهٔ $[۰ , ۷]$ رسم شده است.
به نقطهٔ ماکزیمم آن دقت کنید:



مثال ۲ صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع $۳۰cm$ را درنظر بگیرید. مطابق شکل می خواهیم از چهارگوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه درباز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟





ارتفاع مکعب حاصل همان x است. طول و عرض قاعده آن را با l نمایش می دهیم.

آنچه قرار است ماکزیمم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است. داریم: $V = x.l^۲$

برای این که V تابعی برحسب x باشد، l را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از طول ضلع ورق فلزی استفاده می کنیم.

$$۲x + l = ۳۰ \rightarrow l = ۳۰ - ۲x$$

$$V(x) = x.l^۲ \xrightarrow{l = ۳۰ - ۲x} V(x) = x(۳۰ - ۲x)^۲ \rightarrow V(x) = ۴x^۳ - ۱۲۰x^۲ + ۹۰۰x \quad , x \in [۰ \,,\, ۱۵]$$

نقطه بحرانی تابع $V(x)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ارتفاع بهینه را پیدا می کنیم.

$$V'(x) = ۱۲x^۲ - ۲۴۰x + ۹۰۰ \xrightarrow{V'(x) = ۰} ۱۲x^۲ - ۲۴۰x + ۹۰۰ = ۰ \rightarrow x^۲ - ۲۰x + ۷۵ = ۰$$

$$\rightarrow (x - ۵)(x - ۱۵) = ۰ \Longrightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = ۱۵ \end{cases}$$

بنابراین نقاط به طول ۵ ، ۰ و ۱۵ نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[۰ \,,\, ۱۵]$ هستند.

$$V(۰) = ۴(۰)^۳ - ۱۲۰(۰)^۲ + ۹۰۰(۰) = ۰$$

$$V(۱۵) = ۴(۱۵)^۳ - ۱۲۰(۱۵)^۲ + ۹۰۰(۱۵) = ۰$$

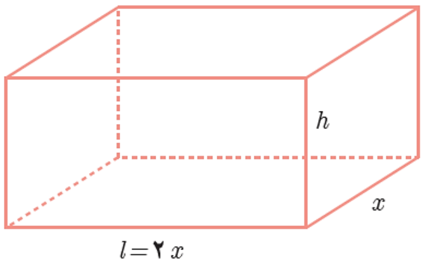
$$V(۵) = ۴(۵)^۳ - ۱۲۰(۵)^۲ + ۹۰۰(۵) = ۲۰۰۰$$

x	۰		۵		۱۵
علامت V'		+	۰	−	۰
یکنوایی V	۰	اکیدا صعودی ↗	۲۰۰۰ max مطلق	اکیدا نزولی ↘	۰

بنابراین اگر ارتفاع ۵ سانتی متر باشد، حجم قوطی، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود.

مثال ۳ صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

می خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل درباز بسازیم که حجم آن ۱۰ سانتی متر مکعب بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟



ارتفاع مخزن را با h و طول و عرض کف آن را با l و x نمایش می دهیم. آنچه قرار است کمترین مقدار شود، هزینه مصالح مصرف شده است. هزینه مصالح را به شکل زیر می توان تعیین نمود:

هزینه مصالح برای ساخت کف مخزن بر حسب هزار تومان $= ۱۰۰(x.l) = ۲۰۰x^۲$

هزینه مصالح برای ساخت دیواره های مخزن بر حسب هزار تومان $= ۶۰(۲xh) + ۶۰(۲lh) = ۳۶۰xh$

برای این که C تابع هزینه مصالح مصرف شده برحسب x باشد، h را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از حجم مخزن استفاده می کنیم.

$$x.l.h = ۱۰ \quad \rightarrow \quad h = \frac{۱۰}{x.l} = \frac{۱۰}{x(۲x)} = \frac{۵}{x^۲}$$

هزینه مصالح برای ساخت مخزن بر حسب هزار تومان $= ۲۰۰x^۲ + ۳۶۰xh$

$$C(x) = ۲۰۰x^۲ + ۳۶۰x\left(\frac{۵}{x^۲}\right) = ۲۰۰x^۲ + \frac{۱۸۰۰}{x} \qquad , x \in (۰\,, +\infty)$$

$$C'(x) = ۴۰۰x - \frac{۱۸۰۰}{x^۲} \xrightarrow{C'(x)=۰} ۴۰۰x - \frac{۱۸۰۰}{x^۲} = ۰$$

$$\rightarrow \frac{۴۰۰x^۳ - ۱۸۰۰}{x^۲} = ۰ \rightarrow ۴۰۰x^۳ - ۱۸۰۰ = ۰ \rightarrow x = \sqrt[۳]{۴/۵}$$

x	۰		$\sqrt[۳]{۴/۵}$		$+\infty$
علامت C'		$-$	۰	$+$	
یکنوایی C	$+\infty$	اکیدا نزولی	۱۶۳۵ min مطلق	اکیدا صعودی	$+\infty$

کمترین هزینه مصالح ۱۶۳۵۰۰۰ تومان است که به ازای عرض $\sqrt[۳]{۴/۵}$ متر حاصل می شود.

مثال ۴ صفحه ۱۱۶ کتاب درسی

غلظت یک داروی شیمیایی درخون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطهٔ زیر به دست می آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

$$C(t)=\frac{۳t}{t^{۳}+۲۷}\qquad , \qquad t\in[۰\,,+\infty)$$

زمان بهینه همان مدت زمان است که به ازای آن میزان غلظت خون پس از تزریق دارو بیشترین مقدار ممکن باشد.

نقطه بحرانی تابع $C(t)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، زمان بهینه را پیدا می کنیم.

$$C'(t)=\frac{۳(t^{۳}+۲۷)-۳t^{۲}(۳t)}{(t^{۳}+۲۷)^{۲}}\xrightarrow{C'(t)=۰}\frac{۳(t^{۳}+۲۷)-۳t^{۲}(۳t)}{(t^{۳}+۲۷)^{۲}}=۰$$

$$\rightarrow\ ۳(t^{۳}+۲۷)-۳t^{۲}(۳t)=۰\ \rightarrow\ (t^{۳}+۲۷)-۳t^{۳}=۰\ \rightarrow\ ۲۷-۲t^{۳}=۰$$

$$\rightarrow\ ۲t^{۳}=۲۷\ \rightarrow\ t=\sqrt[۳]{\frac{۲۷}{۲}}\cong ۲/۳۸$$

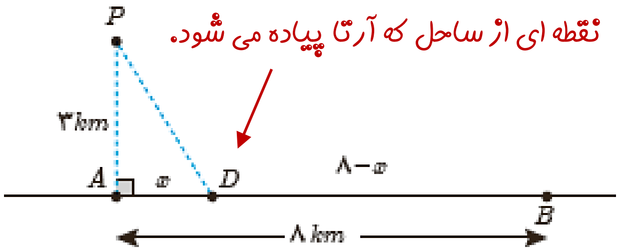
$$C(۲/۳۸)=\frac{۳(۲/۳۸)}{(۲/۳۸)^{۳}+۲۷}=۰/۱۸$$

t	۰		۲/۳۸		$+\infty$
علامت C'		$+$	۰	$-$	
یکنوایی C	۰	اکیدا صعودی	۰/۱۸ max مطلق	اکیدا نزولی	۰

پیشترین میزان غلظت خون تقریبا برابر ۰/۱۸ است که تقریبا ۲/۳۸ ساعت پس از تزریق حاصل می شود.

مثال ۵ صفحه ۱۱۷ کتاب درسی

آرتا درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک ترین نقطهٔ ساحل یعنی نقطهٔ A ، معادل ۳ کیلومتر است. او می خواهد به نقطهٔ B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ کیلومتر بر ساعت و سرعت پیاده روی آرتا در ساحل ۴ کیلومتر بر ساعت باشد. اگر او بخواهد در کوتاه ترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده روی کند؟



طبق رابطهٔ فیثاغورس : $\overline{PD} = \sqrt{x^۲ + ۹}$

می دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، داریم: $t = \dfrac{x}{v}$

زمان پیاده روی کردن مسیر نقطهٔ D تا نقطهٔ B $= \dfrac{\overline{DB}}{۴} = \dfrac{۸ - x}{۴}$

زمان پارو زدن مسیر نقطهٔ P تا نقطهٔ D $= \dfrac{\overline{PD}}{۲} = \dfrac{\sqrt{x^۲ + ۹}}{۲}$

مسافت بهینه همان مسافتی است که به ازای آن مدت زمان رسیدن آرتا از نقطهٔ P به B کمترین مقدار ممکن باشد.

t تابع زمان سپری شده برحسب x ، برابر است با مجموع زمان پارو زدن مسیر نقطهٔ P تا نقطهٔ D وزمان پیاده روی کردن مسیر نقطهٔ D تا نقطهٔ B

$$t(x) = \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{x^۲ + ۹}\right) + \frac{۱}{۴}(۸ - x) \quad , \qquad x \in [۰\,,\,۸]$$

$$t'(x) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۹}}\right) + \frac{۱}{۴}(-۱) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{x}{\sqrt{x^۲ + ۹}}\right) - \frac{۱}{۴} \xrightarrow{t'(x) = ۰} \frac{x}{\sqrt{x^۲ + ۹}} - \frac{۱}{۲} = ۰ \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^۲ + ۹}} = \frac{۱}{۲}$$

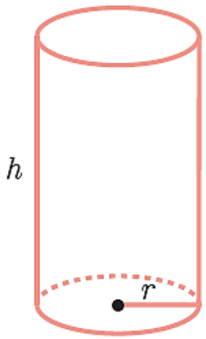
$$\rightarrow ۲x = \sqrt{x^۲ + ۹} \rightarrow ۴x^۲ = x^۲ + ۹ \rightarrow ۳x^۲ = ۹ \rightarrow x = \sqrt{۳}$$

x	۰		$\sqrt{۳}$		۸
علامت t'		$-$	۰	$+$	
t یکنوایی	۳/۵	اکیدا نزولی ↘	۳/۳ مطلق min	اکیدا صعودی ↗	۴/۲۷

بنابراین نقاط به طول $\sqrt{۳}$ ، ۰ و ۸ نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[۰\,,\,۸]$ هستند.

کمترین زمان ممکن برای رسیدن آرتا از نقطهٔ P به B تقریبا برابر ۳/۳ ساعت است که به ازای $x = \sqrt{۳}$ کیلومتر حاصل می شود.

کار در کلاس ۱ صفحه ۱۱۸ کتاب درسی



می خواهیم یک قوطی فلزی استوانه ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

ابعاد بهینه قوطی همان ابعادی است که به ازای آنها مقدار فلز به کار رفته در تولید قوطی، کمترین مقدار ممکن باشد.

به منظور یافتن مساحت کل استوانه (S) می بایست مساحت قاعده آن را با مساحت سطح جانبی جمع بزنیم.

$$S = \pi r^{۲} + ۲\pi r h$$

برای این که $S(r)$ تابع مساحت برحسب r باشد، h را برحسب r به دست می آوریم. به این منظور از حجم استوانه استفاده می کنیم.

$$\pi r^{۲} h = ۱۰۰۰ \quad \rightarrow \quad h = \frac{۱۰۰۰}{\pi r^{۲}}$$

$$S(r) = \pi r^{۲} + ۲\pi r h = \pi r^{۲} + ۲\pi r\left(\frac{۱۰۰۰}{\pi r^{۲}}\right) = \pi r^{۲} + \frac{۲۰۰۰}{r}$$

نقطه بحرانی تابع $S(r)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ابعاد بهینه را پیدا می کنیم.

$$S'(r) = ۲\pi r - \frac{۲۰۰۰}{r^{۲}} \xrightarrow{S'(r)=۰} ۲\pi r - \frac{۲۰۰۰}{r^{۲}} = ۰ \quad \rightarrow \quad \frac{۲\pi r^{۳} - ۲۰۰۰}{r^{۲}} = ۰$$

$$\rightarrow \quad ۲\pi r^{۳} - ۲۰۰۰ = ۰ \quad \rightarrow \quad r^{۳} = \frac{۲۰۰۰}{۲\pi} \quad \rightarrow \quad r = \frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}} \cong ۶/۸۳$$

$$S\left(\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}\right) = \pi\left(\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}\right)^{۲} + \frac{۲۰۰۰}{\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}} = ۳۰۰\sqrt[۳]{\pi} \cong ۴۳۹/۴$$

r	۰		۶/۸۳		$+\infty$
علامت S'		$-$	•	$+$	
یکنوایی S	$+\infty$	اکیدا نزولی	۴۳۹/۴	اکیدا صعودی	$+\infty$
			min مطلق		

بنابراین اگر $r \cong ۶/۸۳$ و $h \cong ۶/۸۳$ سانتی متر باشند، کمترین مقدار فلز در تولید قوطی به کار خواهد رفت. (تقریبا ۴۳۹/۴ سانتی متر مربع)

کار در کلاس ۲ صفحه ۱۱۸ کتاب درسی

هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $۳۲۰v^{۲}$ تومان است. همچنین سایر هزینه ها برای هر ساعت، صرف نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

هزینهٔ قطار به ازای t ساعت حرکت : $C = ۸۰۰۰۰۰t + (۳۲۰v^{۲})t$

می دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، داریم: $t = \frac{x}{v}$

هزینهٔ قطار به ازای x کیلومتر حرکت : $C = ۸۰۰۰۰۰\left(\frac{x}{v}\right) + (۳۲۰v^{۲})\frac{x}{v}$

هزینهٔ قطار به ازای یک کیلومتر حرکت با سرعت ثابت v :

$$C(v) = ۸۰۰۰۰۰\left(\frac{۱}{v}\right) + (۳۲۰v^{۲})\frac{۱}{v} = \frac{۸۰۰۰۰۰}{v} + ۳۲۰v \quad , \quad v \in [۰\,,+\infty)$$

سرعت بهینه همان سرعتی است که به ازای آن هزینه قطار در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

نقطه بحرانی تابع $C(v)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، سرعت بهینه را پیدا می کنیم.

$$C'(v) = -\frac{۸۰۰۰۰۰}{v^{۲}} + ۳۲۰ \xrightarrow{C'(v)=۰} -\frac{۸۰۰۰۰۰}{v^{۲}} + ۳۲۰ = ۰ \rightarrow \frac{۸۰۰۰۰۰}{v^{۲}} = ۳۲۰$$

$$\rightarrow ۳۲۰v^{۲} = ۸۰۰۰۰۰ \rightarrow v^{۲} = ۲۵۰۰ \rightarrow v = ۵۰$$

$$C(۵۰) = \frac{۸۰۰۰۰۰}{۵۰} + ۳۲۰(۵۰) = ۳۲۰۰۰$$

v	۰		۵۰		$+\infty$
علامت C'		$-$	۰	$+$	
یکنوایی C	$+\infty$	اکیدا نزولی ↘	۳۲۰۰۰ min مطلق	اکیدا صعودی ↗	$+\infty$

بنابراین، اگر قطار با سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کند، هزینهٔ آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن خواهد بود.

کار در کلاس ۳ صفحه ۱۱۹ کتاب درسی

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

مقادیر بهینه اعداد همان مقادیری هستند که به ازای آنها حاصل ضربشان، کمترین مقدار ممکن باشد.

x و y دو عدد حقیقی دلخواه هستند که تفاضل شان برابر ۱۰ است. y را بر حسب x بنویسیم.

$$x - y = ۱۰ \rightarrow y = x - ۱۰$$

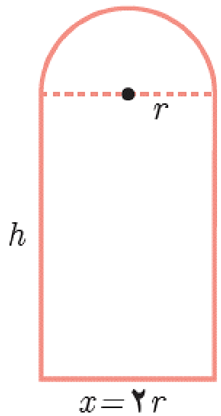
تابع حاصل ضرب آنها بر حسب x : $P(x) = x.y = x(x - ۱۰) = x^۲ - ۱۰x$

$P'(x)$ را برابر صفر قرار داده، مقدار بهینه x را پیدا می کنیم.

$$P'(x) = ۲x - ۱۰ \xrightarrow{P'(x) = ۰} ۲x - ۱۰ = ۰ \rightarrow x = ۵$$

$$y = x - ۱۰ \xrightarrow{x = ۵} y = -۵$$

کار در کلاس ۴ صفحه ۱۱۹ کتاب درسی



دربرخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم دایره ای برروی آن می باشد به طوری که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

برای داشتن بیشترین نوردهی باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.

به منظور یافتن مساحت پنجره (S) می بایست مساحت مستطیل را با نیم دایره بالای آن جمع بزنیم.

$$S=\frac{1}{2}\pi r^2+2rh$$

برای این که $S(r)$ تابع مساحت برحسب r باشد، h را برحسب r به دست می آوریم. به این منظور از محیط پنجره استفاده می کنیم.

$$\frac{1}{2}(2\pi r)+2h+2r=4/5 \rightarrow \pi r+2h+2r=4/5 \rightarrow 2h=4/5-2r-\pi r \rightarrow h=2/25-r-\frac{\pi r}{2}$$

$$S(r)=\frac{1}{2}\pi r^2+2r\left(2/25-r-\frac{\pi r}{2}\right)=\frac{1}{2}\pi r^2+4/5r-2r^2-\pi r^2=-\left(\frac{1}{2}\pi+2\right)r^2+4/5r$$

نقطه بحرانی تابع $S(r)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ابعاد بهینه را پیدا می کنیم.

ابعاد بهینه پنجره همان ابعادی است که به ازای آنها نوردهی پنجره، بیشترین مقدار ممکن باشد.

$$S'(r)=-(\pi+4)r+4/5 \xrightarrow{S'(r)=0} -(\pi+4)r+4/5=0$$

$$\rightarrow (\pi+4)r=4/5 \rightarrow r=\frac{4/5}{\pi+4}\cong 0/63$$

$$S(0/63)=-\left(\frac{1}{2}\pi+2\right)(0/63)^2+4/5(0/63)\cong 1/41$$

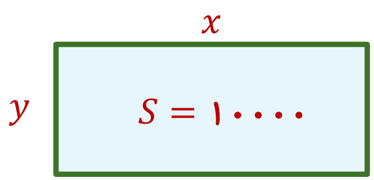
r	۰		۰/۶۳		$+\infty$
علامت S'		+	۰	−	
یکنوایی S	۰	اکیدا صعودی	۱/۴۱	اکیدا نزولی	$-\infty$
			max مطلق		

بنابراین اگر $r\cong 0/63$ و $h=0/63$ متر باشند، پنجره بیشترین نوردهی را خواهد داشت.

(تقریبا ۱/۴۱ سانتی متر مربع)

تمرین ۱ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی

کشاورزی می خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.



الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

فرض کنید ابعاد زمین x و y باشند. داریم:

$$C = ۲x(۲۰۰۰۰۰۰) + ۲y(۸۰۰۰۰۰۰)$$: هزینهٔ مورد نیاز برای انجام کار

برای این که C تابعی برحسب x باشد، y را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از مساحت مستطیل استفاده می کنیم.

$$S = x.y = ۱۰۰۰۰ \quad \rightarrow \quad y = \frac{۱۰۰۰۰}{x}$$

$$C(x) = ۲x(۲۰۰۰۰۰۰) + ۲\left(\frac{۱۰۰۰۰}{x}\right)(۸۰۰۰۰۰۰) = ۴۰۰۰۰۰۰x + \frac{۱۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}{x}$$

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

نقطه بحرانی تابع $C(x)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ابعاد بهینه را پیدا می کنیم.

$$C'(x) = ۴۰۰۰۰۰۰ - \frac{۱۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}{x^۲} \xrightarrow{C'(x) = ۰} ۴۰۰۰۰۰۰ - \frac{۱۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}{x^۲} = ۰$$

$$\rightarrow \quad ۴۰۰۰۰۰۰x^۲ = ۱۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ \quad \rightarrow \quad x^۲ = ۴۰۰۰۰ \quad \rightarrow \quad x = ۲۰۰$$

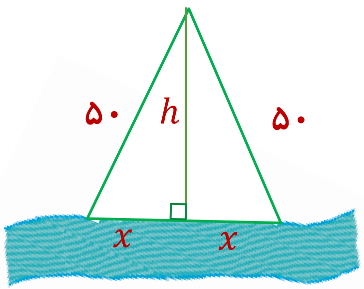
$$C(۲۰۰) = ۴۰۰۰۰۰۰(۲۰۰) + \frac{۱۶۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}{۲۰۰} = ۱۶۰۰۰۰۰۰۰۰$$

x	۰		۲۰۰		$+\infty$
علامت C'		$-$	۰	$+$	
یکنوایی C		اکیدا نزولی	۱۶×۱۰^۸ min مطلق	اکیدا صعودی	

بنابراین اگر طول دیوارهای شمالی و جنوبی ۲۰۰ و عرض آن برابر ۵۰ متر باشد، هزینه دیوارکشی، حداقل مقدار ممکن خواهد بود.

تمرین ۲ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی

الف) می خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم به طوری که قاعدهٔ مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟



مساحت محوطهٔ مثلثی شکل : $S=\frac{۱}{۲}(۲x)h$

برای این که S تابعی برحسب x باشد، h را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از رابطهٔ فیثاغورس استفاده می کنیم.

$$۵۰^۲=h^۲+x^۲\ \rightarrow\ h=\sqrt{۵۰^۲-x^۲}$$

$$S(x)=\frac{۱}{۲}(۲x)\sqrt{۵۰^۲-x^۲}=x\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}$$

نقطه بحرانی تابع $S(x)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ابعاد بهینه را پیدا می کنیم.

$$S'(x)=\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}+x\left(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}}\right)=\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}}\xrightarrow{S'(x)=۰}$$

$$\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}-\frac{x^۲}{\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}}=۰\ \rightarrow\ \sqrt{۲۵۰۰-x^۲}=\frac{x^۲}{\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}}\ \rightarrow\ \left(\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}\right)\left(\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}\right)=x^۲$$

$$\rightarrow\ x^۲=۲۵۰۰-x^۲\ \rightarrow\ ۲x^۲=۲۵۰۰\ \rightarrow\ x=\sqrt{۱۲۵۰}$$

x	۰		$\sqrt{۱۲۵۰}$		$+\infty$
علامت S'		$+$	۰	$-$	
یکنوایی S	۰	اکیدا صعودی $\nearrow$	۱۲۵۰ مطلق max	اکیدا نزولی $\searrow$	$-\infty$

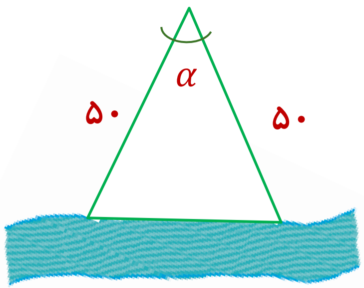
$$S(\sqrt{۱۲۵۰})=\sqrt{۱۲۵۰}\times\sqrt{۲۵۰۰-۱۲۵۰}=۱۲۵۰$$

بنابراین مساحت محوطه، بیشترین مقدار ممکن یعنی ۱۲۵۰ متر مربع خواهد بود.

تمرین ۲ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی

ب) می خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم به طوری که قاعدهٔ مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.



با داشتن سینوس زاویهٔ بین دو ضلع از مثلث می توانیم مساحت آن را تعیین کنیم.

$$S = \frac{۱}{۲}(۵۰)(۵۰)\sin\alpha = ۱۲۵۰\sin\alpha$$

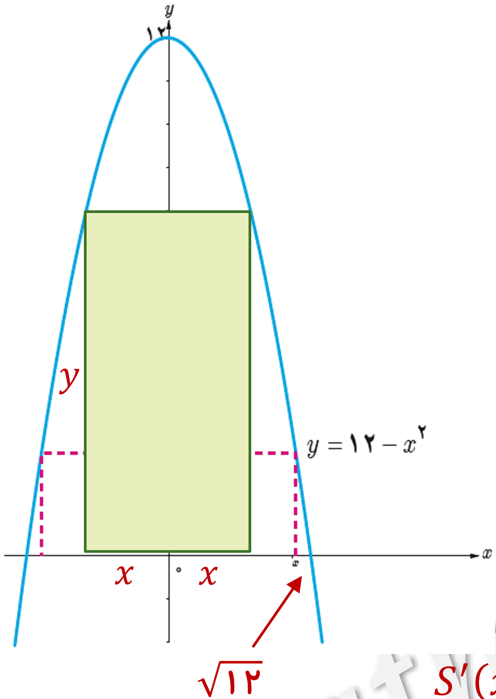
هنگامی S دارای بیشترین مقدار است که سینوس زاویهٔ α دارای بیشترین مقدار ممکن باشد.
می دانیم بیشترین مقدار ممکن سینوس یک زاویه برابر یک است، پس خواهیم داشت:

$$S = ۱۲۵۰\sin\alpha \xrightarrow{\sin\alpha = ۱} S = ۱۲۵۰ \times ۱ = ۱۲۵۰$$

بنابراین مساحت محوطه، بیشترین مقدار ممکن یعنی ۱۲۵۰ متر مربع خواهد بود.

تمرین ۳ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی

ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس بالای محور xها و روی سهمی $y = ۱۲ - x^۲$ باشند.



طول مستطیل برابر با $۲x$ و عرض آن y می باشد. پس داریم: $S = ۲xy$

برای این که S تابعی برحسب x باشد، y را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از ضابطهٔ سهمی استفاده می کنیم.

$$S(x) = ۲x(۱۲ - x^۲) = ۲۴x - ۲x^۳ \quad , \quad x \in [\cdot , \sqrt{۱۲}]$$

نقطه بحرانی تابع $S(x)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ابعاد بهینه را پیدا می کنیم.

$$S'(x) = ۲۴ - ۶x^۲ \xrightarrow{S'(x) = \cdot} ۲۴ - ۶x^۲ = \cdot \rightarrow ۶x^۲ = ۲۴ \rightarrow x = ۲$$

x	$\cdot$		۲		$\sqrt{۱۲}$
علامت S'		+	$\bullet$	−	
یکنوایی S	$\cdot$	اکیدا صعودی	۳۲ max مطلق	اکیدا نزولی	$\cdot$

$$S(۲) = ۲۴(۲) - ۲(۲)^۳ = ۳۲$$

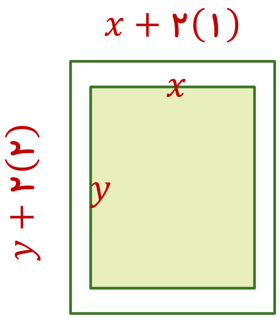
طول مستطیل $= ۲x \xrightarrow{x = ۲}$ طول مستطیل $= ۴$

عرض مستطیل $= ۱۲ - x^۲ \xrightarrow{x = ۲}$ عرض مستطیل $= ۸$

بنابراین اگر طول مستطیل ۴ و عرض آن برابر ۸ واحد باشد، مساحت، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود.

تمرین ۴ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی

هر صفحهٔ مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت ۳۲cm² خواهد بود. هنگام طرّاحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایینی هر صفحه ۲ سانتی متر و حاشیه های کناری هر کدام یک سانتی متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.



فرض کنید ابعاد متن x و y باشند.

با توجه به ابعاد متن و حاشیه ها، مساحت صفحه برابر است با: $S=(x+۲(۱))(y+۲(۲))$

برای این که S تابعی برحسب x باشد، y را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از مساحت متن استفاده می کنیم.

$$x.y=۳۲ \rightarrow y=\frac{۳۲}{x}$$

$$S(x)=(x+۲(۱))\left(\frac{۳۲}{x}+۲(۲)\right)=(x+۲)\left(\frac{۳۲}{x}+۴\right)=۴x+\frac{۶۴}{x}+۴۰$$

نقطه بحرانی تابع $S(x)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ابعاد بهینه را پیدا می کنیم.

$$S'(x)=۴-\frac{۶۴}{x^۲}\xrightarrow{S'(x)=۰}۴-\frac{۶۴}{x^۲}=۰ \rightarrow ۴x^۲=۶۴ \rightarrow x=۴$$

$$S(۴)=۴(۴)+\frac{۶۴}{۴}+۴۰=۷۲$$

x	۰		۴		$+\infty$
علامت S'		$-$	۰	$+$	
یکنوایی S		اکیدا نزولی	۷۲ min مطلق	اکیدا صعودی	

$$y=\frac{۳۲}{x}\xrightarrow{x=۴}y=\frac{۳۲}{۴}=۸ \rightarrow \begin{cases} x+۲(۱)=۶ \\ y+۲(۲)=۱۲ \end{cases}$$

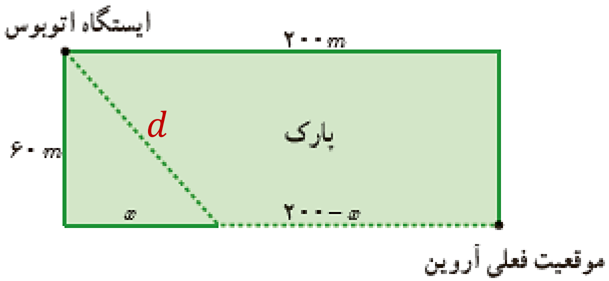
بنابراین اگر طول صفحه ۶ و عرض آن برابر ۱۲ واحد باشد، مساحت هر صفحه، کمترین مقدار ممکن خواهد بود.

تمرین ۵ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی

آروین می خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او و بعد از پارک قرار دارد. او می تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می تواند از درون پارک و تنها با سرعت ۲ m/s عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.

می دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، داریم: $t = \dfrac{x}{v}$

طبق رابطهٔ فیثاغورس : $d = \sqrt{x^۲ + ۳۶۰۰}$



$$\text{زمان طی کردن پیاده رو کنار پارک} = \frac{۲۰۰ - x}{۳} = \frac{۱}{۳}(۲۰۰ - x)$$

$$\text{زمان طی کردن مسیر } d = \frac{d}{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲ + ۳۶۰۰}$$

t تابع زمان سپری شده برحسب x ، برابر است با مجموع طی کردن پیاده رو کنار پارک وزمان زمان طی کردن مسیر d

$$t(x) = \frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲ + ۳۶۰۰} + \frac{۱}{۳}(۲۰۰ - x) \quad , \quad x \in [۰ \,, ۲۰۰]$$

نقطه بحرانی تابع $t(x)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، زمان بهینه را پیدا می کنیم.

$$t'(x) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۳۶۰۰}}\right) + \frac{۱}{۳}(-۱) = \frac{x}{۲\sqrt{x^۲ + ۳۶۰۰}} - \frac{۱}{۳} \xrightarrow{t'(x) = ۰} \frac{x}{۲\sqrt{x^۲ + ۳۶۰۰}} - \frac{۱}{۳} = ۰$$

$$\rightarrow \frac{x}{۲\sqrt{x^۲ + ۳۶۰۰}} = \frac{۱}{۳} \rightarrow ۳x = ۲\sqrt{x^۲ + ۳۶۰۰}$$

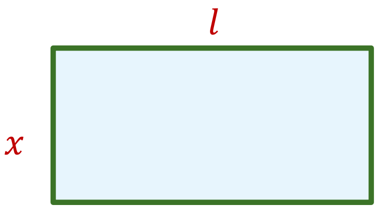
$$\rightarrow ۹x^۲ = ۴x^۲ + ۱۴۴۰۰ \rightarrow ۵x^۲ = ۱۴۴۰۰ \rightarrow x = \sqrt{۲۸۸۰} \cong ۵۳/۶۷$$

x	۰		۵۳/۶۷		۲۰۰
علامت t'		−	۰	+	
یکنوایی t	۹۶/۶۶	اکیدا نزولی	۸۹/۰۲	اکیدا صعودی	۱۰۴/۴
			min مطلق		

اگر x تقریبا ۵۳/۶۷ متر در نظر گرفته شود، آروین در کمترین زمان ممکن به ایستگاه خواهد رسید.

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹ خارج از کشور

نشان دهید در بین تمام مستطیل های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشند.



فرض کنید ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است.

داریم: $S = x.l$

برای این که S تابعی برحسب x باشد، l را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از محیط مستطیل استفاده می کنیم.

$$۲(x+l) = ۱۴ \quad \to \quad (x+l) = ۷ \quad \to \quad l = ۷ - x$$

$$S(x) = x.l \xrightarrow{l = ۷ - x} S(x) = x(۷ - x) \to S(x) = -x^۲ + ۷x \quad , \quad x \in [۰\,,۷]$$

نقطه بحرانی تابع $S(x)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ابعاد بهینه را پیدا می کنیم.

$$S'(x) = -۲x + ۷ \xrightarrow{S'(x) = ۰} -۲x + ۷ = ۰ \quad \to \quad x = ۳/۵$$

بنابراین نقاط به طول ۳/۵ ، ۰ و ۷ نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[۰\,,۷]$ هستند. (۰ و ۷ ابتدا و انتهای دامنه تابع هستند)

$$S(۰) = -(۰)^۲ + ۷(۰) = ۰$$

$$S(۷) = -(۷)^۲ + ۷(۷) = ۰$$

$$S(۳/۵) = -(۳/۵)^۲ + ۷(۳/۵) = ۱۲/۲۵$$

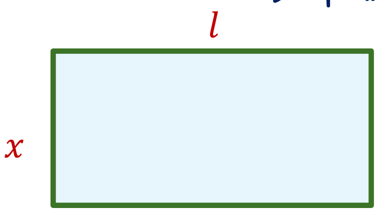
x	۰		۳/۵		۷
علامت S'		+	۰	−	
یکنوایی S	۰	اکیدا صعودی ↗	۱۲/۲۵ max مطلق	اکیدا نزولی ↘	۰

از جدول تغییرات دیده می شود که بیشترین مقدار مساحت، ۱۲/۲۵ سانتی متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می شود که طول و عرض مستطیل هم اندازه و مساوی ۳/۵ سانتی متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع ۳/۵ سانتی متر مربع داشته باشیم.

دقیقا مثال ۱ صفحه ۱۱۴ کتاب درسی

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۷

اگر محیط مستطیلی ۲۴ سانتی متر باشد. طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنیدکه مساحت آن ماکزیمم شود.



فرض کنید ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است.

داریم: $S = x.l$

برای این که S تابعی برحسب x باشد، l را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از محیط مستطیل استفاده می کنیم.

$$۲(x + l) = ۲۴ \rightarrow (x + l) = ۱۲ \rightarrow l = ۱۲ - x$$

$$S(x) = x.l \xrightarrow{l = ۱۲ - x} S(x) = x(۱۲ - x) \rightarrow S(x) = -x^۲ + ۱۲x \quad , \quad x \in [۰ \, , ۱۲]$$

نقطه بحرانی تابع $S(x)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ابعاد بهینه را پیدا می کنیم.

$$S'(x) = -۲x + ۱۲ \xrightarrow{S'(x) = ۰} -۲x + ۱۲ = ۰ \rightarrow x = ۶$$

بنابراین نقاط به طول ۶ ، ۰ و ۱۲ نقاط بحرانی تابع در بازهٔ $[۰ \, , ۱۲]$ هستند. (۰ و ۱۲ ابتدا و انتهای دامنه تابع هستند)

$$S(۰) = -(۰)^۲ + ۱۲(۰) = ۰$$

$$S(۱۲) = -(۱۲)^۲ + ۱۲(۱۲) = ۰$$

$$S(۶) = -(۶)^۲ + ۱۲(۶) = ۳۶$$

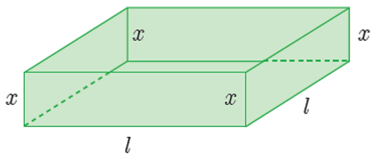
x	۰		۶		۱۲
علامت S'		+	●	−	
یکنوایی S		اکیدا صعودی		اکیدا نزولی	
	۰	↗	۳۶	↘	۰
			مطلق max		

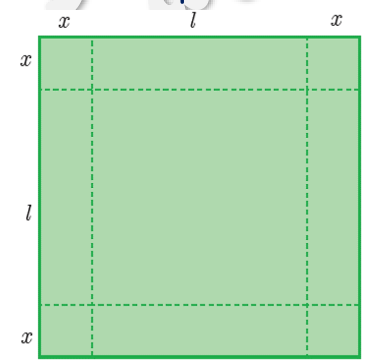
از جدول تغییرات دیده می شود که بیشترین مقدار مساحت، ۳۶ سانتی متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می شود که طول و عرض مستطیل هم اندازه و مساوی ۶ سانتی متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع ۶ سانتی متر مربع داشته باشیم.

مشابه مثال ۱ صفحه ۱۱۴ کتاب درسی

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۸

ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع یک متر را درنظر بگیرید. مطابق شکل می خواهیم از چهارگوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط چین های مشخص شده در شکل، یک جعبه درباز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟





ارتفاع مکعب حاصل همان x است. طول و عرض قاعده آن را با l نمایش می دهیم.

آنچه قرار است ماکزیمم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است. داریم: $V = x.l^2$

برای این که V تابعی برحسب x باشد، l را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از طول ضلع ورق فلزی استفاده می کنیم.

$$2x + l = 1 \quad \to \quad l = 1 - 2x$$

$$V(x) = x.l^2 \xrightarrow{l = 1 - 2x} V(x) = x(1-2x)^2 \to V(x) = 4x^3 - 4x^2 + x \quad , \quad x \in [0 \, , \, 0/5]$$

نقطه بحرانی تابع $V(x)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ارتفاع بهینه را پیدا می کنیم.

$$V'(x) = 12x^2 - 8x + 1 \xrightarrow{V'(x) = 0} 12x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$\to \frac{1}{12}(12x - 6)(12x - 2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 12x - 6 = 0 \to x = \frac{1}{2} \\ 12x - 2 = 0 \to x = \frac{1}{6} \end{cases}$$

مشابه مثال ۲ صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

x	۰		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
علامت V'		+	●	−	●
V	۰	اکیدا صعودی ↗	۰/۰۷۴ (max مطلق)	اکیدا نزولی ↘	۰

$$V\left(\frac{1}{6}\right) = 4\left(\frac{1}{6}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} = \frac{16}{216} \cong 0/074$$

بنابراین اگر ارتفاع $\frac{1}{6}$ متر باشد، حجم قوطی، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود.

امتحان نهایی دی ماه ۱۳۹۸

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

مقادیر بهینه اعداد همان مقادیری هستند که به ازای آنها حاصل ضربشان، کمترین مقدار ممکن باشد.

x و y دو عدد حقیقی دلخواه هستند که تفاضل شان برابر ۱۰ است. y را بر حسب x بنویسیم.

$$x - y = ۱۰ \rightarrow y = x - ۱۰$$

تابع حاصل ضرب آنها بر حسب x : $P(x) = x.y = x(x-۱۰) = x^۲ - ۱۰x$

$P'(x)$ را برابر صفر قرار داده، مقدار بهینه x را پیدا می کنیم.

$$P'(x) = ۲x - ۱۰ \xrightarrow{P'(x)=۰} ۲x - ۱۰ = ۰ \rightarrow x = ۵$$

$$y = x - ۱۰ \xrightarrow{x=۵} y = -۵$$

دقیقا کاردر کلاس ۳ صفحه ۱۱۹ کتاب درسی

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۹

دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۲۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن باشد.

مقادیر بهینه اعداد همان مقادیری هستند که به ازای آنها حاصل ضربشان، کمترین مقدار ممکن باشد.

x و y دو عدد حقیقی دلخواه هستند که تفاضل شان برابر ۲۰ است. y را بر x حسب بنویسیم.

$$x - y = ۲۰ \rightarrow y = x - ۲۰$$

تابع حاصل ضرب آنها بر حسب x : $P(x) = x.y = x(x - ۲۰) = x^۲ - ۲۰x$

$P'(x)$ را برابر صفر قرار داده، مقدار بهینه x را پیدا می کنیم.

$$P'(x) = ۲x - ۲۰ \xrightarrow{P'(x) = ۰} ۲x - ۲۰ = ۰ \rightarrow x = ۱۰$$

$$y = x - ۲۰ \xrightarrow{x = ۱۰} y = -۱۰$$

مشابه کار در کلاس ۳ صفحه ۱۱۹ کتاب درسی

امتحان نهایی تیر ماه ۱۳۹۸

اگر بین دو عدد حقیقی y و x رابطهٔ $۱۰x - y = ۵$ باشد، مقادیر y و x را طوری به دست آورید که حاصل ضرب این دو عدد مینیمم گردد.

مقادیر بهینه اعداد همان مقادیری هستند که به ازای آنها حاصل ضربشان، کمترین مقدار ممکن باشد.

x و y دو عدد حقیقی دلخواه هستند. y را بر x حسب بنویسیم.

$$۱۰x - y = ۵ \quad \rightarrow \quad y = ۱۰x - ۵$$

تابع حاصل ضرب آنها بر حسب x : $P(x) = x.y = x(۱۰x - ۵) = ۱۰x^۲ - ۵x$

$P'(x)$ را برابر صفر قرار داده، مقدار بهینه x را پیدا می کنیم.

$$P'(x) = ۲۰x - ۵ \xrightarrow{P'(x) = ۰} ۲۰x - ۵ = ۰ \quad \rightarrow \quad x = ۰/۲۵$$

$$y = ۱۰x - ۵ \xrightarrow{x = ۰/۲۵} y = -۲/۵$$

مشابه کاردرکلاس ۳ صفحه ۱۱۹ کتاب درسی

امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۸

دو عدد حقیقی b و a را طوری بیابید که داشته باشیم $۲a+b=۶۰$ و حاصل ضرب آنها بیشترین مقدار ممکن گردد.

مقادیر بهینه اعداد همان مقادیری هستند که به ازای آنها حاصل ضربشان، بیشترین مقدار ممکن باشد.

a و b دو عدد حقیقی دلخواه هستند. b را بر a حسب بنویسیم.

$$۲a+b=۶۰ \quad \rightarrow \quad b=۶۰-۲a$$

تابع حاصل ضرب آنها بر حسب a : $P(a)=a.b=a(۶۰-۲a)=-۲a^۲+۶۰a$

$P'(a)$ را برابر صفر قرار داده، مقدار بهینه x را پیدا می کنیم.

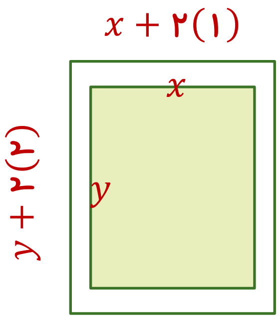
$$P'(a)=-۴a+۶۰ \xrightarrow{P'(a)=۰} -۴a+۶۰=۰ \quad \rightarrow \quad a=۱۵$$

$$b=۶۰-۲a \xrightarrow{a=۱۵} b=۳۰$$

مشابه کاردرکلاس ۳ صفحه ۱۱۹ کتاب درسی

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹

هر صفحهٔ مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $۳۲\text{cm}^۲$ خواهد بود. هنگام طرّاحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه های بالا و پایینی هر صفحه ۲ سانتی متر و حاشیه های کناری هر کدام یک سانتی متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.



دقیقا تمرین ۴ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی

فرض کنید ابعاد متن x و y باشند.

با توجه به ابعاد متن و حاشیه ها، مساحت صفحه برابر است با: $S=\big(x+۲(۱)\big)\big(y+۲(۲)\big)$

برای این که S تابعی برحسب x باشد، y را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از مساحت متن استفاده می کنیم.

$$x.y=۳۲ \rightarrow y=\frac{۳۲}{x}$$

$$S(x)=\big(x+۲(۱)\big)\left(\frac{۳۲}{x}+۲(۲)\right)=(x+۲)\left(\frac{۳۲}{x}+۴\right)=۴x+\frac{۶۴}{x}+۴۰$$

نقطه بحرانی تابع $S(x)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ابعاد بهینه را پیدا می کنیم.

$$S'(x)=۴-\frac{۶۴}{x^۲}\xrightarrow{S'(x)=۰}۴-\frac{۶۴}{x^۲}=۰ \rightarrow ۴x^۲=۶۴ \rightarrow x=۴$$

x	۰		۴		$+\infty$
علامت S'		$-$	۰	$+$	
یکنوایی S		اکیدا نزولی	۷۲ مطلق min	اکیدا صعودی	

$$S(۴)=۴(۴)+\frac{۶۴}{۴}+۴۰=۷۲$$

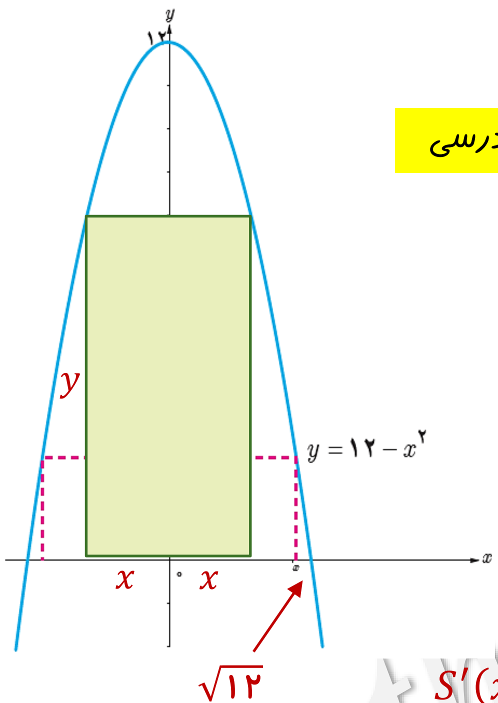
$$y=\frac{۳۲}{x}\xrightarrow{x=۴}y=\frac{۳۲}{۴}=۸ \rightarrow \begin{cases}x+۲(۱)=۶\\ y+۲(۲)=۱۲\end{cases}$$

بنابراین اگر طول صفحه ۶ و عرض آن برابر ۱۲ واحد باشد، مساحت هر صفحه، کمترین مقدار ممکن خواهد بود.

امتحان نهایی خرداد ۱۳۹۹ خارج از کشور

ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس بالای محور xها و روی سهمی $y = ۱۲ - x^۲$ باشند.

دقیقاً تمرین ۳ صفحه ۱۲۰ کتاب درسی



طول مستطیل برابر با $۲x$ و عرض آن y می باشد. پس داریم: $S = ۲xy$

برای این که S تابعی برحسب x باشد، y را برحسب x به دست می آوریم. به این منظور از ضابطهٔ سهمی استفاده می کنیم.

$$S(x) = ۲x(۱۲ - x^۲) = ۲۴x - ۲x^۳ \quad , \quad x \in [۰ , \sqrt{۱۲}]$$

نقطه بحرانی تابع $S(x)$ را می یابیم و با تشکیل جدول تغییرات آن، ابعاد بهینه را پیدا می کنیم.

$$S'(x) = ۲۴ - ۶x^۲ \xrightarrow{S'(x) = ۰} ۲۴ - ۶x^۲ = ۰ \rightarrow ۶x^۲ = ۲۴ \rightarrow x = ۲$$

x	۰		۲		$\sqrt{۱۲}$
علامت S'		+	●	−	
یکنوایی S	۰	اکیدا صعودی ↗	۳۲	اکیدا نزولی ↘	۰
			مطلق max		

$$S(۲) = ۲۴(۲) - ۲(۲)^۳ = ۳۲$$

$$\text{طول مستطیل} = ۲x \xrightarrow{x = ۲} \text{طول مستطیل} = ۴$$

$$\text{عرض مستطیل} = ۱۲ - x^۲ \xrightarrow{x = ۲} \text{عرض مستطیل} = ۸$$

بنابراین اگر طول مستطیل ۴ و عرض آن برابر ۸ واحد باشد، مساحت، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود.

پایان درس دوم