

بسمه تعالی

اداره آموزش و پرورش منطقه ۱۸

دبیرستان نمونه دولتی فدک

امتحانات نیمسال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

نام:	آزمون درس: حسابان ۱	تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۰۳/۰۸
نام خانوادگی:	تعداد صفحه: ۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
کلاس:	پایه: یازدهم رشته: ریاضی	سرکار خانم: مهدی عباسی
نمره به عدد:	نمره به حروف:	امضای دبیر:

توضیحات دبیر: در صورت استفاده از هر فرمول خاص، نوشتن آن الزامی است.

شماره	سوالات	بارم
۱	به ازای کدام مجموعه از $a$ الف) نمودار $y = (a - 1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ همواره بالای محور $x$ هاست؟ ب) معادله‌ی خط محور تقارن سهمی $-2x^2 + 6x^2 + 1$ را تعیین کنید.	۱.۵
۲	تعداد ریشه‌های معادله‌ی زیر را بیابید . $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$	۱.۵
۳	ضابطه‌ی وارون تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x - 1}$ را یافته و دامنه‌ای از $f^{-1}$ را اعلام کنید که این دو تابع وارون یکدیگرند.	۱.۵

۱.۵	گر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $(fog)(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ باشند، $g(1)$ را بیابید.	۴
۱.۵	دامنه‌ی تابع زیر را بیابید. $y = \sqrt{2 - \log_3(x + 1)}$	۵
۱.۵	از تساوی $\log(2x - 1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3$ ، مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟	۶
۲.۵	اگر $\tan 35 = 0.7$ باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید. $A = \frac{2 \sin 125^\circ - \cos 235^\circ}{\cos 215^\circ + \sin(-35^\circ)}$	۷

۱.۵	$\frac{4\cos 2x}{\tan x + \cot x} = \sin 4x$	ثابت کنید : ۸
۱	تابع $y = -2 \sin x + 1$ را در محدوده $[0, 2\pi]$ رسم کرده و برد آن را بیابید .	۹
۳	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{\cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$	حاصل حدهای زیر را بیابید . ۱۰

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3}$$

وجود حد در تابع زیر را بررسی کنید .

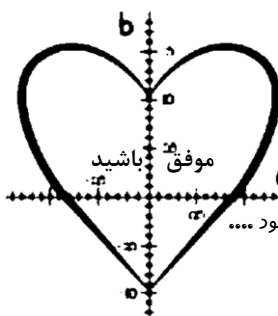
۱۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} x[x] + 2[-x]$$

به ازای کدام  $a$  تابع زیر پیوستگی چه دارد ؟

۱۲

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[x] \sin x}{2x - |x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$



می نشینی چند تمرین ریاضی حل کنی  
خط کش و تقاله و پرگار عاشق می شود....

$$a^2 + (b - \sqrt{a^2})^2 = \text{heart}$$

① به برای کدام مجموعه از  $a$  نمودار  $y = (a-1)x^2 + 2\sqrt{3}x + a$  همواره بالای محور  $x$  است؟

ب) معادلی خط محور تقارن سری  $-2x^2 + 6x^2 + 1$  را تعیین کنید.

پاسخ:

الف) برای این که یک سری همواره بالای محور  $x$  باشد (معادلی آن فریب  $x^2$  باید مثبت باشد) (تاسمی رو به بالا باشد) و همین طور  $\Delta$  باید منفی باشد (تاسمی در هیچ نقطه ای محور  $x$  را قطع نکند):

$$a-1 > 0 \rightarrow a > 1$$

$$\Delta < 0 \rightarrow 1 - 4a(a-1) < 0$$

$$1 - 4a^2 + 4a < 0$$

$$a^2 - a - 2 > 0$$

$$(a+1)(a-2) > 0 \rightarrow a < -1 \text{ یا } a > 2$$

اشتراک جواب ها  $\leftarrow a > 2$

ب) محور تقارن سری خطی عمودی به طول رأس سری است. کافی است طول رأس سری را پیدا کنیم:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{معادله خط} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x^4 - 4x^2 - 12 = 0$$

② تعداد ریشه های معادلی زیر را بیاید.

پاسخ:

ابتدا تغییر متغیری دهیم تا معادله به معادلی درجه دوم تبدیل شود.

$$t^2 - 4t - 12 = 0 \leftarrow t = x^2$$

$$(t+2)(t-6) = 0 \begin{cases} t = -2 \\ t = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 = -2 \times \\ x^2 = 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ x = -\sqrt{6} \end{cases}$$

③ ضابطی وادون تابع  $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$  را یافته و دامنه ای از  $a$  را اعلام کنید که این دو تابع وادون یکدیگرند.

پاسخ:

برای یافتن وادون تابع باید  $a$  را بر حسب  $a$  به دست آوریم.

$$y = 2 - \sqrt{x-1}$$

بر دامنه  $f$  یا دامنه تابع  $f^{-1}$ :  $y \leq 2$   $\rightarrow 2 - y \geq 0$

بتواند

$$2 - y = \sqrt{x-1}$$

$$y^2 - 4y + 4 = x - 1$$

$$x = y^2 - 4y + 5$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5 \quad (x \leq 2)$$

حالا برای نوشتن ضابطه نهایی تابع  $f^{-1}$  جای  $x$  و  $y$  را عوض می کنیم.

④ اگر  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  و  $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$  باشند،  $g(1)$  را بیابید.

$$g(1) = a$$

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طبق ضابطه } f \circ g(x) \rightarrow f \circ g(1) = f(a) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \\ \text{طبق ضابطه } f(x) \rightarrow f(a) = \frac{a+1}{a-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a+1}{a-1} = \frac{3}{2} \quad \begin{array}{l} 2a+2=3a-3 \\ a=5 \end{array}$$

$$y = \sqrt{2 - \log_3(x+1)}$$

⑤ دامنه تابع زیر را بیابید.

پاسخ: عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد.  $\leftarrow$

$$2 - \log_3(x+1) \geq 0$$

$$\log_3(x+1) \leq 2$$

$$x+1 \leq 9 \quad x \leq 8$$

در عبارت  $\log_3(x+1)$ ،  $x+1$  باید بزرگتر از صفر باشد  $\leftarrow$

$$x+1 > 0 \quad x > -1$$

$$\text{اشتراک دو شرط} \leftarrow \begin{array}{l} -1 < x \leq 8 \\ \text{یا } x \in (-1, 8] \\ \text{یا } D_f = (-1, 8] \end{array}$$

⑥ از تساوی  $\log(2x-1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3$ ، مقدار  $\log x$  را بیابید. در مبانی ۲ کدام است؟

$$\begin{array}{l} 2x-1 > 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{array}$$

پاسخ:

$$\log(2x-1) + \frac{1}{2} \log x^2 = \log 3$$

$$2x^2 - x = 3$$

$$\log(2x-1) + \log x = \log 3$$

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

$$\log x(2x-1) = \log 3$$

$$(x+1)(2x-3) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \quad \times \\ x = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{رد دامنه نیست} \\ \log \frac{3}{2} = \log \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

اگر  $\tan 2\alpha = 0,7$  حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \frac{2 \sin 12\alpha - \cos 12\alpha}{\cos 12\alpha + \sin(-12\alpha)}$$

$$A = \frac{2 \sin(90+12\alpha) - \cos(12\alpha - 12\alpha)}{\cos(180+12\alpha) + \sin(-12\alpha)} = \frac{2 \cos 12\alpha - (-\sin 12\alpha)}{-\cos 12\alpha - \sin 12\alpha} = \frac{2 \cos 12\alpha + \sin 12\alpha}{-\cos 12\alpha - \sin 12\alpha}$$
 پاسخ:

صورت و مخرج را تقسیم بر  $\cos 12\alpha$  می‌کنیم.

$$\frac{2 \frac{\cos 12\alpha}{\cos 12\alpha} + \frac{\sin 12\alpha}{\cos 12\alpha}}{-\frac{\cos 12\alpha}{\cos 12\alpha} - \frac{\sin 12\alpha}{\cos 12\alpha}} = \frac{2 + \tan 12\alpha}{-1 - \tan 12\alpha} = \frac{2 + 0,7}{-1 - 0,7} = \frac{2,7}{-1,7} = -\frac{27}{17}$$

$$\frac{2 \cos^2 x}{\tan x + \cot x} = \sin^2 x$$

اثبات کنید: (A)

پاسخ: از سمت چپ شروع می‌کنیم و آن را به عبارت سمت راست تبدیل می‌کنیم.

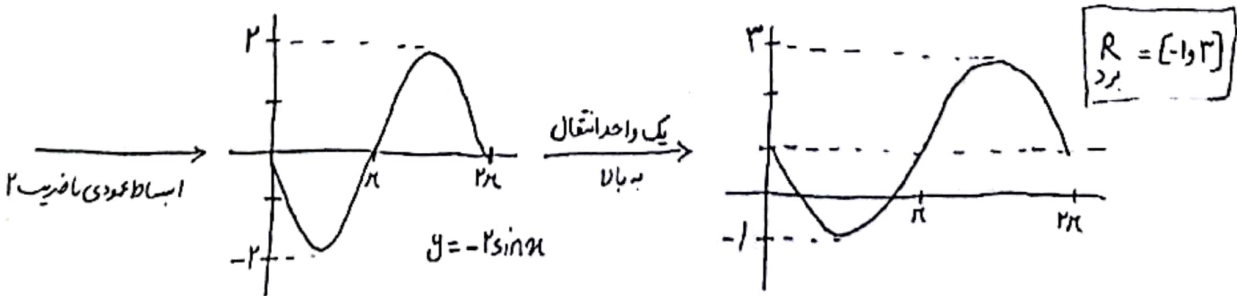
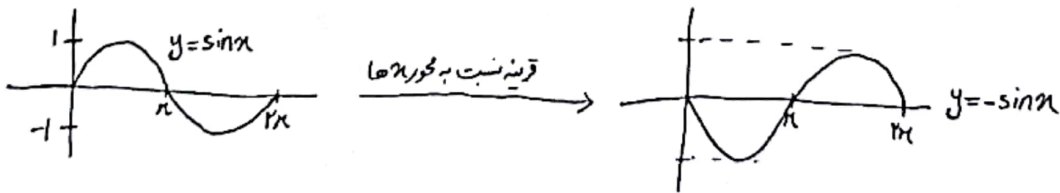
$$\frac{2 \cos^2 x}{\tan x + \cot x} = \frac{2 \cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}}$$

$$= \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{1} = 2 \cos^2 x \cdot \cos x \sin x = 2 \cos^2 x \cdot \sin x \cos x = 2 \cos^2 x \sin x$$

$$= \sin^2 x$$

تابع (B)  $y = -2 \sin x + 1$  را در محدوده  $[0, 2\pi]$  رسم کرده و برد آن را بیابید.

پاسخ:



⑩ حاصل‌خدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2(x + \frac{\pi}{2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2(x + \frac{\pi}{2})} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{\frac{\cos^2(x + \frac{\pi}{2}) + 1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{-\sin^2 x + 1} = \boxed{-2}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 t &= 2\cos^2 t - 1 \\ * \cos^2 t &= \frac{\cos^2 t + 1}{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{4x+1} - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{4x+1} - 3} \times \frac{\sqrt{4x+1} + 3}{\sqrt{4x+1} + 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4x+1-9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)(\sqrt{4x+1} + 3)}{4(x-2)} = \frac{3 \times 6}{4} = \frac{9}{2} = \boxed{4,5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x[x] + 2[-x]$$

⑪ وجود حد در تابع زیر را بررسی کنید.

پاسخ: برای این که حد موجود باشد باید در راست و چپ در نقطه موجود و برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x[x] + 2[-x] = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 4 = 1 - 4 = -3$$

خدهای راست و چپ در  $x=1$  برابر نیستند پس تابع در این نقطه

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] + 2[-x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 + (-2) = -2$$

حد ندارد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[x] \sin x}{2x - |x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

⑫ به ازای کدام  $a$  تابع زیر پیوستگی دارد؟

پاسخ: برای این که تابع پیوسته باشد باید مقدار و حد و تابع در نقطه صفر برابر باشند.

$$f(0) = a$$

از آن جا که در  $x=0$  خدهای راست و چپ برابر نیستند پس تابع در این نقطه حد ندارد و به ازای هیچ

مقداری از  $a$  پیوسته نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0 \times \sin x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-\sin x}{2x} \stackrel{*}{=} -\frac{1}{2} \quad * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$