درسنامه درس حسابان ۲
(فصل ۳ – حدّ)

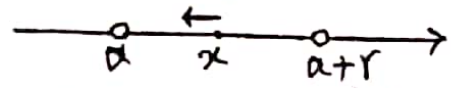
سال دوازدهم - رشته ریاضی فیزیک

شامل درسنامه کاربردی و حل مثال

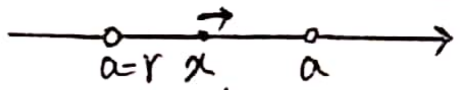
• ابراهیم موسی پور

★ حدهای نامتناهی و مجانب قائم ★

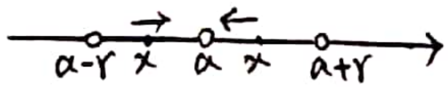
*مقدمه: ۱- تعریف میل کردن از راست: هرگاه متغیر x در همسایگی راست نقطه‌ای مانند a، یعنی بازه‌ی $(a, a+2)$ به a نزدیک شود، در این صورت می‌نویسند $x \to a^+$ و منظور این است که متغیر x با مقادیر بیشتر از a $(x > a)$ فوق العاده به a نزدیک می‌شود و قرار نیست که x به a برسد.



۲- تعریف میل کردن از چپ: هرگاه متغیر x در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a، یعنی بازه‌ی $(a-2, a)$ به a نزدیک شود، در این صورت می‌نویسند $x \to a^-$ و منظور این است که متغیر x با مقادیر کمتر از a $(x < a)$ فوق العاده به a نزدیک می‌شود و قرار نیست که x به a برسد.



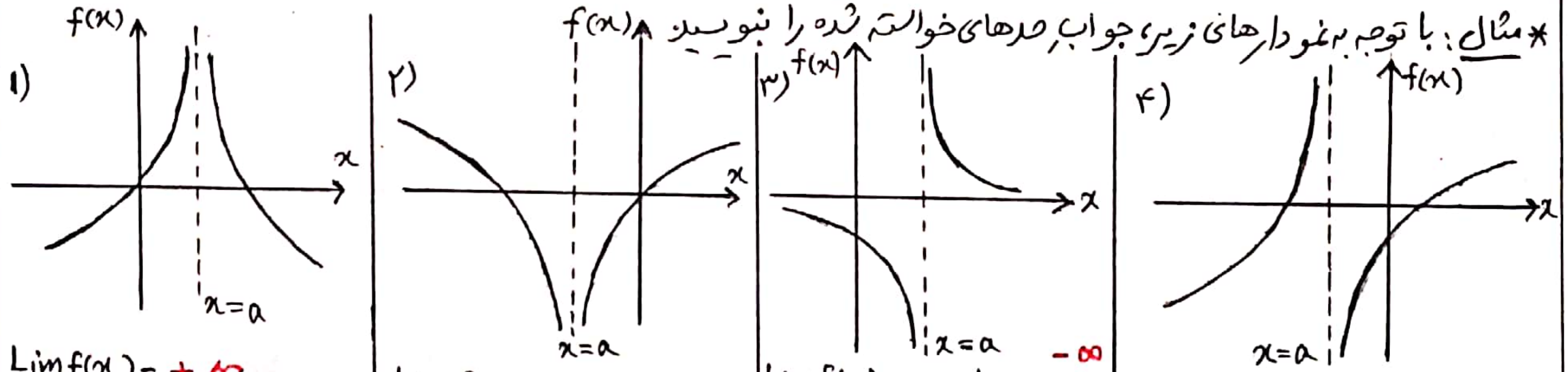
۳- تعریف میل کردن دو طرفه: هرگاه متغیر x در همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a، یعنی اجتماع بازه‌های: $(a-2, a) \cup (a, a+2)$ به a نزدیک شود، در این صورت می‌نویسند $x \to a$ و منظور این است که متغیر x با مقادیر کمتر یا بیشتر از a، فوق العاده به a نزدیک می‌شود و قرار نیست که x به a برسد: $(x \neq a)$



★ تعریف حد نامتناهی: هرگاه در محاسبه‌ی $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ یا $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ و یا $\lim\limits_{x \to a} f(x)$، مقادیر $f(x)$ با نزدیک شدن x به a، از لحاظ قدر مطلق بزرگ شوند، در اصطلاح می‌گویند جواب حد نامتناهی (بی‌نهایت) است.

*از نظر شهودی (نموداری) منحنی تابع f، در کنار خط قائم $x = a$، به سمت بالا (yهای مثبت) و یا به سمت پایین (yهای منفی) کشیده می‌شود.

*مثال: با توجه به نمودارهای زیر، جواب حدهای خواسته شده را بنویسید.



۱) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

۳) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

*مثال: رفتار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ را در همسایگی نقطه‌ی $x = 1$، به کمک جدول مقادیر بررسی کنید و سپس جواب هر یک از حدهای: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ را معین نمایید. (از ماشین حساب استفاده کنید)

x	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹ → 1 ←	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵
$f(x)$	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰ → $+\infty$ | $-\infty$ ←	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰	-۲

$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \end{cases}$

*مثال: فرض کنیم $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$، با توجه به اینکه $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$، اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ از -10^6 کوچکتر شود، x را باید چگونه انتخاب کنیم؟

جواب: $f(x) < -10^6 \Rightarrow \dfrac{1}{1-x} < -10^6 \Rightarrow \dfrac{1}{x-1} > 10^6 \Rightarrow x-1 < 10^{-6} \Rightarrow x < 1 + 10^{-6}$

پس x باید از فاصله‌ی $(1, 1+10^{-6})$ اختیار شود.

*تذکر: در نامساوی $\dfrac{1}{1-x} < -10^6$ طرفین نامساوی را در (-1) ضرب کرده‌ایم، لذا جهت عوض می‌شود.

**تذکر: هرگاه $a > b$ و $a, b > 0$، آنگاه: $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$، لذا طرفین نامساوی $\dfrac{1}{x-1} > 10^6$ را معکوس کرده‌ایم و جهت عوض شده است.

★ برخی از قضایای (دستورالعمل‌های) حدهای بی‌نهایت:

*قضیه ۱: اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه:

الف) $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$ ب) $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n}=\begin{cases}+\infty\ ; & n \text{ زوج}\\ -\infty\ ; & n \text{ فرد}\end{cases}$

مثال: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=+\infty$ ، $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$ ، $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty$

*قضیه ۲:

الف) اگر $\lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty$ ، آن‌گاه $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ و بالعکس.

ب) اگر $\lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty$ ، آن‌گاه $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ و بالعکس.

*قضیه ۳: اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L\neq 0$ و $\lim_{x\to a}g(x)=0$ ، آن‌گاه:

الف) اگر $L>0$ و $g(x)\to 0^+$ ، آن‌گاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$. مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{2}{|x-1|}=+\infty$

ب) اگر $L<0$ و $g(x)\to 0^+$ ، آن‌گاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$. مثال: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x}{1-\sin x}=-\infty$

پ) اگر $L>0$ و $g(x)\to 0^-$ ، آن‌گاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$. مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x-1}=-\infty$

ت) اگر $L<0$ و $g(x)\to 0^-$ ، آن‌گاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$. مثال: $\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x(x+1)^2}=+\infty$

*تذکر: قضیه ۳ در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است. مثال: $\lim_{x\to \pi^-}\cot x=\lim_{x\to \pi^-}\frac{\cos x}{\sin x}=-\infty$

*قضیه ۴: اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L$ و $\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$ ، آن‌گاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. مثال: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{x+1}{\tan x}=0$

*تذکر: قضیه ۴ در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ ، نیز برقرار است.

*قضیه ۵: الف) اگر $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a}g(x)=L$ ، آن‌گاه: $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$.

الف') اگر $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to a}g(x)=L$ ، آن‌گاه: $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=-\infty$.

مثال: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(\tan x+\sin x)=\pm\infty$

ب) اگر $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a}g(x)=L>0$ ، آن‌گاه: $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=+\infty$.

مثال: $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{(2x-1)(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\underbrace{\frac{x+2}{2x-1}}_{\frac{4}{3}>0}\times\underbrace{\frac{1}{(x-2)^2}}_{+\infty}=+\infty$

ب') اگر $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to a}g(x)=L>0$ ، آن‌گاه: $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=-\infty$.

(ادامه‌ی قضیه ۵، از صفحه‌ی قبل)

پ) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L<0$، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=-\infty$.

<u>مثال</u>: $\lim\limits_{x\to 1}(x-3)\times\frac{\cos 2\pi x}{(x-1)^2}=(-2)\times\frac{1}{0^+}=-2\times(+\infty)=-\infty$

ت) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L<0$، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=+\infty$.

★ قضیه $\underline{5}$ در حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

<u>چند نکته</u>: ۱- هرگاه $f(x)=|x-a|$ یا $f(x)=(x-a)^2$ و یا $f(x)=(x-a)^4$، آنگاه: $x\to a\Rightarrow f(x)\to 0^+$

۲- هرگاه $f(x)=[x]$ و $a\in\mathbb{Z}$، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=a$ و $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=a-1$

۳- هرگاه در محاسبه‌ی حد یک کسر، صورت و مخرج هر دو به صفر میل کنند جواب حد مبهم است. برای رفع ابهام عامل مشترک (صفرشونده) با تجزیه‌ی صورت و مخرج، را حذف می‌کنیم. لذا اگر پس از ساده کردن کسر، صورت به عددی مخالف صفر و مخرج به صفر میل کند، جواب حد، بی‌نهایت است.

★ مثال: حاصل حدهای زیر را به دست آورید. (برگرفته از مثال‌ها و کار در کلاس‌های کتاب، صفحه ۵۲ الی ۵۵)

۱) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{(2+x)(2-x)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{2+x}\times\frac{1}{2-x}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{0^+}=\frac{3}{4}\times(+\infty)=+\infty$

۲) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\sin x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$ / ۳) $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{x(x+1)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{1-x}{x+2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$ / ۵) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{[x]-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-1}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$

۶) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

۷) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+\sin^2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x^2}+\frac{\sin^2x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)=(+\infty)+(1)^2=+\infty$

۸) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$ / ۹) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

۱۰) $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x+2}{x^2+4x+4}=\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{x+2}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ / ۱۱) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2-\overset{1}{\cos 2x}}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

★<u>مثال</u> (کنکور ۹۸ - داخل کشور) اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-5}{x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟ ۱) ۱-   ۲) صفر   ۳) ۱   ۴) ۲

<u>جواب</u>: چون حد صورت وقتی که $x\to 2$، برابر (-1) است، پس حد مخرج وقتی که $x\to 2$ باید 0^+ شود، لذا خواهیم داشت:

$(x-2)^2=x^2-4x+4\Rightarrow x^2+ax+b=x^2-4x+4\Rightarrow a=-4, b=4\Rightarrow \underline{a+b=0}$ (گزینه‌ی دوم)

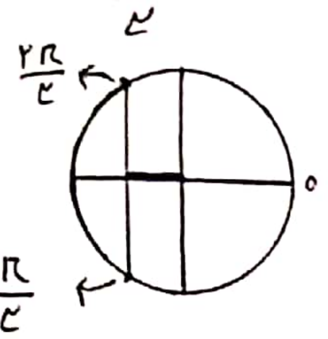
* **مثال** (کنکور ۹۸ - تجربی - داخل کشور) در مورد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2-1}{x+|x|}$، کدام بیان، درست است؟

۱) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ ۲) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ ۳) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ۴) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

جواب: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-1}{x+x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$ (گزینه‌ی چهارم) ، $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-1}{x+(-x)}=\frac{-1}{\text{صفر مطلق}}$ ✗

* **مثال** (کنکور ۹۸ - تجربی - خارج کشور) در مورد تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sin x}{1+2\cos x}$، کدام بیان، درست است؟

۱) $\lim_{x\to \frac{2\pi}{3}^+} f(x)=-\infty$ ۲) $\lim_{x\to \frac{2\pi}{3}^+} f(x)=+\infty$ ۳) $\lim_{x\to \frac{2\pi}{3}^-} f(x)=-\infty$ ۴) $\lim_{x\to \frac{4\pi}{3}} f(x)=+\infty$



جواب: $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\simeq 0/85$ ، $\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ ، $\frac{2\pi}{3}=120^\circ$ و $\frac{4\pi}{3}=240^\circ$

$x\to\frac{2\pi}{3}^-\Rightarrow \cos x>-\frac{1}{2}\Rightarrow 2\cos x>-1\Rightarrow 2\cos x+1>0\Rightarrow \lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^-} f(x)=\frac{0/85}{0^+}=+\infty$

$x\to\frac{2\pi}{3}^+\Rightarrow \cos x<-\frac{1}{2}\Rightarrow 2\cos x<-1\Rightarrow 2\cos x+1<0\Rightarrow \lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^+} f(x)=\frac{0/85}{0^-}=-\infty$ (گزینه‌ی اول)

★ **مجانب قائم**، * تعریف مجانب قائم: خط قائم $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ می‌گویند هرگاه، با نزدیک شدن x به a ($x\to a$ یا $x\to a^+$ یا $x\to a^-$)، آن‌گاه $f(x)\to+\infty$ یا $f(x)\to-\infty$.

چند نکته پیرامون مجانب قائم:

۱- برای تعیین معادلات مجانب‌های قائم یک تابع، از ریشه‌های مخرج ضابطه‌ی آن تابع استفاده می‌شود. یعنی حد تابع را در ریشه‌های مخرج باید بررسی کرد. اگر جواب حد $+\infty$ یا $-\infty$ شد آن ریشه‌ی مخرج، مجانب قائم است و در غیر این صورت، ریشه‌ی مخرج مجانب قائم نیست. لازم به تذکر است اگر معادله تابع کسری نبود مانند $y=2x^3-3x+1$ یا $y=\sqrt{1-x^2}$، آن‌گاه نمودار تابع مجانب قائم ندارد. ۲- نمودار تابع می‌تواند بیش از یک مجانب قائم داشته باشد.

* **مثال**: مجانب‌های قائم هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}\Rightarrow$ جواب: $x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=\frac{3}{0^-\text{ یا }0^+}=\pm\infty\Rightarrow \underline{x=1}$ مجانب قائم

ب) $g(x)=\frac{x}{x^2-1}\Rightarrow$ جواب: $x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1\Rightarrow \lim_{x\to 1} g(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to -1} f(x)=\pm\infty\Rightarrow \underline{x=\pm 1}$ مجانب‌های قائم

پ) $h(x)=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow$ جواب: $x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow$ مخرج ریشه ندارد. $\Rightarrow$ نمودار h مجانب قائم ندارد.

ت) $K(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-6}\Rightarrow$ جواب: $x^2-x-6=0\Rightarrow (x+2)(x-3)=0\Rightarrow x=-2$ یا $x=3$

$\Rightarrow \lim_{x\to -2} K(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x+2}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x+2}{x-3}\times\frac{1}{x+2}=(-\frac{12}{5})\times(\pm\infty)=\pm\infty\Rightarrow \underline{x=-2}$ مجانب قائم

$\Rightarrow \lim_{x\to 3} K(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x+2}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x+2}{x+2}\times\frac{1}{x-3}=(\frac{2}{5})\times(\pm\infty)=\pm\infty\Rightarrow \underline{x=3}$ مجانب قائم

* **مثال**: کدام یک از خطوط $x=-1$ و $x=3$ مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ می‌باشند؟ چرا؟ (پاسخ صفحه‌ی بعد)

(جواب آخرین مثال از صفحه‌ی قبل)

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\frac{-2}{0^+ \text{ یا } 0^-}=\pm\infty \Rightarrow \underline{x=-1}$$ مجانب قائم

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{(x-3)}(x+1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$ چون جواب بی‌نهایت نشد، پس $x=3$، مجانب قائم نیست.

---

* **مثال**: آیا خط $x=\frac{\pi}{2}$ مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{\cos x}{1-\sin x}$ می‌باشد؟ چرا؟

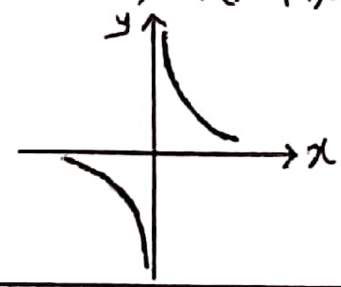
جواب: $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cancel{\cos x}(1+\sin x)}{\cos^{\cancel{2}} x}=\frac{2}{0^+ \text{ یا } 0^-}$$

$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\pm\infty \Rightarrow$ خط $x=\frac{\pi}{2}$، مجانب قائم می‌باشد.

---

* **مثال**: نمودار تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^3+x}$، در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می‌باشد؟

جواب: $x^3+x=0 \Rightarrow x(x^2+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+1=0 \text{ (ریشه ندارد)}\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{(x^2+1)}\times\frac{1}{x} \Longrightarrow \begin{cases}\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty\end{cases}$

$\Rightarrow$ 

* درس $\boxed{1}$ تمام شد. کلیه تمرینهای صفحه‌ی ۵۸ کتاب را حل کنید.

---

* درس $\boxed{2}$ - حد در بی‌نهایت و مجانب افقی

* **مقدمه**:

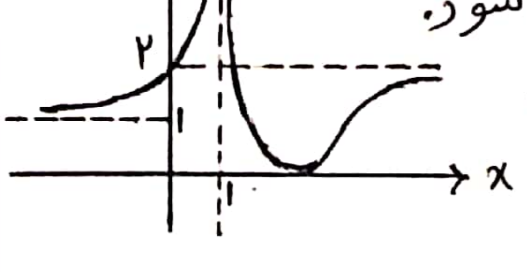
۱- وقتی که می‌نویسیم $x\to+\infty$، منظور این است که متغیر x، فراتر از هر مقدار مثبت در نظر گرفته شده برایش، رشد می‌کند.

۲- وقتی که می‌نویسیم $x\to-\infty$، منظور این است که متغیر x، از هر عدد منفی از پیش تعیین شده‌ای برایش، کوچک‌تر خواهد شد.

* **تعریف حد در بی‌نهایت**:

هرگاه f تابعی از متغیر x بوده و x به دلخواه بزرگ شود، یعنی $x\to+\infty$، و آنگاه $f(x)$ به عدد حقیقی L میل کند، در این صورت می‌نویسیم: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$. از نظر شهودی، فاصله‌ی نقاط منحنی تابع f، در سمت راست دستگاه مختصات و برای xهای بزرگ، از خط افقی $y=L$، کوچک و کوچک‌تر می‌شود.

به همین ترتیب هرگاه x به دلخواه کوچک شود، یعنی $x\to-\infty$، و آنگاه $f(x)$ به عدد حقیقی L میل کند، در این صورت می‌نویسیم $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$. از نظر شهودی، فاصله‌ی نقاط منحنی تابع f در سمت چپ دستگاه مختصات و برای xهای کوچک (ولی از نظر قدر مطلق بزرگ)، از خط افقی $y=L$، کوچک و کوچک‌تر می‌شود.



* **مثال**: شکل روبه‌رو، نمودار تابع f می‌باشد. با توجه به نمودار، جواب حدهای زیر را بنویسید.

الف) $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$ ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ پ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

* برخی از قضایای حد در بی‌نهایت (شماره‌های این قضایا، ادامه‌ی شماره‌های مربوط به قضایای حد بی‌نهایت می‌باشد.)

* **قضیه ۶**: اگر a عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد، آنگاه: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a}{x^n}=0$. مثال: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{2}}{x^2}=0$ و $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2/5}{x^3}=0$

* **قضیه ۷**: اگر $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=L_2$، آنگاه:

الف) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)\pm g(x))=L_1\pm L_2$ ب) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)\cdot g(x))=L_1\cdot L_2$ پ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}\ (L_2\neq 0)$

* تذکر: قضیه ۷، برای وقتی که $x \to -\infty$، نیز برقرار است.

* تذکر: حد مقدار ثابت در بینهایت، برابر است با همان مقدار ثابت، یعنی: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(c)=c$.

مثال: حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3+\frac{5}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(3)+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5}{x^3}\right)=3+0=3$

ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2+\frac{3}{x^2}}{\frac{5}{x}-4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2+3/x^2)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(5/x-4)}=\dfrac{2+0}{0-4}=-\dfrac{1}{2}$

* قضیه ۸: اگر n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه:

الف) اگر n زوج باشد $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^n=+\infty$ ، ب) اگر n فرد باشد، $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^n=-\infty\end{cases}$

مثال: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^2)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

* قضیه ۹: الف) اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$، آن‌گاه:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\cdot g(x)=+\infty & (L>0)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\,g(x)=-\infty & (L<0)\end{cases}$$

ب) اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$، آن‌گاه:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\cdot g(x)=-\infty\ (L>0)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\cdot g(x)=+\infty\ (L<0)$

* قضیه ۱۰: (مشابه ۹)

الف) اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$، آن‌گاه:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot g(x)=+\infty & (L>0)\\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot g(x)=-\infty & (L<0)\end{cases}$$

ب) اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$، آن‌گاه:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot g(x)=-\infty\ (L>0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\cdot g(x)=+\infty\ (L<0)$

* مثال: با استفاده از قضایای حد در بی نهایت، حاصل حدود زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{-2x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=(-\infty)\times(-2)=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x-5x^4)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^4\left(\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x^3}-5\right)=(+\infty)\times(-5)=-\infty$

* چند نکته: ۱- به طور کلی حد هر چند جمله ای در $\pm\infty$ برابر است با حد جمله ای از آن چند جمله ای، که دارای بیشترین درجه است.

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3)=(-2)\times(-\infty)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x-5x^4)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x^4)=(-5)\times(+\infty)=-\infty$

۲- هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ دو چند جمله ای باشند، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$، برابر است با حد جمله ای از $f(x)$ به جمله ای از $g(x)$ که دارای بیشترین درجه می باشند.

(ادامه‌ی نکته ۲ از صفحه‌ی قبل) لذا اگر درجه‌ی $f(x)$ (صورت) از درجه‌ی $g(x)$ (مخرج)، بیشتر باشد، جواب حد بی‌نهایت است.

اگر درجه‌ی $f(x)$ و $g(x)$، باهم برابر باشند، جواب حد عددی مخالف صفر است.

و اگر درجه‌ی صورت ($f(x)$) از درجه‌ی مخرج ($g(x)$) کمتر باشد، جواب حد صفر است.

* **مثال**: حدود زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^3-7x+1}{2x^2-x+3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^3}{2x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{2}x=\pm\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3x^3+x-1}{6x^3-2x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-3x^3}{6x^3}=-\dfrac{1}{2}$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-x+1}{4x^3+2x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2}{4x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2x}=0$

* **نکته**: هرگاه a عددی حقیقی بوده ($a\in\mathbb{R}$) و n نیز عددی طبیعی باشد ($n\in\mathbb{N}$)، آنگاه:

الف) $0<a<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a^n)=0 \xrightarrow{\text{مثال}} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=0$ ، ب) $a>1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a^n)=\infty \xrightarrow{\text{مثال}} \lim\limits_{n\to\infty}(4^n)=\infty$

* **مثال**: (کنکور ۹۹ - داخل کشور) فرض کنید $n\in\mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+1}-2^{1-2n}}{2^{2n+1}+3\times 2^{1-2n}}$، کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) -1

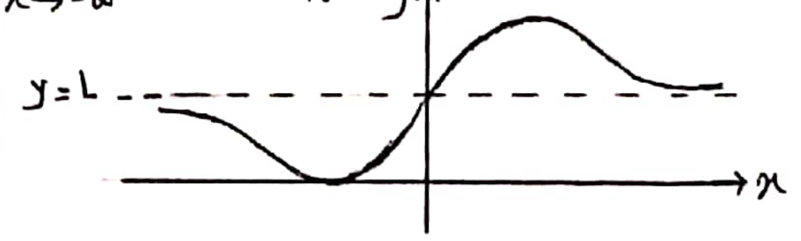
جواب: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times(2^2)^n-2\times(2^{-2})^n}{2\times(2^2)^n+3\times2\times(2^{-2})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times4^n-2\times(0/25)^n}{2\times4^n+6\times(0/25)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times4^n-2\times0}{2\times4^n+6\times0}=1$ (گزینه‌ی اول)

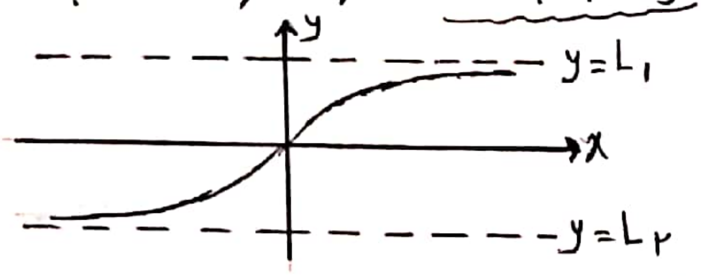
* **مثال**: (کنکور ۹۹ - خارج کشور) فرض کنید $n\in\mathbb{N}$، حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n}-3^{-2n+1}}{2\times3^{2n}+3^{-2n+1}}$، کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 0 ۴) $-\frac{1}{2}$

جواب: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3^2)^n-3\times(3^{-2})^n}{2\times(3^2)^n+3\times(3^{-2})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9^n-3\times(\frac{1}{9})^n}{2\times9^n+3\times(\frac{1}{9})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9^n-3\times0}{2\times9^n+3\times0}=\dfrac{1}{2}$ (گزینه‌ی دوم)

★ **مجانب افقی**: * **تعریف مجانب افقی**: خط افقی $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع $f(x)$ می‌گویند هرگاه: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ یا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$





* **چند نکته پیرامون مجانب افقی**:

۱- برای تعیین مجانب های افقی یک تابع، باید حد تابع در $\pm\infty$ بررسی شود. لذا اگر دامنه‌ی یک تابع کراندار (محدود) باشد، (مانند $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ که دامنه‌اش فاصله‌ی $[-1,1]$ است،) آنگاه نمودار آن تابع مجانب افقی ندارد.

۲- نمودار یک تابع حداکثر دو مجانب افقی می‌تواند داشته باشد.

۳- در توابع گویا (کسری)، هرگاه درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج، بیشتر باشد، نمودار تابع مجانب افقی ندارد، و در غیر این صورت دارد.

* **مثال**: مجانب‌های افقی و قائم تابع های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

1) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x}=2 \Rightarrow \underbrace{\boxed{y=2}}_{\text{مجانب افقی}}$ ، $\underbrace{x-1=0}_{\text{مخرج}} \Rightarrow x=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to1}f(x)=\dfrac{1}{0^+ \text{ یا } 0^-}=\pm\infty$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$ مجانب قائم

۲) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ مجانب افقی (محور xها)

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\pm\infty \Rightarrow \boxed{x=1}$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x-1}=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ $x=-1$ مجانب قائم نیست.

۳) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x)=\pm\infty \Rightarrow$ نمودار f، مجانب افقی ندارد.

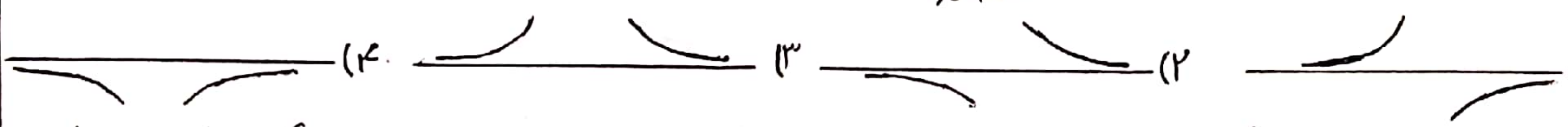
$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+1}{x+1}=\dfrac{2}{0^- \text{ یا } 0^+}=\pm\infty \Rightarrow$ $\boxed{x=-1}$ مجانب قائم.

۴) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1 \Rightarrow \boxed{y=1}$ مجانب افقی، $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow$ مخرج ریشه ندارد، لذا نمودار f مجانب قائم ندارد.

۵) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\pm\infty \Rightarrow$ نمودار f مجانب افقی ندارد، مخرج ریشه ندارد، لذا نمودار f مجانب قائم ندارد.

---

* **مثال** (کنکور ۹۸ - خارج کشور) نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x^2-x-2}{x^2+2x}$، نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت، کدام وضع را دارد؟



۱) ۲) ۳) ۴)

★ **نکته:** برای حل این نوع سؤالات، اگر $y=L$ مجانب افقی نمودار تابع f باشد، ابتدا $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-L)$ را بررسی می‌کنیم، اگر جواب 0^+ شد، نمودار سمت راست به صورت می‌باشد و اگر جواب 0^- شد، نمودار سمت راست به صورت خواهد بود. سپس $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-L)$ را بررسی می‌کنیم اگر جواب 0^+ شد، نمودار سمت چپ به صورت خواهد بود و اگر جواب 0^- شد، نمودار سمت چپ به صورت می‌باشد.

جواب: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2 \Rightarrow \boxed{y=2}$ مجانب افقی $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2-x-2}{x^2+2x}-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x-2-2x^2-4x}{x^2+2x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5}{x}\to 0^-\ ,\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2)\to 0^+ \Rightarrow$ سمت راست زیر مجانب افقی و سمت چپ بالای مجانب افقی. (گزینه‌ی اوّل)

---

* **مثال** (کنکور ۹۹ - داخل کشور) نمودار تابع $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x}{ax^2+bx+c}$، دارای خط‌های مجانب $y=-1$، $x=-2$ و $x=1$ است. $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۱٫۲۵ ۲) ۱٫۵ ۳) ۱٫۷۵ ۴) ۱٫۵-

(گزینه‌ی اوّل)

جواب: $y=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-1 \Rightarrow \dfrac{-2}{a}=-1 \Rightarrow \boxed{a=2}$ ، $x=-2 \xRightarrow{\text{در مخرج}} a(-2)^2+b(-2)+c=0 \Rightarrow \boxed{8-2b+c=0}$

$x=1 \xRightarrow{\text{در مخرج}} a+b+c=0 \Rightarrow 2+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases}2b-c=8\\ b+c=-2\end{cases} \Rightarrow b=2 \to c=-4 \Rightarrow f(x)=\dfrac{-2x^2+3x}{2x^2+2x-4} \Rightarrow f(-1)=\dfrac{-5}{-4}=1.25$

---

* **مثال** (کنکور ۹۹ - خارج کشور) نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax^2+7x}{2x^2+bx+c}$، فقط یک مجانب قائم $x=2$ دارد. اگر $f(3)=6$ باشد، معادله‌ی مجانب افقی آن، کدام است؟

۱) $y=-1$ ۲) $y=-\frac{1}{2}$ ۳) $y=\frac{1}{2}$ ۴) $y=\frac{3}{2}$

(گزینه‌ی دوّم)

جواب: $x=2$ تنها مجانب قائم $\Rightarrow$ مخرج تابع $=2(x-2)^2 \Rightarrow 2x^2+bx+c=2x^2-8x+8 \Rightarrow b=-8,\ c=8$

$f(3)=6 \Rightarrow \dfrac{9a+21}{2}=6 \Rightarrow 9a=-9 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{-x^2+7x}{2x^2-8x+8} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=-\dfrac{1}{2}}$ م.ا.