

تابع نمایی

آیا تاکنون با خود فکر کرده‌اید که دانشمندان چگونه قدمت یک شیء باستانی یا یک فسیل را پیدا می‌کنند؟ در بدن هر موجود زنده کربن ۱۴ موجود است که با مرگ آن موجود، کربن ۱۴ شروع به از بین رفتن می‌کند. بنابراین با اندازه‌گیری مقدار کربن باقی مانده، می‌توان سن آن شیء یا موجود را پیدا کرد. در حل این گونه مسائل از تابع نمایی استفاده می‌شود.

فعالیت

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه‌گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر جرم باکتری‌ها را پس از t ساعت با $m(t)$ نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کنیم یعنی $m(0) = 1$ ، آن‌گاه با توجه به جدول، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

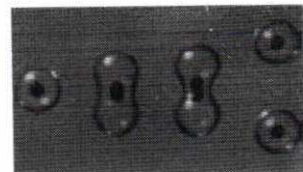
جدول (۱)

t زمان (ساعت)	$m(t)$ جرم باکتری‌ها
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲
۶	۶۴
۷	۱۲۸
۱۰	۱۰۲۴

الف) در زمان‌های $t = 5$ و $t = 6$ جرم باکتری‌ها را به دست آورید.

ب) پس از چند ساعت جرم باکتری‌ها ۲۵۶ گرم می‌شود؟ پس از چند ساعت به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد؟

پ) آیا از اعداد این جدول می‌توان الگویی را برای محاسبه جرم باکتری‌ها در هر زمان به دست آورد؟



تقسیم دوتایی نوعی تولید مثل است که به تولید زاده‌هایی یکسان منجر می‌شود.

$$m(t) = 2^t$$

(ب) نقاط به دست آمده را در یک صفحه شطرنجی مشخص کنید (برخی از نقاط در دستگاه مشخص شده‌اند).

خواندنی

2

↓

x^y

↓

(

↓

2

↓

$\sqrt{\quad}$

↓

)

↓

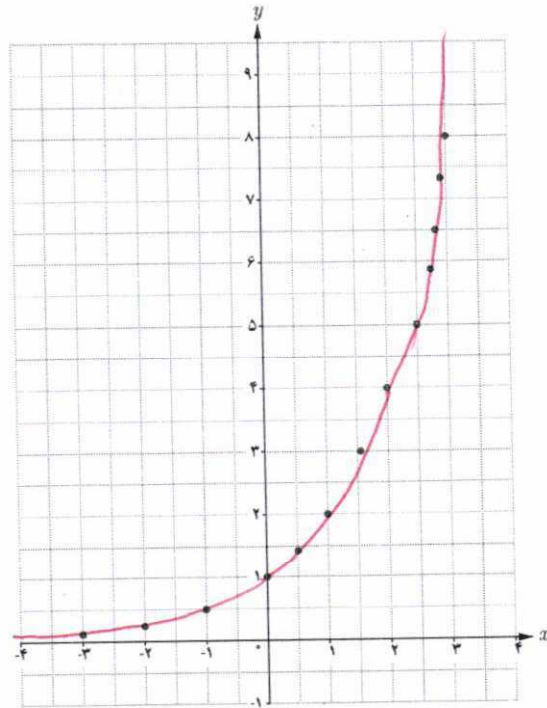
=

↓

2/6

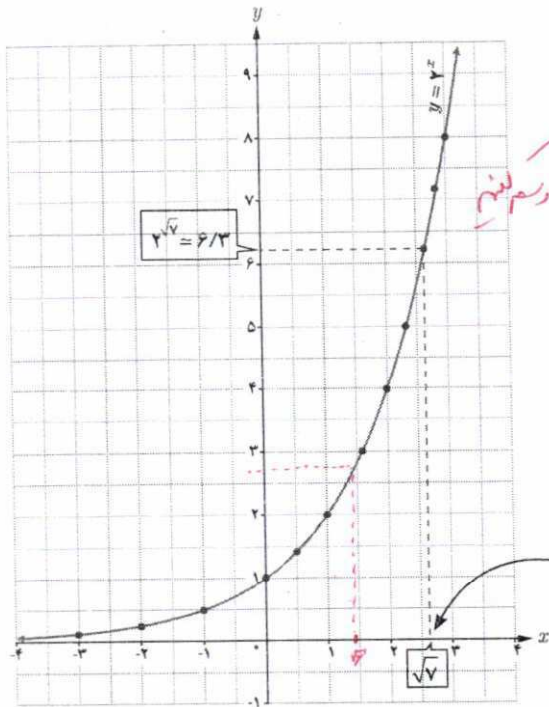
به دلیل افزایش حجم محاسبات در زندگی روزمره، بیش از گذشته به ماشین حساب نیاز مندیم. برای محاسبه $2^{\sqrt{2}}$ مراحل روبه‌رو را انجام می‌دهیم:

اکنون مقادیر $2^{\sqrt{5}}$ ، $2^{\sqrt{5}}$ ، $2^{\sqrt{2}}$ و $2^{\sqrt{2}}$ را تا دو رقم اعشار با استفاده از ماشین حساب به دست آورید.



همان‌طور که ملاحظه می‌شود دامنه تابع $y = 2^x$ همه اعداد حقیقی و برد آن همواره اعداد مثبت است.

اگر تعداد نقاط خیلی زیاد شوند، شکلی شبیه نمودار روبه‌رو حاصل می‌شود.



(ب) چرا نمودار روبه‌رو یک تابع است؟ *اگر خطی موازی محور y بکاریم این نمودار را جدا می‌کنیم و فقط نقطه قطع می‌کند*

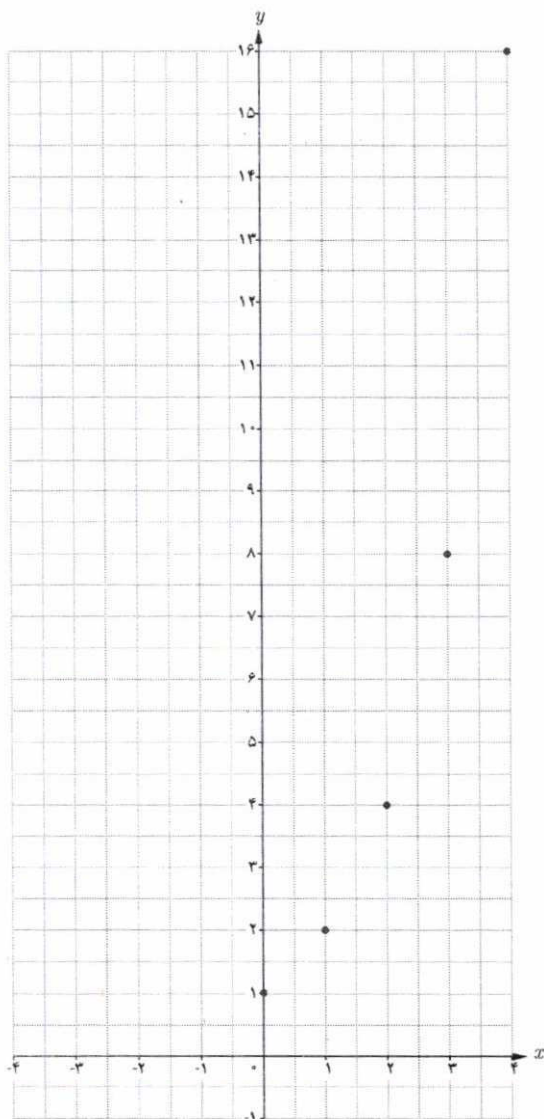
(ت) نقطه $x = \sqrt{2}$ را روی محور x ها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $2^{\sqrt{2}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید. **۲٫۸**

(ث) کدام یک از اعداد زیر، بین دو عدد 2^2 و 2^3 قرار دارد؟
 2^{-1} 2^5 $2^{\frac{3}{2}}$ $2^{\frac{5}{2}}$

(ج) چرا نمودار تابع $y = 2^x$ محور x ها را قطع نمی‌کند؟

بعضی نقاط فقط به محور y برخورد می‌کند

توجه کنید دامنه $y = 2^x$ شامل اعداد اصم مثل $\sqrt{7}$ است.



اگر بخواهیم جرم باکتری‌ها را در مرحله یازدهم یا مرحله‌ای بالاتر پیدا کنیم، قطعاً محاسبات، خیلی دشوارتر و وقت‌گیر خواهد شد. برای ساده‌تر شدن محاسبات، جدول (۱) را بر اساس توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم تا جدول (۲) حاصل شود. در جدول (۲) به جای علامت سؤال‌ها اعداد مناسب قرار دهید.

جدول (۲)

t	$m(t)$
۰	$2^0 = 1$
۱	$2^1 = 2$
۲	$2^2 = 4$
۳	$2^3 = 8$
۴:	$2^4 = 16$
۹?	$2^9 = 512$

نمودار روبه‌رو رابطه بین زمان و جرم باکتری‌ها را نشان می‌دهد. با توجه به فعالیت صفحه قبل، جرم باکتری‌ها در پایان ساعت اول، دوم، ... و m ام از دنباله زیر به دست می‌آید:

$$2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n.$$

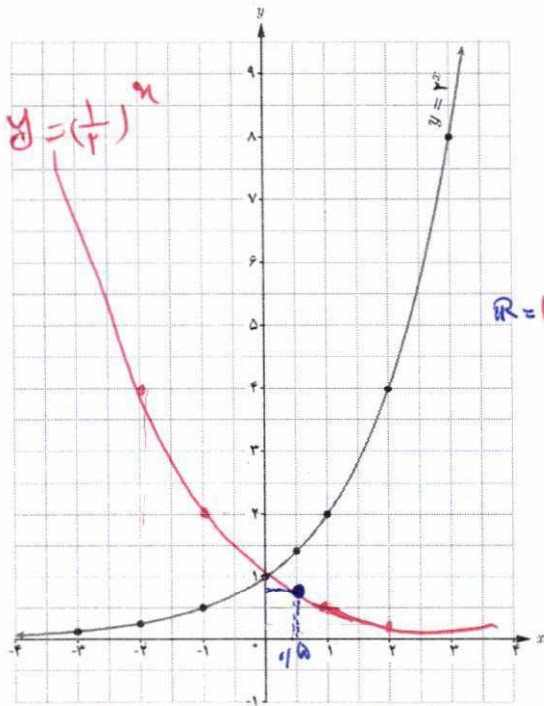
به عبارت دیگر، جرم باکتری‌ها برحسب زمان t ، از رابطه $m(t) = 2^t$ به دست می‌آید.

فعالیت

در نمودار فعالیت قبل، نقاط مشخص شده اعداد صحیح نامنفی هستند. می‌توان نقاطی از آن نمودار، با طول اعداد گویا را نیز به دست آورد.

الف) جاهای خالی جدول را با قرار دادن اعداد مناسب پر کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۳
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	$2^{\frac{1}{3}}$	$2^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{2}{3}}$	2^1	$2^{\frac{3}{2}}$	2^2	2^3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	۱	$\sqrt[3]{2} = 1/26$	$\sqrt{2} = 1/4$	$\sqrt[3]{4} = 1/56$	۲	$\sqrt{8} = 2/13$	۴	۸



الف) نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار $y = 2^x$ مقایسه کنید. *نقطه برخورد آنها تقابلی دارند*

ب) دامنه و برد تابع را به دست آورید. *دامنه هر دو $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ و برد هر دو $(0, +\infty)$ است.*

هر تابع با ضابطه $f(x) = a^x$ ، که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی می‌نامیم.

ب) نقطه $\left(\frac{1}{5}, \left(\frac{1}{2}\right)^{1/5}\right)$ را روی نمودار مشخص کنید.

❖ مثال: توابع زیر همگی نمایی هستند:

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x, f(x) = (3/14)^x$$

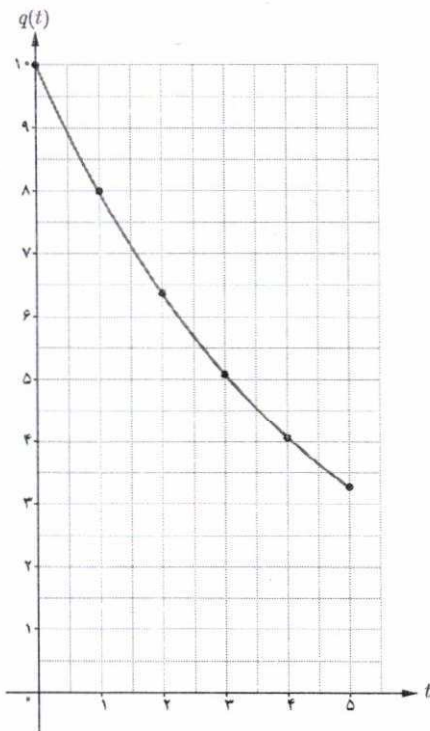
❖ تذکر: در حالت کلی هر تابع با ضابطه $h(x) = ka^x$ ($k \neq 0, a > 0, a \neq 1$) رفتار نمایی دارد. به عنوان مثال، توابع $f(x) = 3 \times 2^x$ یا $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$ رفتار نمایی دارند.

❖ مثال: اگر 10° گرم نمک را به مقدار کمی آب اضافه کنیم، مقدار نمک حل نشده در آب پس از t دقیقه از رابطه $q(t) = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$ به دست می‌آید. بنابراین پس از مثلاً 4 دقیقه، مقدار نمک حل نشده در آب برابر است با:

$$q(4) = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \approx 41.096 \text{ gr}$$

نمودار این تابع برای $0 \leq t \leq 5$ در شکل روبه‌رو رسم شده

است.



مثال: فرض کنید Q جرم یک مقدار کربن ۱۴ برحسب گرم با نیمه عمر 5730 سال باشد (یعنی پس از 5730 سال نصف

مقدار معینی از آن از بین می‌رود). مقدار این کربن بعد از t سال از رابطه $Q(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ به دست می‌آید.
الف) در لحظه $t=0$ داریم $Q(0) = 10 \text{ gr}$ و بعد از 2000 سال داریم

$$Q(2000) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2000}{5730}} = 7.85 \text{ gr}$$

ب) اگر $t = 5730$ ، آن‌گاه $Q(5730) = 10 \times \frac{1}{2} = 5 \text{ gr}$ یعنی بعد از 5730 سال، مقدار کربن ۱۴ نصف می‌شود.

کاردرکلاس

۱ نمودارهای سه تابع $f(x) = 2^x$ ، $g(x) = 3^x$ و $h(x) = 5^x$ در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن

بنویسید.

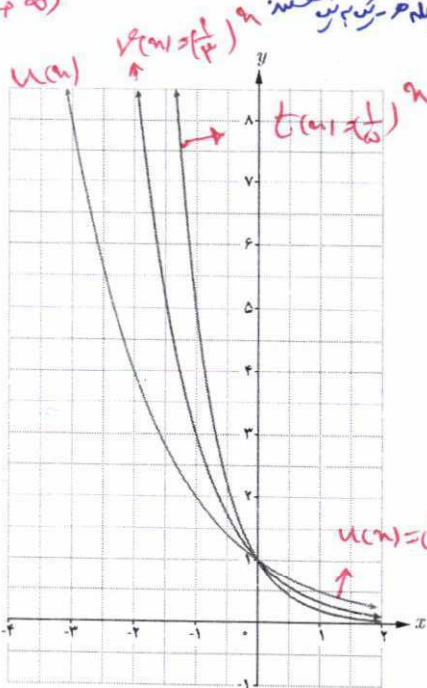
۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید $D = (-\infty, +\infty)$ و $R = (0, +\infty)$

۳ آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟
بله زیرا هر خطی موازی محور x صواب رسم شود سطح را هداست برید
نقطه قطع می‌کند

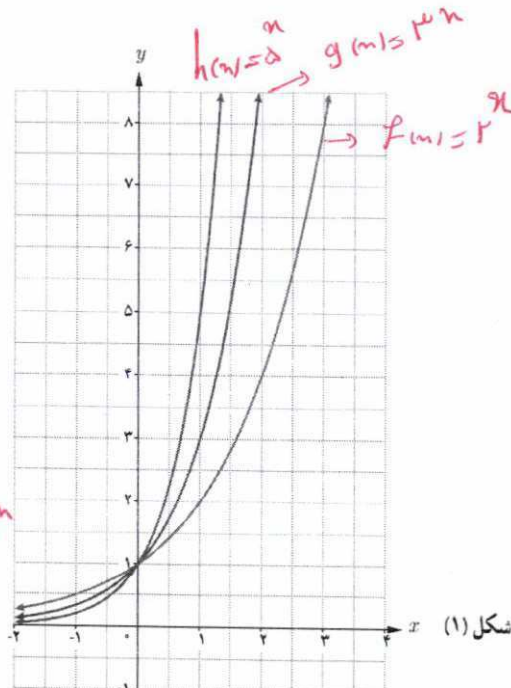
۴ نمودارهای توابع $u(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، $v(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $t(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی

$D = (-\infty, +\infty)$
 $R = (0, +\infty)$

نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به دست آورید. آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟
بله زیرا هر خطی موازی محور x صواب رسم شود سطح را هداست برید



شکل (۲)



شکل (۱)

۵

الف) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید:

$$2^4, \left(\frac{1}{2}\right)^2, 2^2, 2^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

ب) جاهای خالی را پر کنید:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 < 2^2 < 2^3 < 2^4$$

در تابع $f(x) = a^x$,

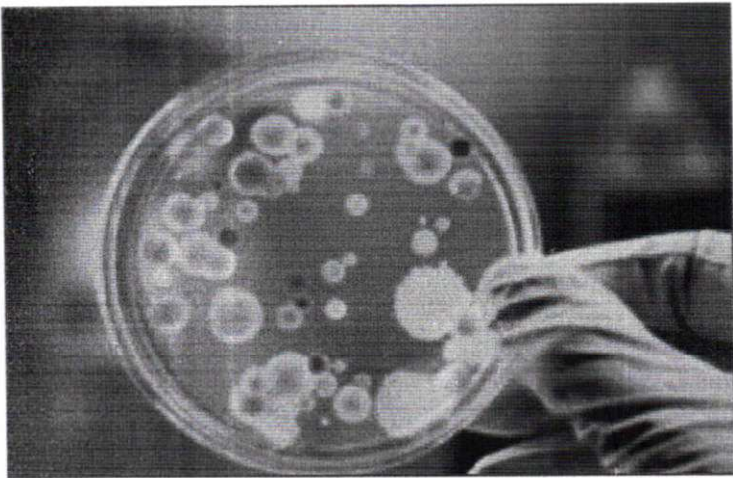
اگر $a > 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر f ... می یابند.

اگر $0 < a < 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر تابع f ... می یابند.

در سال های قبل، توان های طبیعی، صحیح و گویای اعداد حقیقی را تعریف کرده و با ویژگی های مقدماتی آنها آشنا شده ایم. این قوانین برای توان های حقیقی نیز برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم:

۱) $a^0 = 1$	۲) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	۳) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	۴) $(a^x)^y = a^{xy}$
۵) $(ab)^x = a^x b^x$	۶) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	۷) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	

تمرین



۱) تحت شرایط ایده آل، جرم یک توده معین

از باکتری ها در هر ساعت دو برابر می شود.

فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی گرم باکتری وجود

دارد.

$$m(t) = 2^{\frac{t}{100}} \text{ گرام}$$

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت

یک تابع نمایی بنویسید.

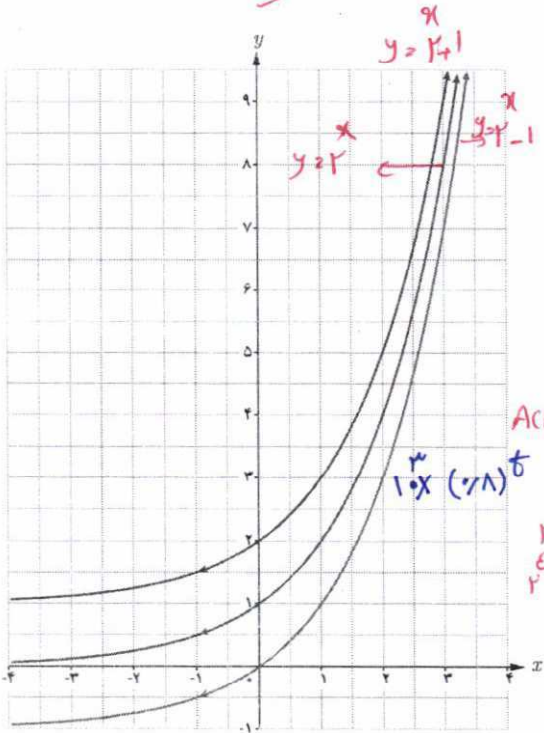
$$m(t) = 2^{\frac{t}{100}}$$

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد

کنید.

$$m(20) = 2^{\frac{20}{100}} = 2^{\frac{1}{5}}$$

ابتدا نمودار $y = a^x$ را رسم کنید و سپس اول نمودار $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ را رسم کنید و $y = a^x$ را مقایسه کنید
 و اگر $a > 1$ باشد نمودار $y = a^x$ و $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ را رسم کنید و مقایسه کنید



نمودار توابع $y = 2^x - 1$ و $y = 2^x + 1$ ، $y = 2^x$ در شکل روبه رو آمده اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y = a^x + 2$ و $y = a^x - 2$ ، $y = a^x$ با یکدیگر چه نتیجه ای می گیرید؟ ($a > 1$)

داروها در بدن با ادرار دفع می شوند. فرض کنید 1° میلی گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t) = 10 \cdot (0.8)^t$ به دست می آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟
 ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می رود؟

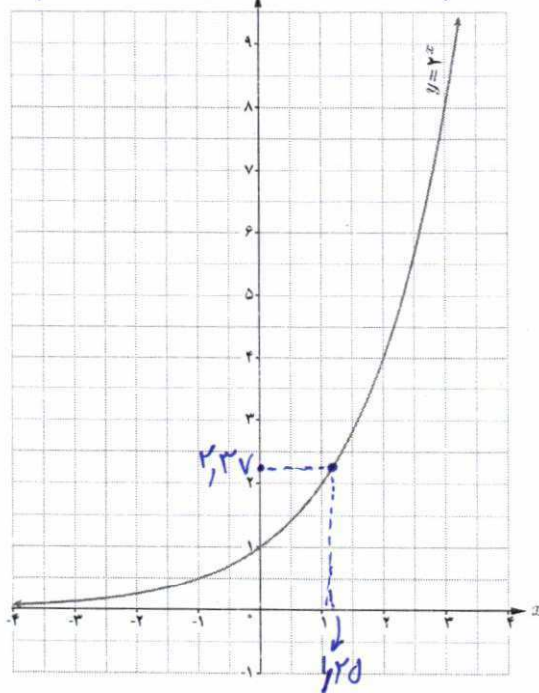
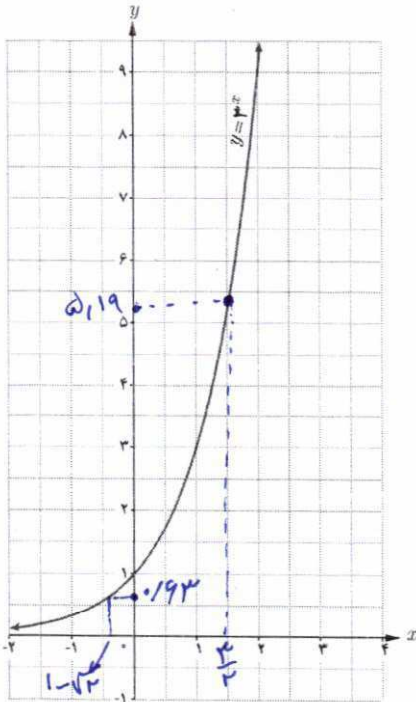
الف) سه عدد بین اعداد $3\sqrt{10}$ و $3^{2/5}$ پیدا کنید.

ب) نامعادله توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را حل کنید.

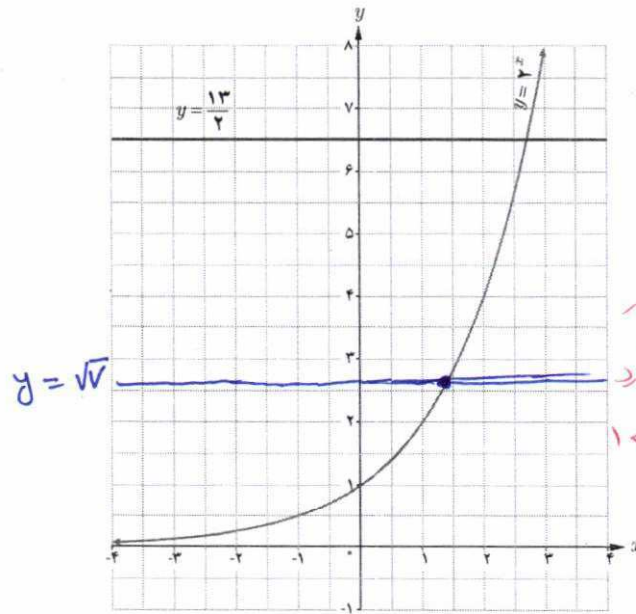
پ) اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، به طوری که $a^x > a^y > a^z$ ، آن گاه چه رابطه ای بین x و y و z برقرار است؟ ($a > 1$)

۵- ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

الف) $3^{1-\sqrt{2}} \approx 0.23$
 ب) $2^{1/25} \approx 2.27$
 ب) $3^{3/2} \approx 5.19$



الف) در شکل زیر خط $y = \frac{13}{2}$ نمودار $y = 2^x$ را قطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟ چرا؟
 ب) خط $y = \sqrt{7}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y = 2^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



الف) $2 < x < 3$
 $\rightarrow 2^2 < y < 2^3$
 ب) $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$
 $2 < \sqrt{7} < 3$
 بین $\sqrt{4}$ و $\sqrt{9}$ قرار دارد
 در حالت اول طول نقطه برخورد
 خط و منحنی بین $1 < x < 2$
 است.

۷ در تصفیه آب، داخل فیلترها، لایه تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه $0.7 \times 0.7 = 0.49$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به دست می‌آید؟ $\frac{v^n}{100 \times 10^{n-2}}$
 ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶ درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

۱۰۰٪ $\rightarrow 1$
 ۷۰٪ $\rightarrow (0.7)^2 \rightarrow 49\%$
 ۱۰۰٪ $\rightarrow \frac{v^n}{10^n}$

$$\frac{v^n}{100 \times 10^{n-2}} < \frac{4}{100} \Rightarrow$$

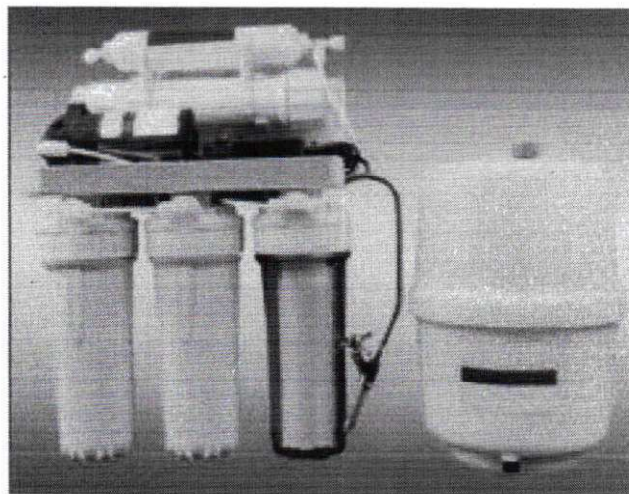
$$\frac{v^{n-2}}{10} \times v^2 < 4 \rightarrow$$

$$\frac{v^{n-2}}{10} < \frac{4}{v^2} \xrightarrow{\text{طرفین } \log_{10}}$$

$$\log_{10} \frac{v^{n-2}}{10} > \log_{10} \frac{4}{v^2}$$

$$n-2 > \log_{10} \frac{4}{v^2} \rightarrow$$

$$n > \log_{10} \frac{4}{v^2} + 2 \rightarrow n > 2 + 2 \log_{10} \frac{4}{v}$$



تابع لگاریتمی و لگاریتم

بار دیگر، مسئله افزایش جرم توده باکتری در محیط کشت را که در ابتدای این فصل مطرح شد، در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم در چه زمانی وزن باکتری‌ها ۵۱۲ گرم است، یعنی اگر $m(t) = 512$ ، می‌خواهیم t را بیابیم. چون تابع $m(t) = 2^t$ یک تابع یک به یک است، پس وارون پذیر است و از این رو $t = m^{-1}(512)$. به جدول‌های زیر نگاه کنید:

t (زمان)	$m(t) = p$ ، جرم باکتری‌ها در زمان t
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲

⇒

t (زمان)	$m^{-1}(p)$ ، زمان رسیدن به جرم p
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲

خواندنی

جان نپیر (John Napier)

جان نپیر ریاضیدان اسکاتلندی مفهوم لگاریتم را پایه‌ریزی کرد. لگاریتم برای ساده کردن محاسبات ابداع شد و در قرن ۱۶ و ۱۷ بزرگ‌ترین پیشرفت در علم حساب بود. لگاریتم در علوم زیادی کاربرد دارد. مثلاً در زلزله‌شناسی برای اندازه‌گیری شدت زلزله برحسب ریشتر کاربرد دارد. لگاریتم در حسابداری و مسائل مالی نیز کاربردهای زیادی دارد.

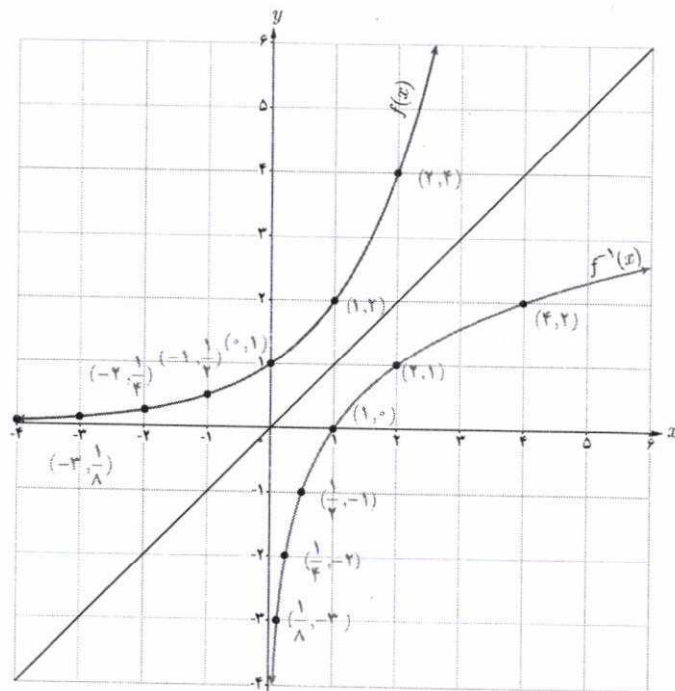
نمودارهای تابع $y = f(x) = 2^x$ و تابع وارون آن در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند. دقت کنید که برای رسم تابع وارون $y = 2^x$ کافی است قرینه نقاط روی تابع را نسبت به خط $y = x$ پیدا کنیم. به عنوان مثال، نقطه $(2, 4)$ روی تابع نمایی $y = 2^x$ و نقطه $(4, 2)$ که قرینه آن نسبت به خط $y = x$ است، روی تابع وارون آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد. می‌توان دید:

$$D_f = (-\infty, +\infty), R_f = (0, +\infty)$$

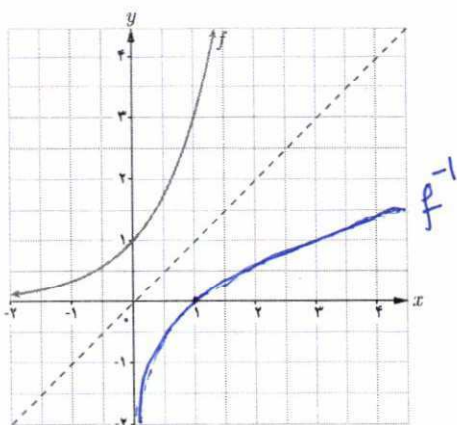
$$D_{f^{-1}} = (0, +\infty), R_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$$

توجه کنید که دامنه f با برد f^{-1} برابر است و برد

f با دامنه f^{-1} .



۱ با توجه به نمودار تابع $f(x) = 3^x$ نمودار تابع f^{-1} را رسم کنید و جدول زیر را کامل کنید.



$f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{9}$	\Leftrightarrow	$f^{-1}\left(\frac{1}{9}\right) = -2$
$f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$	\Leftrightarrow	$f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = -1$
$f(0) = 3^0 = 1$	\Leftrightarrow	$f^{-1}(1) = 0$
$f(1) = 3^1 = 3$	\Leftrightarrow	$f^{-1}(3) = 1$
$f\left(\frac{2}{3}\right) = 3^{\frac{2}{3}}$	\Leftrightarrow	$f^{-1}\left(3^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}$
$f(2) = 3^2 = 9$	\Leftrightarrow	$f^{-1}(9) = 2$

۲ گزینه درست را با \checkmark و گزینه غلط را با \times علامت بزنید.

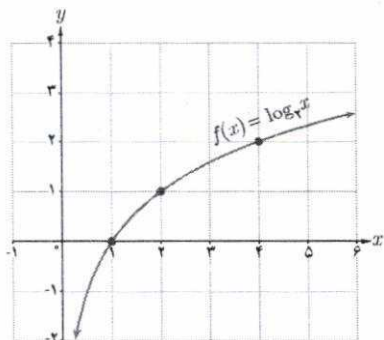
- نقطه $\left(-2, \frac{1}{9}\right)$ روی نمودار f قرار دارد. \checkmark
- نقطه $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ و $(-1, \frac{1}{9})$ روی نمودار f^{-1} قرار دارد. \times
- نقطه $(0, 1)$ و $(1, 0)$ روی نمودار f قرار دارد. \times
- نقطه $(1, 0)$ و $(-2, \frac{1}{9})$ روی نمودار f^{-1} قرار دارد. \checkmark
- تابع f^{-1} یک به یک است. \checkmark

فرض کنید داریم $f(x) = 3^x$ و $y = f^{-1}(x)$. در این صورت y را لگاریتم x در پایه ۳ می‌خوانیم و آن را با نماد $y = \log_3 x$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم لگاریتم x در پایه ۳.

اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x) = a^x$ یک به یک است و از این رو دارای تابع وارون f^{-1} است که تابع لگاریتمی پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y = \log_a x$ نشان داده می‌شود.

♣ مثال: وارون تابع $f(x) = 5^x$ تابع $f^{-1}(x) = \log_5 x$ است.

همچنین وارون تابع $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ تابع $g^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ است.

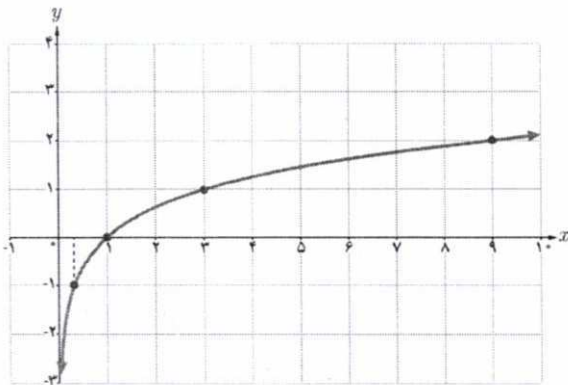


♣ مثال: با توجه به نمودار $f(x) = \log_3 x$ ، می‌توان دید:

$$f(1) = 0$$

$$f(3) = 1$$

$$f(9) = 2$$



❖ مثال: مقادیر زیر با استفاده از نمودار $f(x) = \log_2 x$ به دست آمده‌اند.

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$f(4) = 2$$

به طور کلی

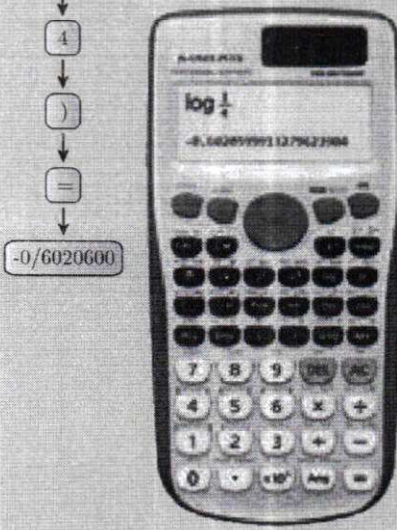
$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

به عنوان مثال، $\log_2 8 = 3$ زیرا $2^3 = 8$ و یا $\log_{10} 1000 = 3$ ، زیرا $10^3 = 1000$.

همچنین $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$ ، زیرا $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$.

خواندنی

برای محاسبه لگاریتم در ماشین حساب کافی است از دکمه \log استفاده کنیم. مثلاً برای محاسبه $\log_{10} 10$ ابتدا دکمه \log سپس عدد ۱۰ و در نهایت دکمه $=$ را می‌زنیم. همچنین برای محاسبه $\log_{10} \frac{1}{4}$ به صورت روپرو عمل می‌کنیم: و ماشین حساب مقدار آن را به صورت زیر نشان می‌دهد.



❖ مثال: فرض کنید $f(x) = \log_{10} x$. مقدار تابع f را در هر یک از نقاط زیر در صورت وجود، حساب کنید.

الف) $x = 10$ ب) $x = 100$

پ) $x = -2$ ت) $x = 1000$

❖ حل:

الف) $f(10) = \log_{10} 10 = 1$ زیرا $10^1 = 10$.

ب) $f(100) = \log_{10} 100 = 2$ زیرا $10^2 = 100$.

پ) $f(-2)$ موجود نیست، زیرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

ت) $f(1000) = \log_{10} 1000 = 3$ زیرا $10^3 = 1000$.

❖ مثال: با توجه به تعریف لگاریتم، جدول زیر را داریم:

$2^5 = 32$	$6^2 = 36$	$5^3 = 125$	$2^{10} = 1024$	$3^4 = 81$
$\log_2 32 = 5$	$\log_6 36 = 2$	$\log_5 125 = 3$	$\log_2 1024 = 10$	$\log_3 81 = 4$

❖ مثال: تساوی‌های زیر را به صورت توانی بیان کنید.

(ب) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$

(الف) $\log_7 1 = 0$

❖ حل:

(الف) اگر $\log_7 1 = 0$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $1 = 7^0$.

(ب) اگر $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $\frac{1}{27} = 3^{-3}$.

❖ مثال: مقادیر زیر را محاسبه کنید:

(ب) $\log_4 1$

(ب) $\log_6 6$

(الف) $\log_2 8$

❖ حل:

(الف) اگر $a = \log_2 32$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $2^a = 32$ و از این رو $a = 5$.

(ب) اگر $b = \log_6 6$ ، آن‌گاه $6^b = 6$ و در نتیجه $b = 1$.

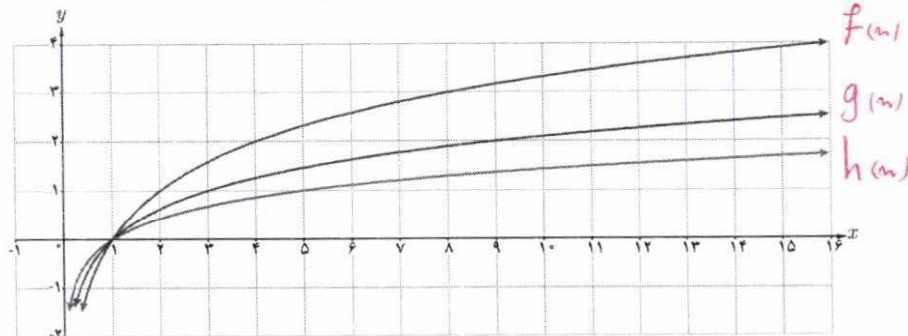
(ب) اگر $c = \log_4 1$ ، آن‌گاه $4^c = 1$ و در نتیجه $c = 0$.

کاردرکلاس

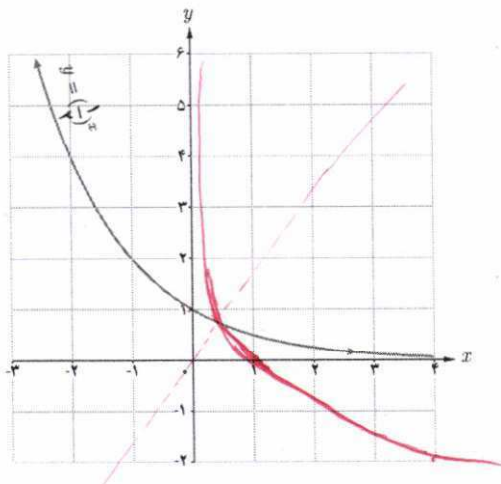
۱ الف) نمودار سه تابع $f(x) = \log_2 x$ ، $g(x) = \log_3 x$ و $h(x) = \log_5 x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هر یک را روی نمودار آن بنویسید.

(ب) محل دقیق هر یک از نقاط زیر را روی نمودار متناظرش نشان دهید.

$(5, 1)$ و $(9, 2)$ و $(16, 4) \in f(x)$
 ب. $g(x)$ متعلق به $h(x)$



پ) با توجه به نمودار $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ نمودار $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید. **نقطه به خط $y=x$ قرمز هم بر**



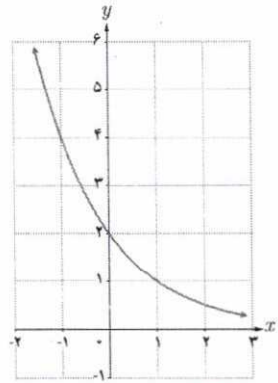
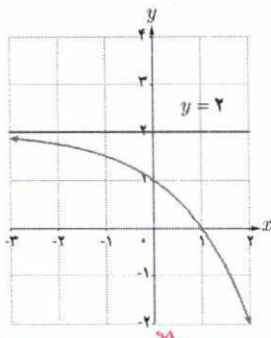
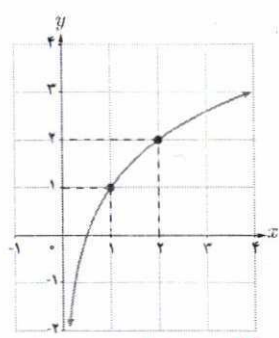
۲ مشخص کنید هر یک از نمودارهای زیر به کدام یک از ضابطه‌های زیر تعلق دارد؟

با بررسی نقاط کار مشخص کنیم ضابطه نمودار ساده تر است.

پ) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

ب) $y = \log_2(x+1)$

الف) $y = -2^x + 2$



شکل ب را نمی‌دید زیرا جانب تمام آن باید $x=0$ باشد نه $x=1$. معادله جانب تمام فرجه اهداف نیست.

الف) $y = -2^x + 2$

پ) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

۲ حاصل عبارات‌های زیر را به دست آورید.

پ) $\log_2 8$

ب) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6}$

الف) $\log_2 81$

$\log_2 8 = 3 \log_2 2 = 3$

$= 1$

$\log_2 81 = 4 \log_2 3 = 4$

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید:

$$\log_{10} 0.01, \log_6 \frac{1}{6}, \log_2 \sqrt{2}, \log_3 \sqrt[3]{27}$$

۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a > 1$ و $0 < a < 1$ با هم مقایسه کنید.

۳ الف) خط $y = 27$ نمودار تابع $y = 3^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ب) خط $y = 10$ نمودار تابع $y = (0.1)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۴ نمودار دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

۵ عبارت درست را با \checkmark و عبارت غلط را با \times علامت بزنید.

– لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است. \times *میان اعداد کمتر از ۱*

– لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. \checkmark

– تابع لگاریتم، تابعی یک‌به‌یک است. \checkmark

– تابع لگاریتم محور y ها را قطع می‌کند. \times

– اگر نقطه (b, d) روی نمودار $y = a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d, b) روی نمودار $y = \log_a x$ قرار دارد. \checkmark

– اگر $a > b > 0$ آنگاه $\log_a a < \log_a b$. \times *در مبنای کمتر از ۱ تابع لگاریتم صعودی است*

$$a > b \rightarrow \log_a a > \log_a b$$

۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

ب) $y = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x$

ب) $y = -3^x - 2$

الف) $y = 1 + \log_2 x$

ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

ویژگی‌های لگاریتم

برای حل یک مسئله واقعی که در بیان ریاضی آن لگاریتم به کار رفته است، نیازمند استفاده از روابطی هستیم که بین لگاریتم‌ها برقرار است. به همین جهت در این قسمت به بیان و اثبات روابط و ویژگی‌های لگاریتم می‌پردازیم. برخی از ویژگی‌های ساده لگاریتم به صورت زیر هستند:

❖ مثال: الف) $\log_a 1 = 0$ ، زیرا $a^0 = 1$
ب) $\log_a a = 1$ ، زیرا $a^1 = a$

❖ مثال: نشان دهید برای اعداد حقیقی مثبت a, b, c ، که $c \neq 1$ ، همواره داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

❖ حل: فرض کنیم $x = \log_c a$ و $y = \log_c b$. پس طبق تعریف، $a = c^x$ و $b = c^y$. از این رو $c^{x+y} = c^x \cdot c^y = ab$ و طبق تعریف لگاریتم داریم $\log_c ab = x + y$. در نتیجه $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$.

❖ مثال: با توجه به مثال قبل، $\log_a b^2 = \log_a (b \times b) = \log_a b + \log_a b = 2 \log_a b$. به طور مشابه $\log_a b^3 = \log_a (b^2 \times b) = (\log_a b + \log_a b) + \log_a b = 3 \log_a b$ اگر $a, b > 0$ ، $a \neq 1$ و n یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

به خصوص $\log_a a^n = n$.

قرار داد: همواره منظور از $\log a$ عبارت است از $\log_{10} a$. همچنین، لگاریتم در پایه 10 را لگاریتم اعشاری می‌نامیم.

❖ مثال: فرض کنیم $a = \log_2 5$. نشان دهید $1 - a = \log_5 2$.

❖ حل: می‌دانیم $1 = \log_{10} 10$ ، پس طبق مثال بالا، $1 = \log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5$ و در نتیجه $1 - a = \log_2 2 = 1 - \log_2 5 = \log_5 2$.

سوال ۱ $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b = \log_c a + \log_c \frac{1}{b} = \log_c a + \log_c b^{-1} = \log_c a + \log_c b^{-1} = \log_c a - \log_c b$

سوال ۲ الف) $\log \sqrt{75} = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = \log 3 - \log 2 = \log 3 - \log 2 = \log 3 - 2 \log 2 = b - 2a$

ب) $3 \log (2)^{\frac{1}{3}} - \log \frac{1000}{2} = 3 \left(\frac{1}{3}\right) \log 2 - \log 1000 + \log 2 = 2 \log 2 - 3 + 2 \log 2 = 4 \log 2 - 3 = 2a - 3$

فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی ۸۷

ج) $\log \frac{a}{1000} = \log a - \log 1000 = \log \frac{a}{10^3} - \log 10^3 =$

کارد کلاس

$\log a - \log 10^3 - 3 = 1 - a - 3 = -2 - a$

۱ نشان دهید که اگر $a, b, c > 0$ و $c \neq 1$ ، آنگاه

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

۲ اگر $a = \log 2$ و $b = \log 3$ ، حاصل عبارت‌های زیر را بر حسب a و b بنویسید.

الف) $\log 0.0005$

ب) $3 \log \sqrt[3]{4} - \log 250$

ب) $\log 0.75$

معادلات لگاریتمی

در برخی از مدل‌سازی‌ها به یک معادله شامل عبارت‌های لگاریتمی می‌رسیم؛ مانند محاسبه شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبه نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. در حل بسیاری از این معادلات، جواب‌ها با استفاده از خواص لگاریتم به دست می‌آیند که به این معادلات، معادلات لگاریتمی می‌گوییم. منظور از حل معادله لگاریتمی، یافتن مقدار یا مقادیری از متغیر است که در معادله صدق کند. تساوی‌های زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی هستند:

$$\log(x+1) = 3, \log_r x = \log_r r, \log_r x + \log_r(x-1) = \log_r 12$$

در حالت کلی داریم:

اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه از تساوی $\log_a x = \log_a y$ می‌توان نتیجه گرفت $x = y$ و بالعکس، اگر $x = y$ و $x, y > 0$ آنگاه $\log_a x = \log_a y$.

❖ مثال: معادله لگاریتمی $\log_5(x^2 - 2) = \log_5 x$ را حل کنید.

❖ حل: به سادگی می‌توان دید $x^2 - 2 = x$ و از این رو $x^2 - x - 2 = 0$. از طرفی $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ و در نتیجه ریشه‌های معادله اخیر برابر است با ۲ و -۱. قسمت مهم حل یک معادله لگاریتمی آزمایش کردن جواب‌هاست. در این مثال، چون لگاریتم اعداد نامثبت تعریف نشده است، تنها جواب قابل قبول $x = 2$ است (چرا؟).

❖ مثال: معادله لگاریتمی $3 \log_5 x - \log_5 4 = \log_5 16$ را حل کنید.

❖ حل: می‌دانیم $3 \log_5 x - \log_5 4 = \log_5 \left(\frac{x^3}{4}\right) = \log_5 16$ و در نتیجه $\frac{x^3}{4} = 16$. از این رو

$x^3 = 16 \times 4 = 64$. بنابراین $x = 4$. با جای‌گذاری $x = 4$ در معادله بالا می‌توان دید این جواب قابل قبول است.

الف) $\log_{\frac{1}{5}} 2^{n-1} = \log_{\frac{1}{5}} 2^n$ ابتدا دامنه را تقریباً کم کنیم $n > 0$ و $2^{n-1} > \frac{1}{5}$ $n > \frac{1}{2}$

حل $2^{n-1} = 2^n \rightarrow n=1$ در دامنه قرار نگیرد

ب) $\log_{\frac{1}{3}} (n-1) \left(\frac{n}{2} + 1\right) = 2 \rightarrow (n-1) \left(\frac{n}{2} + 1\right) = 9$ در آنجا $(n-1)(n+2) = 18 \rightarrow n^2 + n - 2 - 18 = 0 \rightarrow$

$n^2 + n - 20 = 0 \rightarrow (n+5)(n-4) = 0$ $\begin{cases} n = -5 \\ n = 4 \end{cases}$

۸۸

ب) $n(n+3) = 10 \rightarrow n^2 + 3n - 10 = 0 \rightarrow (n+5)(n-2) = 0$ $\begin{cases} n = -5 \\ n = 2 \end{cases}$

فعالیت

معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید:

ب) $\log x + \log(x+3) = 1$

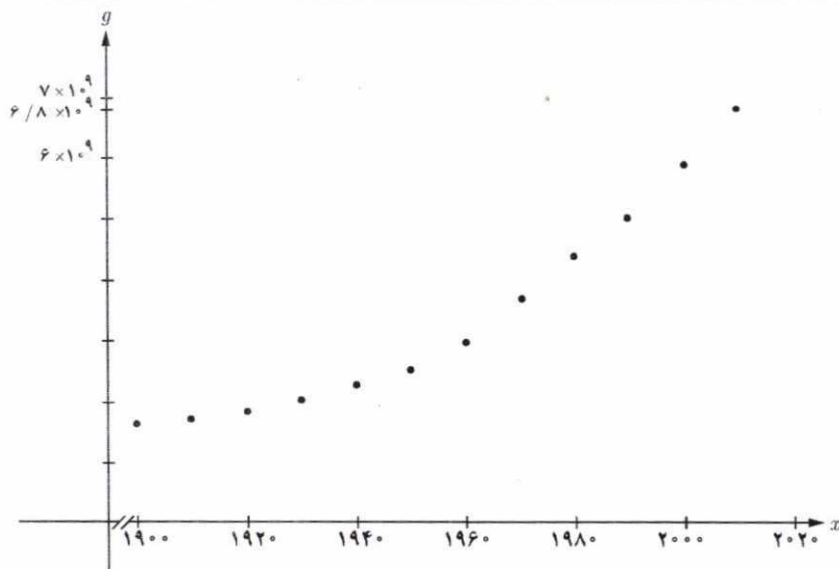
ب) $\log_2(x-1) + \log_2\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2$

الف) $\log_5(2x-1) = \log_5 x$

کاربردهای لگاریتم

مثال: جدول زیر، جمعیت جهان را در قرن بیستم و پایان دهه اول قرن بیست و یکم نشان می‌دهد.

سال	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰	۲۰۰۰	۲۰۱۰
جمعیت (میلیون)	۱۶۵۰	۱۷۵۰	۱۸۶۰	۲۰۷۰	۲۳۰۰	۲۵۶۰	۳۰۴۰	۳۷۱۰	۴۴۵۰	۵۲۸۰	۶۰۸۰	۶۸۰۰



الف) باتوجه به جدول، نمودار جمعیت جهان برحسب سال به صورت زیر است:

ب) اگر محور x های بیانگر سال و محور g های بیانگر جمعیت باشد، تابع جمعیت در انتهای هر سال به صورت $g(x) = 0.008(1.01376)^x$ برآورد می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که جمعیت در پایان سال ۲۰۱۶ تقریباً برابر است با:

$g(2016) = 0.008(1.01376)^{2016} \approx 7,385,074,512$

در اینجا می‌توان حدس زد که در چه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد خواهد رسید، زیرا داریم:

$g(x) = 8 \times 10^{-9} (1.01376)^x = 8 \times 10^1$

$\Rightarrow (1.01376)^x = 10^{12} \Rightarrow x \log 1.01376 = \log 10^{12} \Rightarrow x = \frac{12}{\log 1.01376} = 2021$

$(\log 1.01376 = 0.0005935)$

۱- دقت کنید که نقطه ابتدای دامنه تابع $g(x)$ نقطه ۱۹۰۰ است.

❖ مثال: ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده بر حسب ارگ (Erg) از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M.$$

از این رابطه می‌توان محاسبه کرد که مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله $6/6$ ریشتری برابر است با:

$$\log E = 11/8 + 1/5 (6/6) = 21/7 \Rightarrow E = 10^{21/7} Erg.$$

خواندنی

جالب است بدانید که:

در زلزله $6/6$ ریشتری بم (۱۳۸۲) ۹۰ درصد از سازه‌های این شهر که بیش از ۲۵۰۰ سال قدمت داشت از بین رفت. با

توجه به اینکه انرژی آزاد شده در یک زلزله ۸ ریشتری معادل انفجار یک میلیارد تن TNT است. بنابراین انرژی آزاد

$$\frac{6/6 \times 10^9}{8} = 825 \times 10^6 = 825 \times 10^6$$

شده در زلزله بم معادل انفجار ۸۲۵ میلیون تن TNT بوده است.



❖ مثال: نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای حدود ۲۵ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده، ۲۴ میلی‌گرم باشد جدول زیر

تغییرات جرم نمونه پس از t سال را نشان می‌دهد.

با توجه به جدول جرم باقی مانده از این نمونه بعد از گذشت t سال از رابطه $m(t) = \frac{1}{2^t} (24) = 24 \times 2^{-t/25}$ به دست می‌آید.

بنابراین، به عنوان مثال جرم باقی مانده پس از ۴۰ سال برابر است با:

$$m(40) = 24 \left(2^{-\frac{40}{25}} \right) = 7/90 \text{ میلی‌گرم}$$

t (زمان بر حسب سال)	$m(t)$ (جرم بر حسب میلی‌گرم)
۰	۲۴
۲۵	$\frac{1}{2}(24) = 12$
۵۰	$\frac{1}{2^2} \times 24 = 6$
۷۵	$\frac{1}{2^3} \times 24 = 3$
۱۰۰	$\frac{1}{2^4} \times 24 = 1/5$

الف) $2 \log_{\epsilon}^m - \log_{\epsilon}^m - 2 = 0 \rightarrow \log_{\epsilon}^m = 2 \rightarrow m = 4 = 2^2$

ب) $\log_r \frac{12b-21}{b^2-3} = 2 \rightarrow \frac{12b-21}{b^2-3} = \epsilon \rightarrow 12b-21 = \epsilon b^2 - 12 \rightarrow \epsilon b^2 - 12b + 9 = 0 \rightarrow (b-3)^2 = 0$
 $\Rightarrow b = \frac{3}{\epsilon} = 3$

ج) $x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2}$ ✓

۹۰

تمرین

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\epsilon} m^2 - \log_{\epsilon} m - 3 = 0$

ب) $\log_{\epsilon} (12b - 21) - \log_{\epsilon} (b^2 - 3) = 2$

ب) $\log_{\epsilon} (x^2 - 1) = -1$

۲ الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ معکوس می‌آید. معکوس $t = m(t) = 2^t \rightarrow \log_2 t = t$ این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$ ، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟
 $m(t) = 2^t = 5000 \rightarrow \log_2 5000 = t \Rightarrow \log_{\epsilon} 5^{\epsilon} \times 2^{30} = t \Rightarrow \epsilon \log_{\epsilon} 5 + 30 \log_{\epsilon} 2 = t \Rightarrow \epsilon \log_{\epsilon} \frac{5}{2} + 30 = t \Rightarrow \epsilon (\log_{\epsilon} 5 - \log_{\epsilon} 2) + 30 = t$
 $\epsilon \times \frac{1}{\log_{\epsilon} 10} - 1 \times \epsilon + 30 = \frac{t}{\log_{\epsilon} 10} - \epsilon + 30 = \frac{t}{2.301} - \epsilon + 30 = t$

۳ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را بررسی کنید:
 الف) $a^{\log_b a} = a$ (الف) $(b \neq 1, a, b > 0)$ ✓
 ب) $\log x \log y = \log x + \log y$ (ب) ✗
 ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است. ✗

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.
 الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند، بیابید.
 ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۱ گرم کاهش می‌یابد؟
 $m(t) = 1 \times 2^{-\frac{t}{4}} = 2^{-\frac{t}{4}}$
 ب) $2^{-\frac{t}{4}} = 0.1 \rightarrow \log_2 2^{-\frac{t}{4}} = \log_2 0.1 \Rightarrow -\frac{t}{4} \log_2 2 = -2 \rightarrow -\frac{t}{4} = -2 \rightarrow t = 8$ سال

۵ عبارات زیر را ساده کنید. $(\log 2 = 0.301, \log 3 = 0.4771)$

الف) $\log_{\epsilon} (18 \times 375)$
 $\log_{\epsilon} 2 \times 3^2 \times 5^3 = \log_{\epsilon} 2 + 2 \log_{\epsilon} 3 + 3 \log_{\epsilon} 5$
 $0.301 + 2(0.4771) + 3(0.6990) = 0.301 + 0.9542 + 2.097 = 3.3522$

۶ گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با ✗ علامت بزنید.

✗ $\log 5 = \log 3 + \log 2$ ■ ✓ $\log_b a \times \log_a b = 1$ ■

۷ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

$m(t) = 128 \times 2^{-\frac{t}{30}}$
 $t = 300$
 $m(300) = 128 \times 2^{-\frac{300}{30}} = 128 \times 2^{-10} = 128 \times \frac{1}{1024} = \frac{128}{1024} = \frac{1}{8}$ جرم باقی‌مانده برابر ۳۰۰ سال