

حل فعالیتها کار در کلاسها و تمرینها

تابع نمایی

درس

09213102271-09125102271-@moharrammahdi

ص ۷۲

فعالیت

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه‌گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر جرم باکتری‌ها را پس از  $t$  ساعت با  $m(t)$  نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کنیم یعنی  $m(0) = 1$ ، آن‌گاه با توجه به جدول، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

جدول (۱)

$t$ زمان (ساعت)	$m(t)$ جرم باکتری‌ها
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
?	۱۶
۵	?
۶	?
⋮	⋮
?	۱۰۲۴

الف) در زمان‌های  $t = 5$  و  $t = 6$  جرم باکتری‌ها را به دست آورید.

ب) پس از چند ساعت جرم باکتری‌ها ۲۵۶ گرم می‌شود؟ پس از چند ساعت به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد؟

پ) آیا از اعداد این جدول می‌توان الگویی را برای محاسبه جرم باکتری‌ها در هر زمان به دست آورد؟

(ب)  
بالوجه به سمت الف

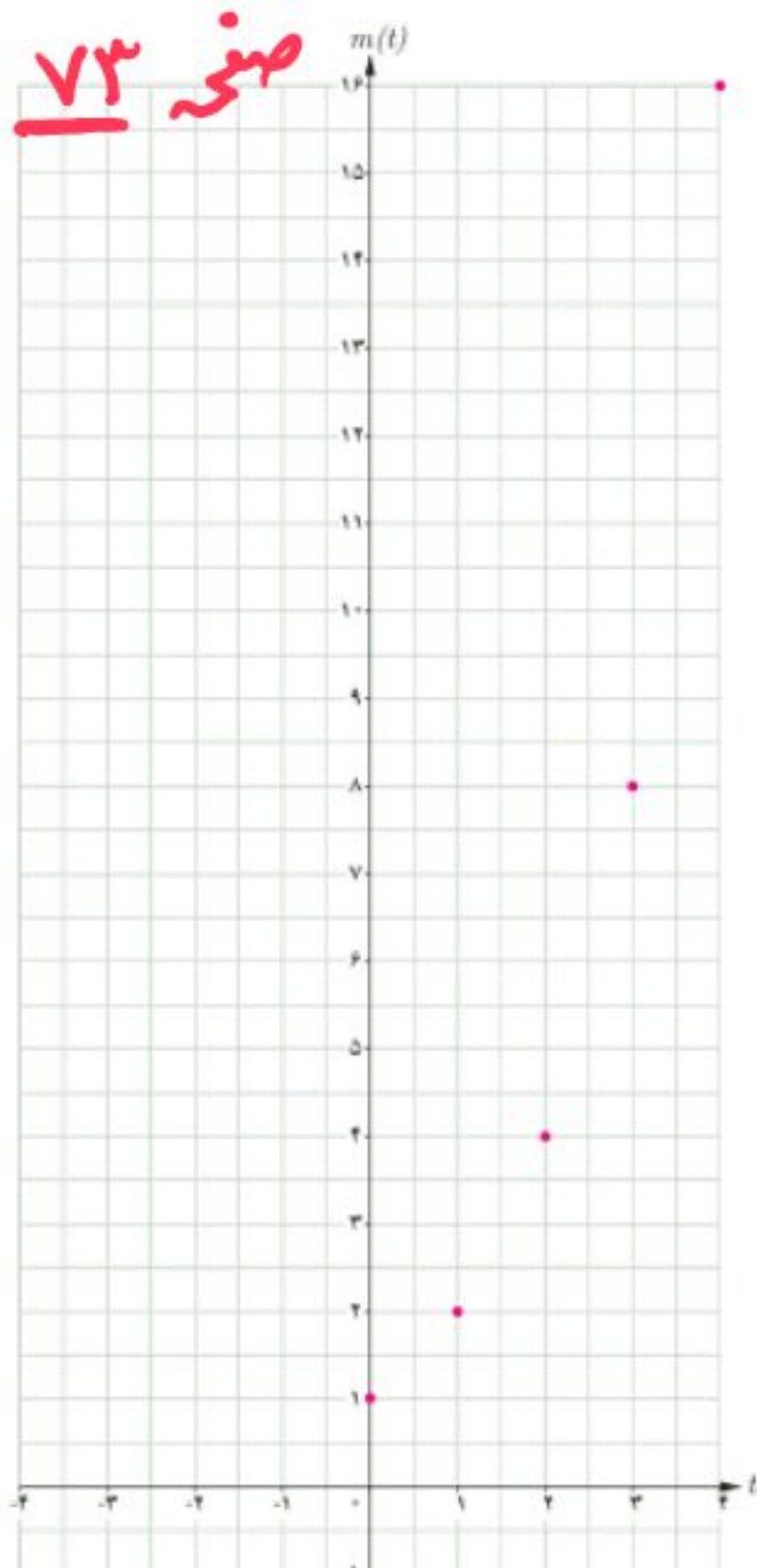
$256 = 2^8$   
بعد از ۸ ساعت

$1024 = 2^{10}$   
بعد از ۱۰ ساعت

$m(t) = 2^t$  یا  $2^n$

الف)  $t = 5 \rightarrow m(t) = m(5) = 16 \times 2 = 32 = 2^5$

$t = 6 \rightarrow m(t) = m(6) = 32 \times 2 = 64 = 2^6$



اگر بخواهیم جرم باکتری‌ها را در مرحله یازدهم یا مرحله‌ای بالاتر پیدا کنیم، قطعاً محاسبات، خیلی دشوارتر و وقت‌گیر خواهد شد. برای ساده‌تر شدن محاسبات، جدول (۱) را بر اساس توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم تا جدول (۲) حاصل شود. در جدول (۲) به جای علامت سؤال‌ها اعداد مناسب قرار دهید.

جدول (۲)

$t$	$m(t)$
۰	$2^0 = 1$
۱	$2^1 = 2$
۲	$2^2 = 4$
۳	?
۷	$2^7 = 128$
?	$2^? = ?$

Handwritten notes:  $2^3 = 8$  (with 3 above 2),  $2^9 = 512$  (with 9 to the left and 512 to the right of the bottom row).

نمودار روبه‌رو رابطه بین زمان و جرم باکتری‌ها را نشان می‌دهد. با توجه به فعالیت صفحه قبل، جرم باکتری‌ها در پایان ساعت اول، دوم، ... و  $n$  ام از دنباله زیر به دست می‌آید:

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n.$$

به عبارت دیگر، جرم باکتری‌ها بر حسب زمان  $t$ ، از رابطه  $m(t) = 2^t$  به دست می‌آید.

صفحه ۷۳

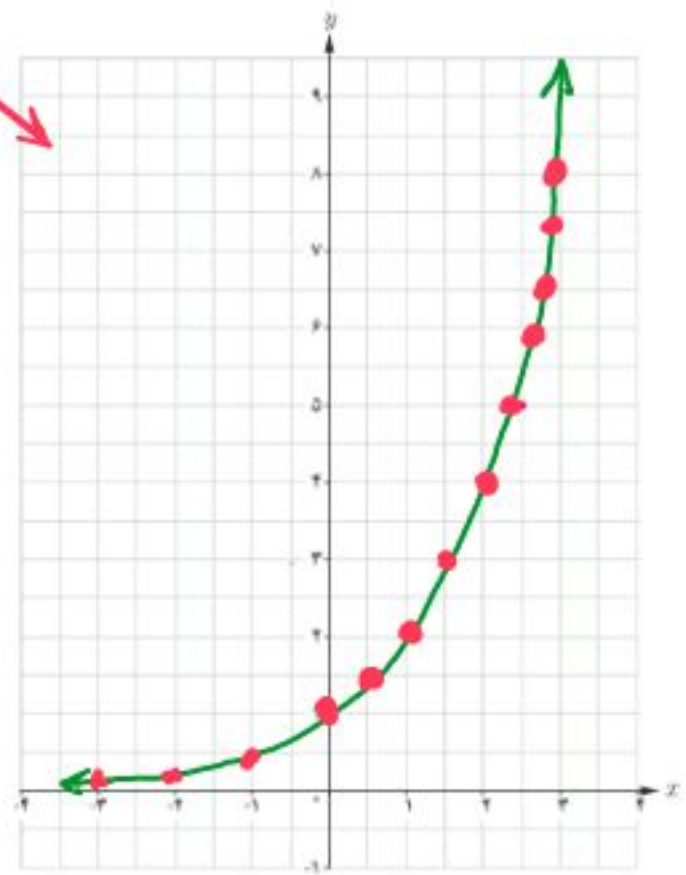
فعالیت

در نمودار فعالیت قبل، طول نقاط مشخص شده اعداد صحیح نامنفی هستند. می‌توان نقاطی از آن نمودار، با طول اعداد گویا را نیز به دست آورد.

الف) جاهای خالی جدول را با قرار دادن اعداد مناسب پر کنید.

$x$	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۳
$2^x$	$2^{-3}$	$2^{-2}$	$2^{-1}$	$2^0$	$2^{\frac{1}{4}}$	$2^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{2}{3}}$	$2^1$	$2^{\frac{3}{2}}$	$2^2$	$2^3$
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\sqrt[4]{2} = 1/26$	$\sqrt{2} = 1/4$	$\sqrt[3]{4} = 1/56$	۲	$\sqrt{8} = 2/183$	۴	۸

(ب) نقاط به دست آمده را در یک صفحه شطرنجی مشخص کنید (برخی از نقاط در دستگاه مشخص شده‌اند).



(ب) همه نقاط مشخص شده‌اند، آنها را بهم وصل می‌کنیم

پ) هر خط موازی محور عرض نمودار تابع را حد اکثر در یک نقطه قطع می‌کند

همان طور که ملاحظه می‌شود دامنه تابع  $y = 2^x$  همه اعداد حقیقی و برد آن همواره اعداد مثبت است.

اگر تعداد نقاط خیلی زیاد شوند، شکلی شبیه نمودار روبه‌رو حاصل می‌شود.

(ب) چرا نمودار روبه‌رو یک تابع است؟

(ت) نقطه  $x = \sqrt{2}$  را روی محور  $x$  ها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی  $2^{\sqrt{2}}$  را با استفاده از نمودار پیدا کنید.

(ث) کدام یک از اعداد زیر، بین دو عدد  $2^2$  و  $2^3$  قرار دارد؟

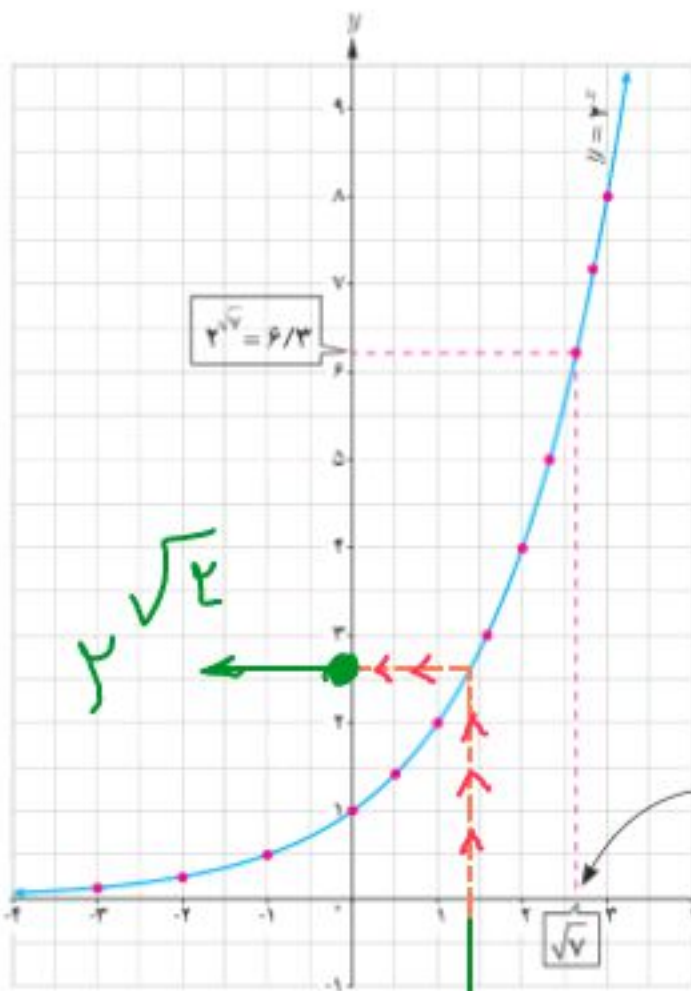
$2^{-1}$        $2^0$        $2^{\frac{3}{2}}$        $2^{\frac{5}{2}}$

(ج) چرا نمودار تابع  $y = 2^x$  محور  $x$  ها را قطع نمی‌کند؟

چون  $2^x$  به توان هیچ عددی

برابر صفر نمی‌شود و

مقدار تابع به ازای هر عدد حقیقی همواره بزرگتر از صفر است



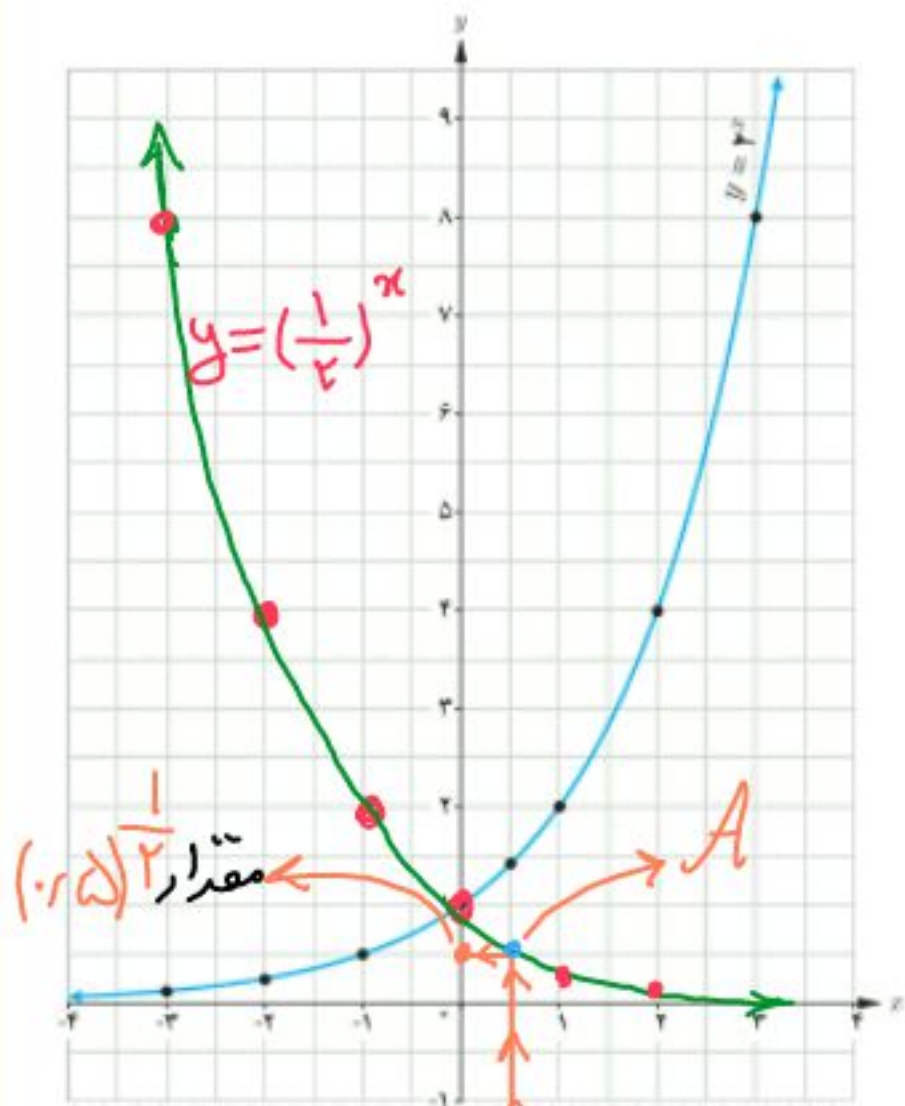
توجه کنید دامنه  $y = 2^x$  شامل اعداد اصم مثل  $\sqrt{2}$  است.

(ت)

$$x = \sqrt{2}$$

(ث)

$$2 < \frac{5}{2} < 3$$



الف) نمودار تابع  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  را رسم کنید و آن را با نمودار  $y = 2^x$  مقایسه کنید.

ب) دامنه و برد تابع را به دست آورید.

هر تابع با ضابطه  $f(x) = a^x$  که در آن  $a$  عددی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی می‌نامیم.

ب) نقطه  $\left(0.15, \left(\frac{1}{2}\right)^{0.15}\right)$  را روی نمودار مشخص کنید.

الف)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

نمودار در دستگاه بالا رسم شده است

x	-2	-1	0	1	2
y	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
	4	2	1	1/2	1/4

مقایسه: نمودار در تابع نسبت به محور عرض تقارن دارند

ب)  $D = (-\infty, +\infty)$

دامنه

$R = (0, +\infty)$

بر

هر ۲ تابع

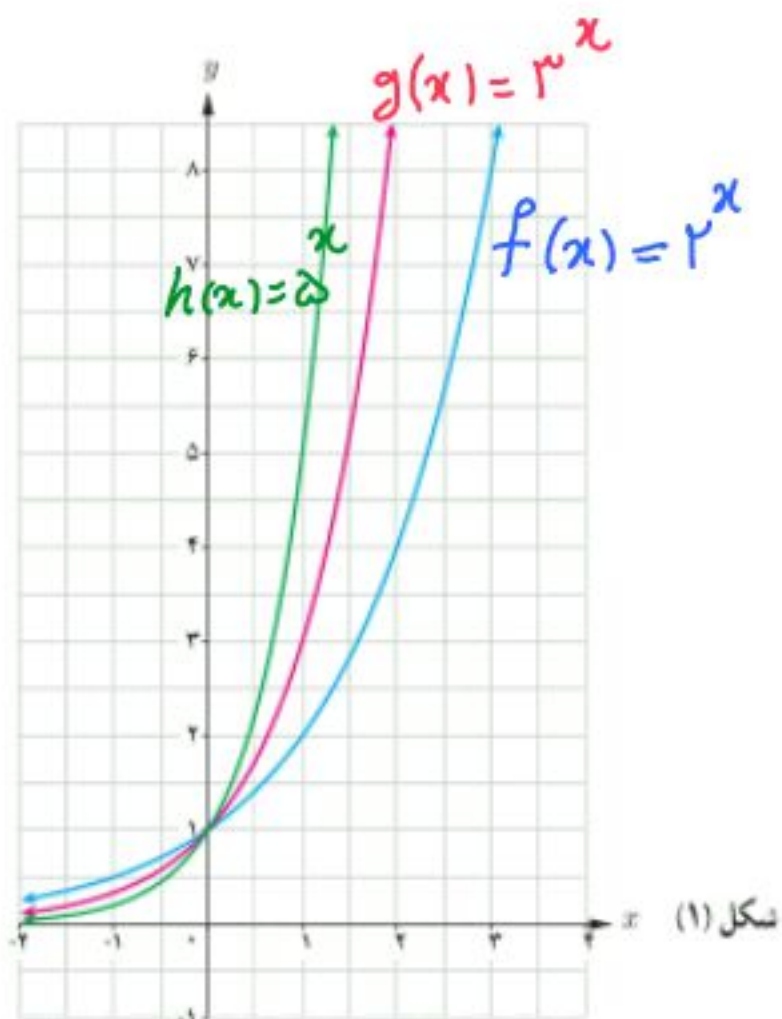
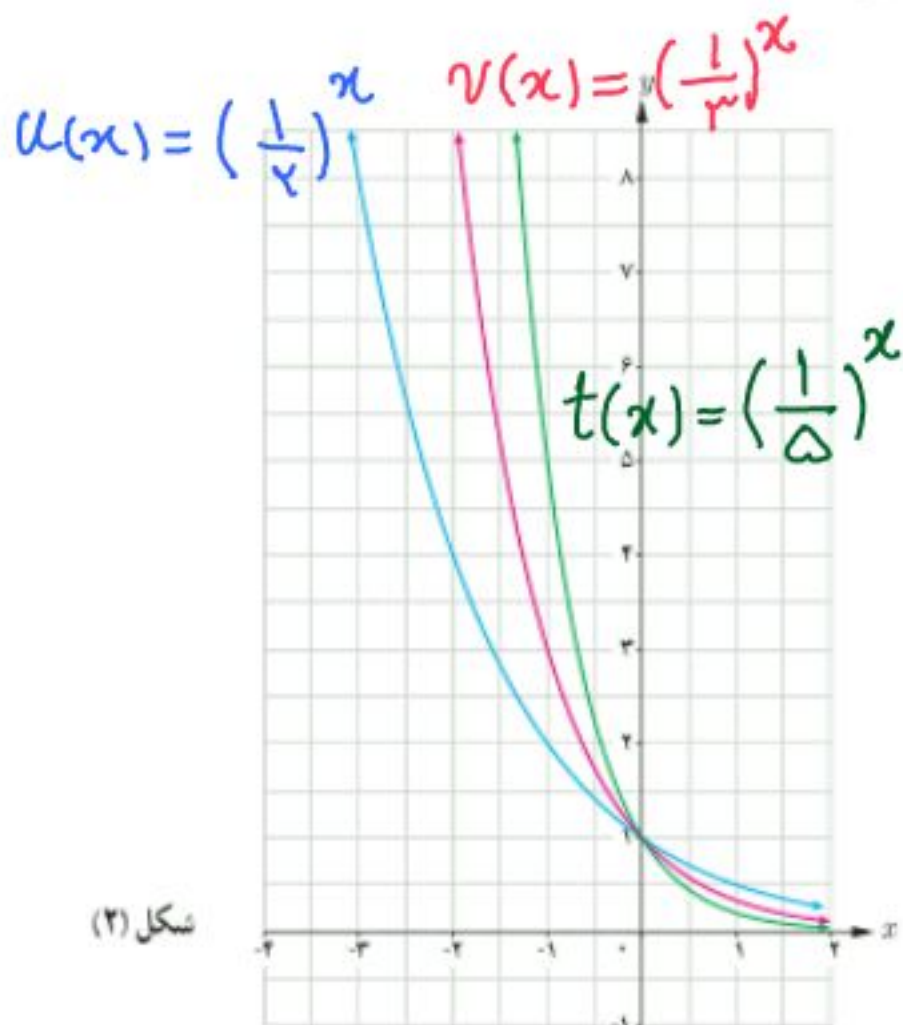
ب) در دستگاه بالا مشخص شده است

۱ نمودارهای سه تابع  $f(x)=2^x$ ,  $g(x)=3^x$  و  $h(x)=5^x$  در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن بنویسید.

۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید.

۳ آیا این توابع یک به یک هستند؟ چرا؟

۴ نمودارهای توابع  $u(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $v(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$  و  $t(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$  در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به دست آورید. آیا این توابع یک به یک هستند؟



دوهر ۳ تابع

۲  $D = (-\infty, +\infty)$

$R = (0, +\infty)$

دوهر ۳ تابع

۴  $D = (-\infty, +\infty)$

$R = (0, +\infty)$

۳ بله چون هر خط موازی محور طول  
هر کدام از نمودارها را حد اکثر در یک نقطه  
قطع می‌کنند

هر ۳ تابع یک به یک هستند

الف) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$2^4, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 2^2, 2^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

ب) جاهای خالی را پر کنید :  
 در تابع  $f(x) = a^x$  ،  
 - اگر  $a > 1$  ، با افزایش مقدار  $x$  ، مقادیر  $f$  ... می یابند .  
 - اگر  $0 < a < 1$  ، با افزایش مقدار  $x$  ، مقادیر تابع  $f$  ... می یابند .

افزایش  $\leftarrow$  تابع صعودی است  
 $\leftarrow$  کاهش  $\leftarrow$  تابع نزولی است

الف)

$\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	۲	۳	۴
------------------------------	------------------------------	------------------------------	---	---	---

$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	۴	۸	۱۶
----------------	---------------	---------------	---	---	----

کوچک به بزرگ  $\rightarrow$

تمرین

صفحه ۷۷



۱) تحت شرایط ایده آل، جرم یک توده معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا  $100$  میلی‌گرم باکتری وجود دارد.  
 الف) جرم توده پس از  $t$  ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.  
 ب) جرم توده را پس از  $20$  ساعت برآورد کنید.

الف)  $f(t) = 100 \times 2^t$  میلی‌گرم

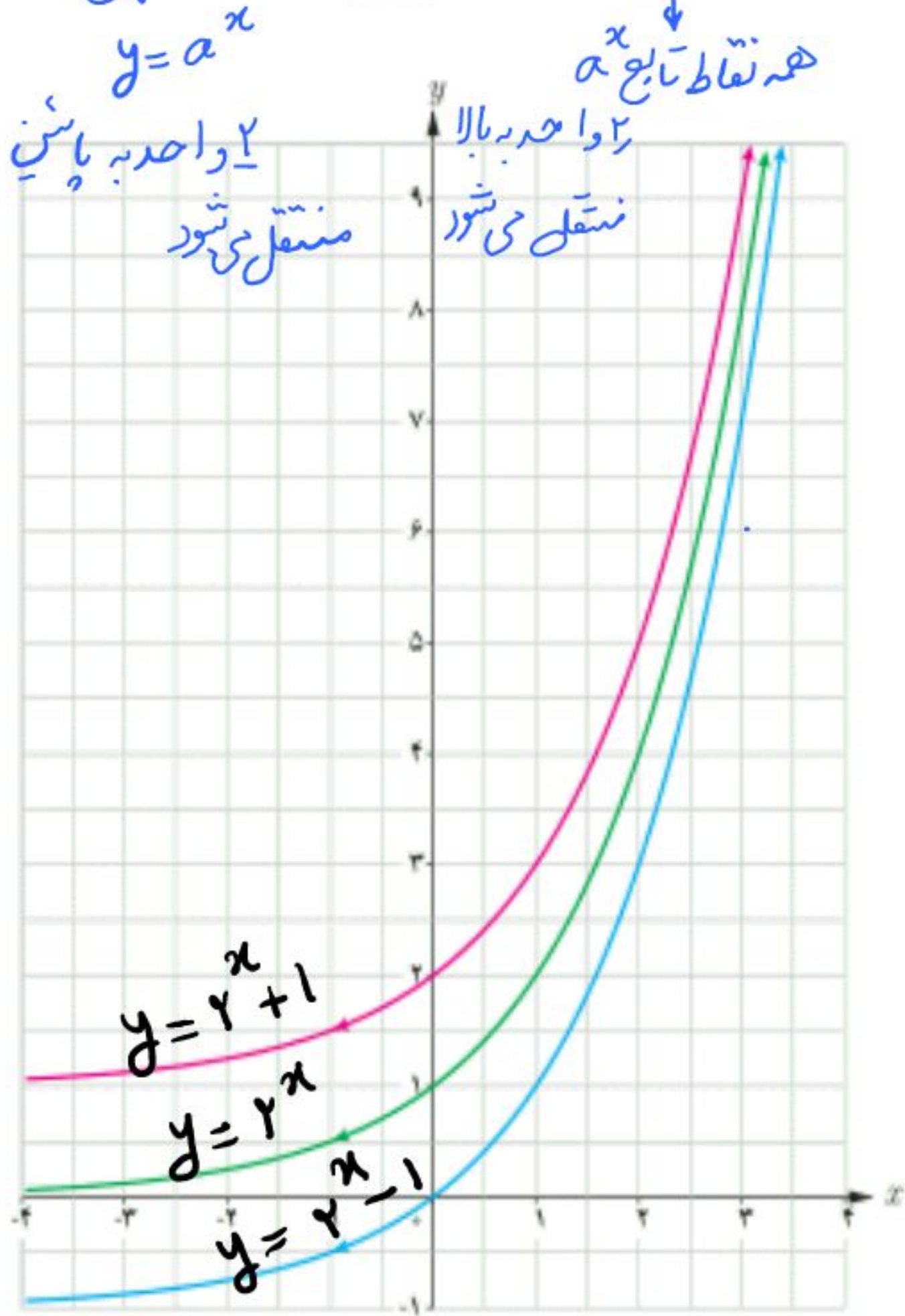
ب)  $f(20) = 100 \times 2^{20}$  میلی‌گرم

۲ نمودار توابع  $y = 2^x$  ،  $y = 2^x + 1$  و  $y = 2^x - 1$  در شکل

روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه

نمودارهای توابع  $y = a^x$  ،  $y = a^x + 2$  و  $y = a^x - 2$  با یکدیگر چه

نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ( $a > 1$ ). ۱ ← نقطه تقاطع تابع  $y = a^x$



نمودار تابع  $y = 2^x + 1$

از انتقال یک واحد به

بالای نقطه نمودار

$y = 2^x$  و

نمودار تابع  $y = 2^x - 1$

از انتقال یک واحد به

پایین نقطه نمودار

$y = 2^x$

حاصل شده است

۳ داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید  $10$  میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از  $t$  ساعت از رابطه  $A(t) = 10 \left(\frac{8}{10}\right)^t$  به دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از  $8$  ساعت چقدر است؟  
 ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

الف)  $A(8) = 10 \left(\frac{8}{10}\right)^8$

$$= 10 \left(\frac{8}{10}\right)^8 = \frac{10 \times 8^8}{10^8} = \frac{8^8}{10^7} = \frac{2^{24}}{10^7} \approx 1,77$$

ب)  $A(0) = 10 \left(\frac{8}{10}\right)^0 = 10$  مقدار اولیه  $10$  میلی‌گرم

$A(1) = 10 \left(\frac{8}{10}\right)^1 = 8$  بعد از یک ساعت

$A(2) = 10 \left(\frac{8}{10}\right)^2 = 7,2$  در دو ساعت

$$10 - 8 = 2 \rightarrow \frac{2}{10} = \frac{x}{100} \rightarrow x = 20\%$$

$$10 - 7,2 = 2,8 \rightarrow \frac{2,8}{10} = \frac{x}{100} \rightarrow x = 28\%$$

در هر ساعت ۲۰ درصد از دارو از بین می‌رود

۴ الف) سه عدد بین اعداد  $3^{\sqrt{10}}$  و  $3^{2/5}$  پیدا کنید.

ب) نامعادله توانی  $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$  را حل کنید.

پ) اگر  $x, y, z$  سه عدد حقیقی باشند، به طوری که  $a^z > a^y > a^x$ .

آن‌گاه چه رابطه‌ای بین  $x$  و  $y$  و  $z$  برقرار است؟ ( $a > 1$ ).



$$\mu^{2,5} \quad \mu^{\sqrt{10} \approx 3,16}$$

(الف)

$$\mu^{\sqrt{7}}, \mu^{\sqrt{8}}, \mu^3$$

$$\mu^{2x-1} > \frac{1}{1025}$$

(ب)

$$\left( \begin{array}{l} (\mu^2)^{2x-1} > \frac{1}{\mu^{10}} \\ \mu^{2x-2} > \mu^{-10} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} 2x-2 > -10 \\ 2x > -10+2 \\ 2x > -8 \\ x > -4 \end{array}$$

$$a^x > a^y > a^z$$

(ج)

$$a > 1$$

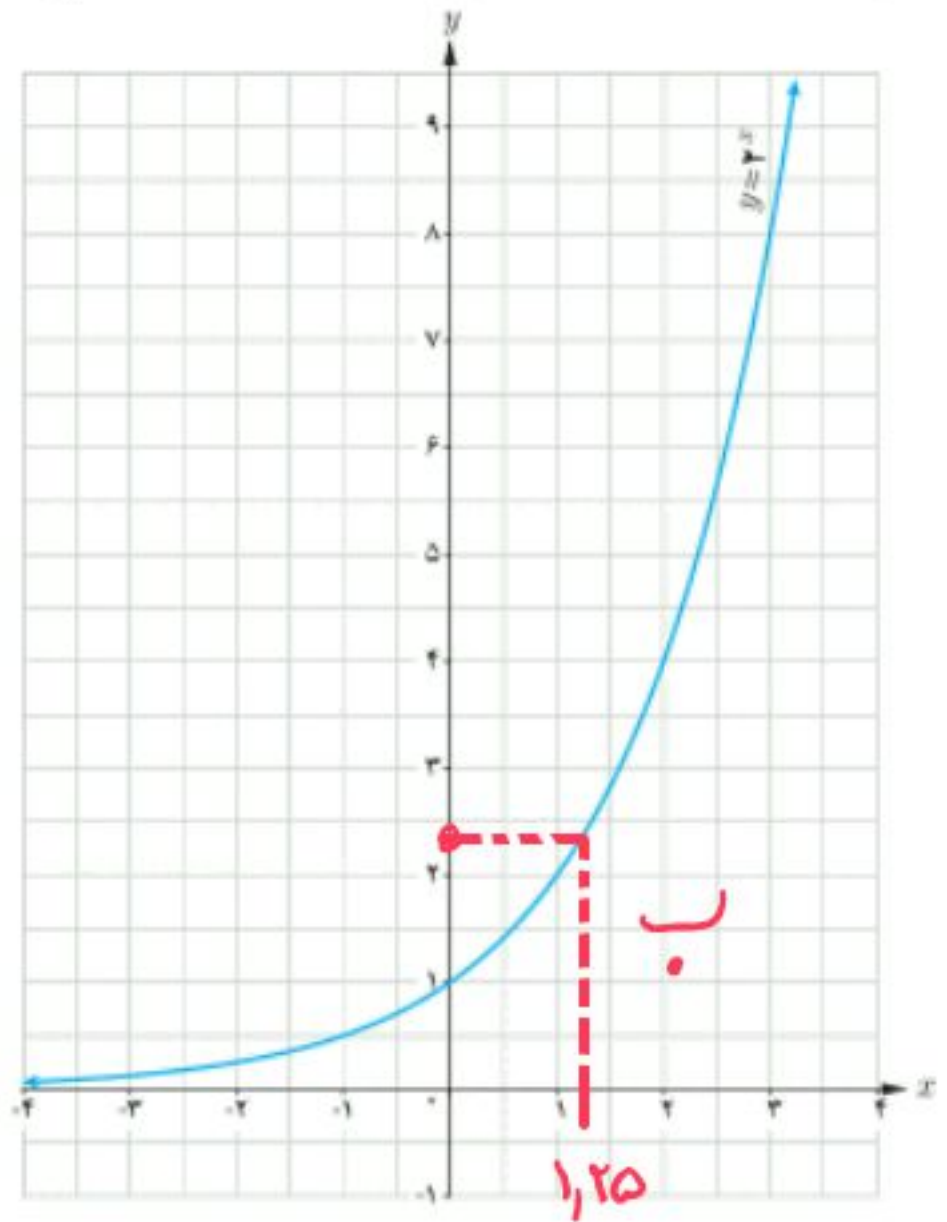
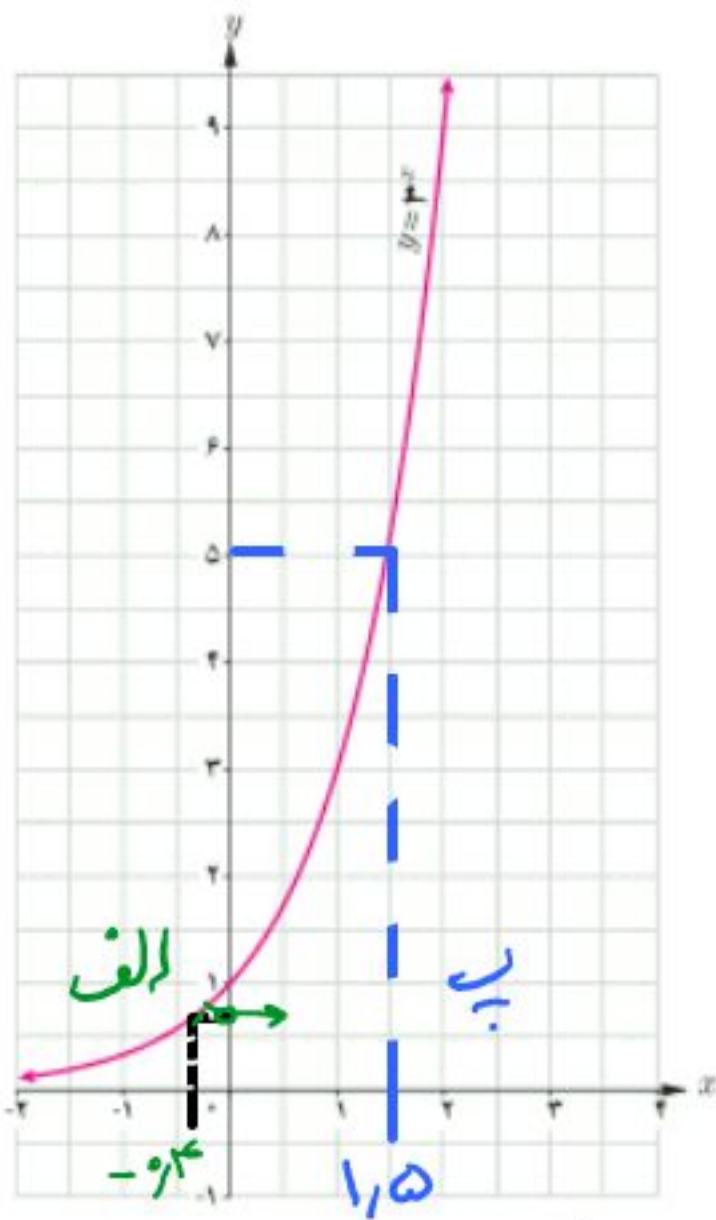
باید  $x > y > z$  باشد.

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

ب)  $3^{\frac{3}{2}}$

ب)  $2^{1.25}$

الف)  $3^{1-\sqrt{2}}$



نمودار  $3^{1-\sqrt{2}} \approx 3^{1-1.4} \equiv 3^{-0.4} \approx 0.7$  (الف)  
 ماشین حساب: ۰/۶۳۴

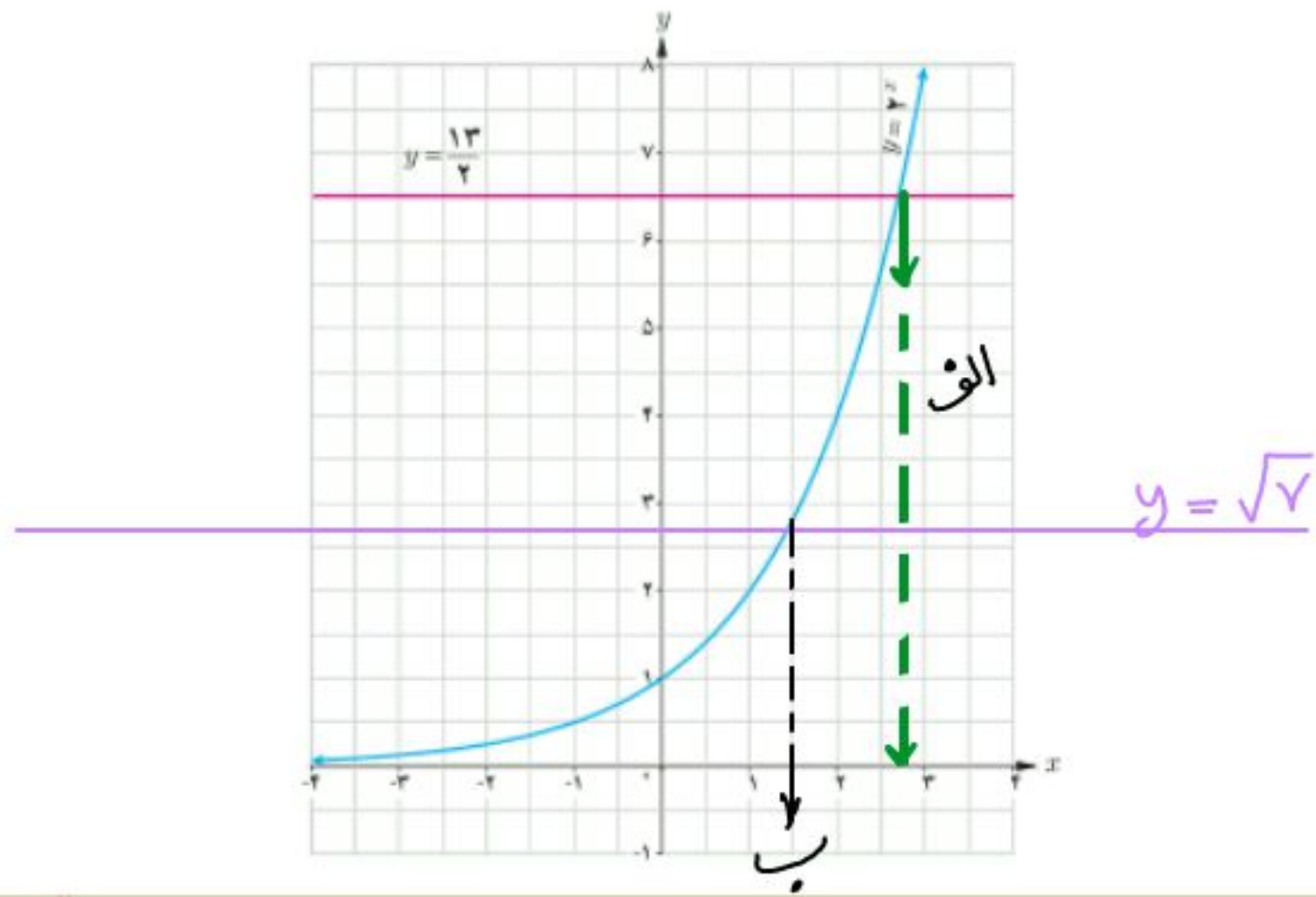
نمودار  $2^{1.25} \approx 2.19$  (ب)

ماشین حساب: ۲/۳۷

نمودار  $3^{\frac{3}{2}} = 3^{1.5} \approx 5.2$  (ب)

ماشین حساب: ۵/۱۹

۶ الف) در شکل زیر خط  $y = \frac{13}{2}$  نمودار  $y = 2^x$  را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین دو عدد صحیح قرار دارد؟ چرا؟  
 ب) خط  $y = \sqrt{7}$  را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار  $y = 2^x$  بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



الف) بین ۲ و ۳ ، با رسم خط موازی محور عرض به نقطه ای  
 بین این اعداد رسیدیم

ب)  $\sqrt{7} = 2,64$

از نقطه ۲٫۶۴ روی محور عرض، منحنی موازی محور طول رسم

می‌کنیم تا نمودار را قطع کند طول نقطه برخورد بین  
 عددهای ۱ و ۲ قرار دارد.

در تصفیه آب، داخل فیلترها، لایه تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه  $0.7 \times 0.7 = 0.49$  یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به دست می‌آید؟

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟



الف)  $(0.7) \rightarrow 1$  لایه

$(0.7)^n \rightarrow n$  لایه  $\Rightarrow$   
 $(0.7)^2 \rightarrow 2$  لایه

درصد ناخالصی موجود در آب  $\rightarrow f(n) = (0.7)^n \times 100$

با به کار بردن  $n$  لایه

۳۰٪ ناخالصی‌ها حذف می‌شود

یک لایه فیلتر

۷۰٪ ناخالصی‌ها باقی می‌ماند

$$A = (0.7)^n \times 100 < 4$$

(ب)

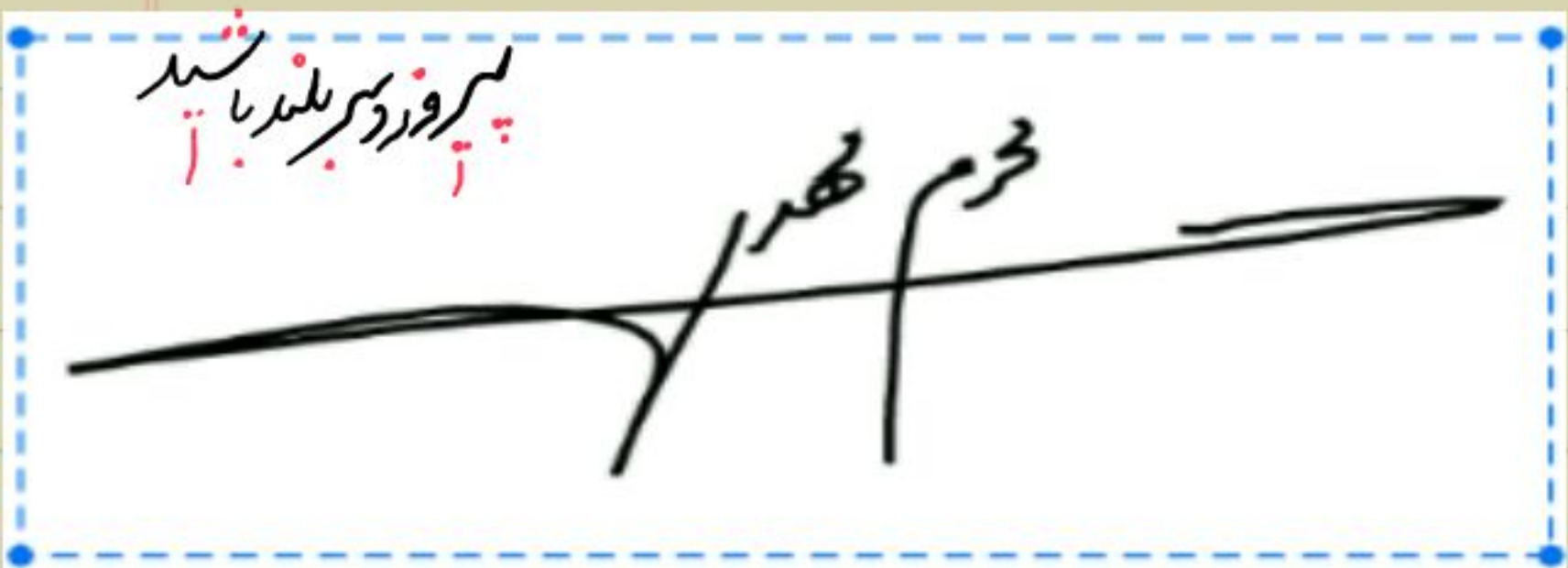
چون فعلاً تابع گمارتی خواننده ایم n مناسب را با آزمون

در خطا پیدای نسیم

n	محل A	$A < 4$
1	$(0.7)^1 \times 100 = 70$	X
⋮	$(0.7)^{\dots} \times 100$	
8	$(0.7)^8 \times 100 = 5.76$	X
9	$(0.7)^9 \times 100 = 4.035$	X
10	$(0.7)^{10} \times 100 = 2.82$	✓

بنابراین: با قراردادن 10 لایه در فیلتر مسواک بیش از 94 درصد

ناخالصی آب را از بین ببرد



09213102271-09125102271-@moharrammahdi

تهران

بیستم آذرماه سال 1399