

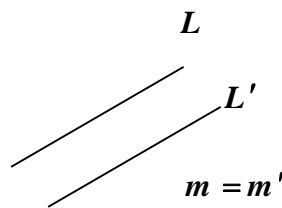
درسنامه آموزشی

مختصات نقطه و نوشتن معادله خط

نکته: معادله خطی به شیب m با عرض از مبدا h برابر است با: $y = mx + h$

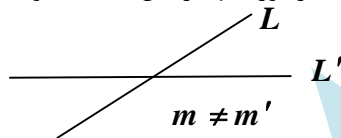
نکته: معادله خطی به شیب m که نقطه $A(x_1, y_1)$ می گذرد برابر است با: $y - y_1 = m(x - x_1)$

یادآوری: اگر A و B دو نقطه باشند شیب پاره خط AB برابر است با: $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ یا $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

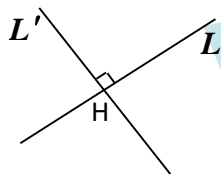


نکته: دو خط موازی شیب های برابر دارند.

نکته: اگر شیب خطوط برابر نباشد آن گاه دو خط یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند که مختصات نقطه برخورد آنها از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول بدست می آید.



نکته: اگر دو خط L و L' بر هم عمود باشند آنگاه شیب آنها معکوس و قرینه هم است.



(مثلاً $m = \frac{3}{4}, m' = -\frac{4}{3}$) یا به عبارت دیگر حاصل ضرب شیب آنها برابر -1 است:

$$mm' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

نکته: اگر طول از مبدا و عرض از مبدا خطی معلوم باشد می توان شیب را علاوه بر فرمول اصلی از رابطه زیر نیز بدست آورد:

$$m = -\frac{\text{عرض از مبدا}}{\text{طول از مبدا}} \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

$$\text{اثبات: } \begin{cases} \text{عرض از مبدا} = q \\ \text{طول از مبدا} = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0, q) \\ B(p, 0) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{0 - q}{p - 0} = -\frac{q}{p}$$

نکته: اگر خطی موازی محور x ها (افقی) باشد شیب آن $m = 0$ و معادله آن به صورت $y = y_0$ است.

نکته: اگر خطی موازی محور y ها (عمودی) باشد شیب آن تعریف نشده است و معادله آن به صورت $x = x_0$ است.

تست های آموزشی

۱- به ازای چه مقادیری از m نقطه $A(-2m, 3-m)$ بالای محور x ها و زیر خط نیمساز ربع دوم و چهارم قرار دارد؟

(۱) $-1 < m < 3$ (۲) $m < 3$ (۳) $1 < m < 3$ (۴) $-3 < m < 1$

۲- خطی که محور x ها را در نقطه ای به طول ۳ و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۲- قطع می کند، از کدام نقطه زیر می گذرد؟

(۱) $(1, \frac{4}{3})$ (۲) $(-1, \frac{4}{3})$ (۳) $(-3, 4)$ (۴) $(-3, -4)$

۳- خطی که از نقطه $(-1, 3)$ می گذرد و با خط $y + 2x = 5$ موازی است، محور x ها را با کدام طول قطع می کند؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) -۱

۴- کدام نقطه زیر روی خطی قرار دارد که از مبدا مختصات گذشته و بر خط به معادله $2y + 3x = 5$ عمود است؟

(۱) $(2, 3)$ (۲) $(2, -3)$ (۳) $(3, 2)$ (۴) $(3, -2)$

محاسبه مساحت مثلثی که یک خط با محورهای مختصات می سازد

نکته: هر خطی با طول از مبدا p ($y=0$) و عرض از مبدا q ($x=0$) مثلثی قائم الزاویه با محورهای مختصات می سازد که مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{1}{2} (ارتفاع \times قاعده) = \frac{1}{2} |p \times q|$$

قدر مطلق را گذاشتیم که مساحت منفی نشه!!!

۵- خطی که از نقاط $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ می گذرد با محورهای مختصات چه مساحتی می سازد؟ (آزاد غیر پزشکی ۸۰)

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{16}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{8}{3}$

۶- خطی با ضریب زاویه m از نقطه $(1, 2)$ گذشته و محورهای مختصات را در A و B قطع می کند، به ازای کدام مقدار m مساحت مثلث OAB برابر ۴ واحد مربع است؟ (ریاضی ۷۸)

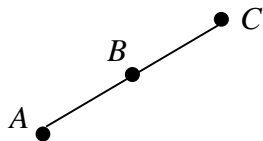
(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۳

۷- چند خط می توان رسم کرد که از نقطه $A(1, -3)$ گذشته و با محورهای مختصات در ناحیه اول، مثلثی به مساحت ۲ واحد مربع بسازد؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

سه نقطه روی یک خط راست (در یک راستا) (بر یک استقامت)

نکته: سه نقطه A, B, C وقتی روی یک خط راست قرار دارند یا به اصطلاح هم راستا (بر یک استقامت) هستند که شیب های دو به دوی آن ها یکی شود:



$$m_{AB} = m_{BC}$$

البته فرقی هم نمی کنه میشه گفت: $m_{AB} = m_{AC}$ یا

یه راه دیگه هم داره که با دو نقطه معادله خط را بنویسیم و نقطه سوم را در آن صدق دهیم که البته کمی وقت گیرتره!!

۸- به ازای کدام مقادیر a نقاط $(a, 3)$ و $(6, 4a+1)$ و مبدا مختصات در یک راستا قرار می گیرند؟ (تجربی خارج ۹۵)

$$2, \frac{-9}{4} \quad (4) \qquad -2, \frac{-3}{4} \quad (3) \qquad -2, \frac{3}{4} \quad (2) \qquad -2, \frac{9}{4} \quad (1)$$

۹- خطی که از نقاط $(a, 2a)$ و $(-3, 4)$ می گذرد محور x ها را در نقطه ای به طول ۱- قطع می کند مقدار a کدام است؟

$$\frac{1}{2} \quad (4) \qquad \frac{-1}{2} \quad (3) \qquad -2 \quad (2) \qquad 2 \quad (1)$$

وضعیت دو خط نسبت به هم

نکته: اگر $m_1 \neq m_2$ دو خط متقاطع اند که اگر حالت خاص $m_2 = \frac{-1}{m_1}$ یا همان $m_1 m_2 = -1$ رخ دهد دو خط متقاطع عمود بر هم هستند و مختصات نقطه تقاطع از حل دستگاه دو معادله و دو مجهول مربوطه بدست می آید.

نکته: اگر $m_1 = m_2$ یعنی شیب ها برابر باشند دو خط موازی اند، که می توانند موازی غیر منطبق یا منطبق بر هم باشند. منطبق بر هم یعنی با عملیات ساده سازی معادله دو خط دقیقاً یکی می شود.

روش دیگر مرسوم برای بررسی وضعیت دو خط نسبت به هم نکته زیر است که در واقع برگرفته از همان دو نکته بالا است در این روش ابتدا معادله خطوط را به فرم زیر مرتب می کنیم:

$$\begin{cases} ax + by + c = \cdot \\ a'x + b'y + c' = \cdot \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{دو خط متقاطع} : \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \\ \text{دو خط موازی} : \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \\ \text{غیر منطبق} \\ \text{دو خط منطبق} : \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \end{cases}$$

۱۰- خطوط $L_1: y = 2x + 1$ و $L_2: 6x + 3y = 5$ و $L_3: 6y + 3x = 5$ را در نظر بگیرید کدام گزینه درست است؟

(۱) L_1 و L_2 موازی اند. (۲) L_2 و L_3 بر هم عمود اند.

(۳) L_1 و L_2 بر هم عمود اند. (۴) L_2 و L_3 بر هم عمود اند.

۱۱- خط L موازی با خط $a y + 3x = a + 1$ و عمود بر خط $y = (a - 4)x + 2$ است، a کدام است؟

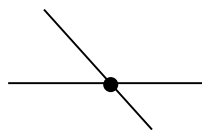
(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۶ (۴) -۶

۱۲- دو ضلع مقابل به هم یک متوازی الاضلاع روی خطوط $y = 2mx + m + 1$ و $(6 + m)x - my + 6 = 0$ واقع هستند، مقدار m کدام است؟

(۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

نقطه برخورد دو خط متقاطع

نکته: بای پیدا کردن نقطه تقاطع (برخورد) دو خط متقاطع کافی است معادلات آن دو خط را در یک دستگاه دو معادله و دو مجهول قرار دهیم و با یکی از روش های جایگزینی یا حذفی دستگاه مربوطه را حل کنیم.



نکته: مختصات نقطه برخورد دو خط، در معادله هر دو خط صدق می کند. چون روی هر دو خط قرار دارد.

۱۳- معادله خطی که از مبدا مختصات و محل برخورد دو خط به معادله های $2x + 3y + 8 = 0$ و $2x - 7y + 12 = 0$ می گذرد کدام است؟ (تجربی ۸۰)

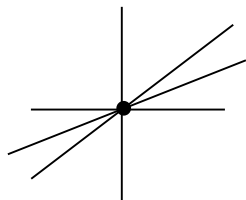
(۱) $2x + 23y = 0$ (۲) $4x + 19y = 0$ (۳) $4x + 15y = 0$ (۴) $5x + 11y = 0$

۱۴- عرض از مبدا خطی که بر خط به معادله $3y - x = 5$ عمود بوده و خط $y = 2x + 6$ را در نقطه ای به طول ۱- قطع می کند کدام است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۱ (۴) -۱

دسته خطوط

نکته: وقتی در معادله خطی علاوه بر متغیرهای اصلی x, y ، ضرایب مجهولی مانند m یا a یا b و ... وجود داشته باشد دیگر آن فقط یک خط نیست بلکه به ازای مقادیر مختلف m یا a یا b می توان معادله خطوط مختلفی نوشت. لذا به این گونه معادلات "دسته خطوط" می گوئیم.



تذکره: در مواردی که فقط یک اضافه در دسته خطوط وجود دارد. کلیه آن خطوط از نقطه ثابتی می گذرند که برای پیدا کردن معادله آن

نقطه ثابت می توان به مربوطه دو عدد دلخواه داد تا معادله دو خط بدست آید که از حل دستگاه آن دو نقطه برخورد بدست آید.

ترجیحاً ساده تر است عددی دهیم که ضرایب x یا y را صفر کند.

۱۵- دسته خطوط به معادلات $mx + (m+2)y = 6$ از نقطه ثابتی می گذرند ، مجموع طول و عرض این نقطه کدام است ؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) -۶

۱۶- یک خط از دسته خطوط به معادلات $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده بر دو نقطه $(2, -1), (8, 3)$ عمود است . معادله خط L کدام است ؟ (تجربی داخل ۸)

- (۱) $2y + 3x = 4$ (۲) $2y + 3x = 1$ (۳) $2y - 3x = -5$ (۴) $3y - 2x = -5$

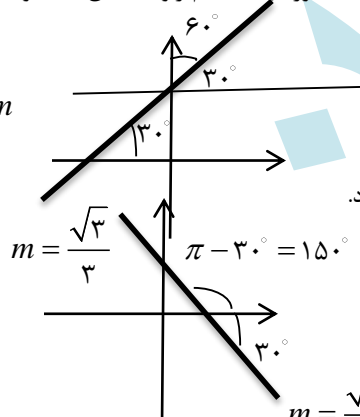
زاویه یک خط با محورهای مختصات و زاویه دو خط با یکدیگر

$\tan \theta = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

نکته: تانژانت زاویه یک خط با افق $(\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}})$ همان شیب خط است.

نکته: زاویه با سمت مثبت محور x ها نیز در واقع به نحوی زاویه با افق است و از رابطه بالا بدست می آید اما زاویه با محور y ها متمم زاویه با افق است و باید ابتدا زاویه با افق (یا محور x ها) را از رابطه $\tan \theta = m$ بدست آورد و سپس متمم آن را محاسبه کرد.

$\cot \alpha = m$



البته طبق قانون متمم می توان گفت اگر α زاویه خط با محور y ها باشد.

تذکر: اگر شیب خط منفی باشد، زاویه خط با سمت مثبت محور x ها یک زاویه منفرجه (یا حاده منفی) خواهد بود.

نکته: برای مشخص کردن زاویه بین دو خط متقاطع دو روش وجود دارد:

روش اول: اگر $m_1 = \tan \alpha, m_2 = \tan \beta$ ، شیب و زاویه هر خط با افق معلوم باشد می توان گفت زاویه بین 30° و خط قدر مطلق اختلاف زوایای دو خط با افق است.

$\theta = |\beta - \alpha|$ زاویه بین دو خط

دقت کنید اگر زاویه حاده بین دو خط مد نظر باشد و شما زاویه را منفرجه بدست آورده باشید باید مکمل آن را محاسبه کنید.

روش دوم: زاویه حاده بین دو خط با شیب های m_1, m_2 از رابطه زیر نیز بدست می آید.

$$\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

اثبات این رابطه از فرمول $\tan(\beta - \alpha)$ می باشد.

دقت کنید این رابطه برای موقعی است که در روش اول m_1, m_2 اعدادی باشند که تانژانت مرتبط با آن ها را حفظ نیستیم!! وگرنه همان روش اول ساده تر است.

۱۷- خط به معادله $\sqrt{3}y - x = 5$ محور y ها را با کدام زاویه قطع می کند؟

$\frac{2\pi}{3}$ (۴)

$\frac{\pi}{4}$ (۳)

$\frac{\pi}{3}$ (۲)

$\frac{\pi}{6}$ (۱)

۱۸- خطی با سمت مثبت محور x ها زاویه 135° درجه می سازد و خط به معادله $y = 2x - 1$ را در نقطه ای به طول $\sqrt{2}$ قطع می کند، معادله این خط کدام است؟

$y + x = 5$ (۴)

$y + 2x = 7$ (۳)

$x - y = 1$ (۲)

$y + x = 1$ (۱)

۱۹- زاویه حاده بین دو خط $y + \sqrt{3}x = 2$, $y = x + 1$ در نقطه برخورد آنها کدام است؟

75° (۴)

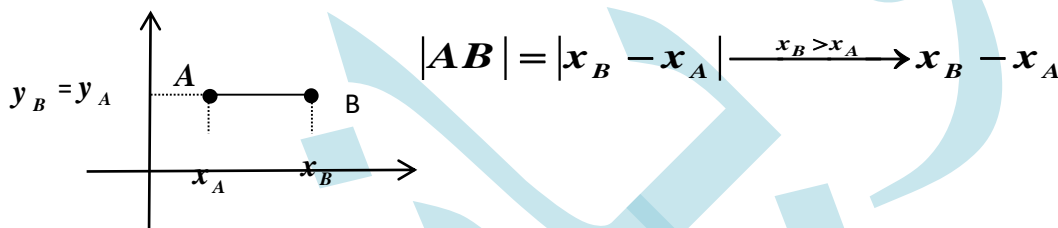
15° (۳)

45° (۲)

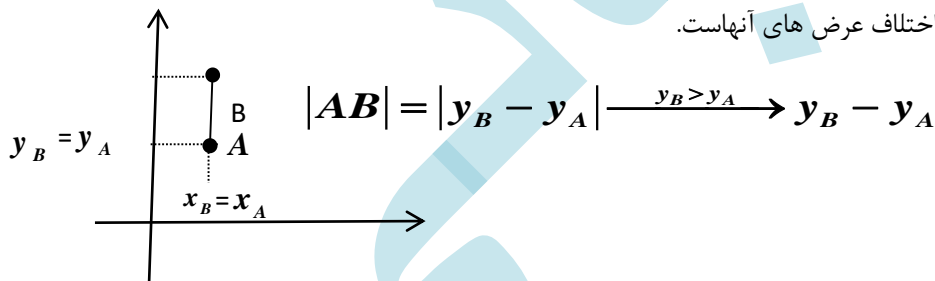
30° (۱)

فاصله دو نقطه از هم

الف: فاصله دو نقطه افقی (هم عرض) برابر اختلاف طول های آنهاست.



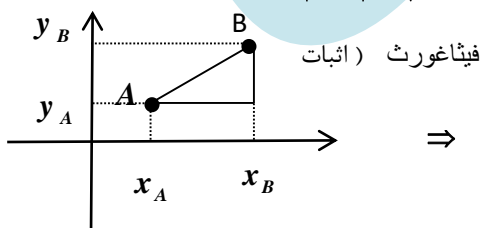
ب: فاصله دو نقطه عمودی (هم طول) برابر اختلاف عرض های آنهاست.



ج: اگر A و B دو نقطه در فضای دو بعدی باشند آنگاه فاصله دو نقطه از هم برابر است با:

$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

$|AB| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$



$\Rightarrow |AB|^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 \Rightarrow |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

۲۰- دسته خطوط به معادله $(m+3)x + (2m-1)y = 7$ به ازای هر مقدار m از نقطه ی ثابتی می گذرند. فاصله ی این نقطه ثابت از نقطه $(-1, 1)$ کدام است؟ (آزمایش سنجش)

- (۱) $\sqrt{13}$ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{5}$

۲۱- فاصله نقطه $A(1-a, a-2)$ تا مبدا مختصات برابر ۵ است، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- (۱) $\{-2, -5\}$ (۲) $\{2, 5\}$ (۳) $\{-2, 5\}$ (۴) $\{2, -5\}$

۲۲- نقطه ایی با طول منفی روی محور x ها که فاصله اش تا نقطه $(-1, 3)$ برابر ۵ باشد کدام است؟

- (۱) $(-3, 0)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(-4, 0)$ (۴) $(-5, 0)$

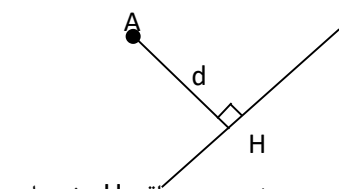
۲۳- چند نقطه روی خط $y = x + 4$ می توان یافت که مجموع فواصل آن از دو نقطه $A(1, -2), B(-1, 1)$ برابر $\sqrt{8}$ باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

فاصله نقطه از خط

نکته: فاصله نقطه $A(x, y)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

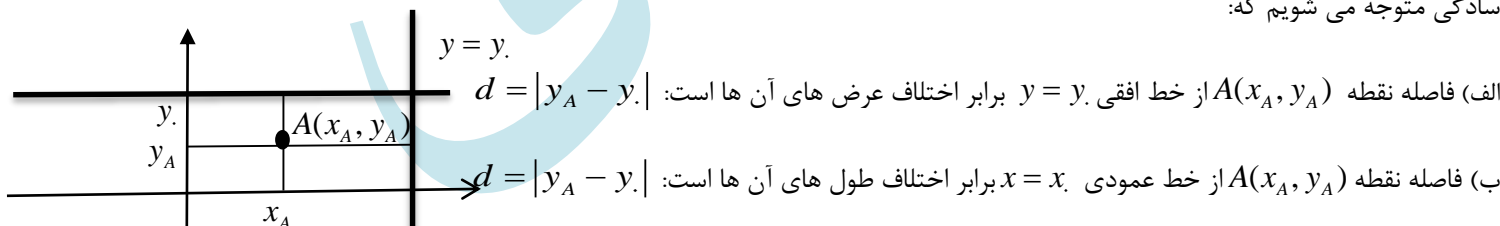
$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



تذکر: منظور از فاصله در نکته فوق، همان کمترین فاصله ی نقطه از خط می باشد که از نقطه A بر خط عمود رسم می شود. در واقع H مختصات پای عمود یا همان تصویر نقطه A روی خط است.

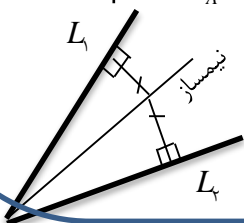
نتیجه: فاصله مبدا مختصات $O(0, 0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با: $d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

نکته: در مورد فاصله یک نقطه از خطی موازی یکی از محور x ها (افقی یا عمودی) از فرمول بالا استفاده نمی کنیم چرا که توجه به شکل مقابل به سادگی متوجه می شویم که:



نکته: فاصله هر نقطه روی نیمساز دو خط از آن دو خط به یک فاصله است.

نکته: فاصله نقطه ای روی نیمساز های ناحیه های محورهای مختصات فاصله ای برابر از هر دو محور دارد.



۲۴- فاصله نقطه $p(7, -4)$ از خط به معادله $2x + y = 5$ کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۵ (۲) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{5}$

۲۵- مجموع فواصل نقطه $A(-1, -3)$ از خطوط $L_1: x = -4$, $L_2: y = 0$ کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۶- دو نقطه بر خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارد که فاصله ی این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است.

طول این دو نقطه کدام است؟ (تجربی داخل ۸۹)

- (۱) ۹ و ۱۵ (۲) ۱۱ و ۱۵ (۳) ۱۱ و ۱۵ (۴) ۹ و ۱۱

۲۷- فاصله مبدا مختصات از خطی گذرنده از $(2, 1)$ برابر $\sqrt{5}$ است. شیب این خط کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) ۲ (۴) -۲

۲۸- به ازای کدام مقدار a نقطه $A(a, 1)$ می تواند روی یکی از نیمساز هایی باشد که دو خط $L_1: x = -2$, $L_2: 3y + 4x = 1$ با هم می سازند؟

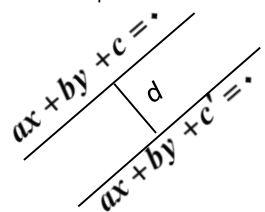
- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $-\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $-\frac{4}{3}$

فاصله دو خط موازی از هم و معادله خطی وسط بین دو خط موازی

الف: فاصله دو خط افقی برابر اختلاف عرض های آنهاست. $d = |y_2 - y_1|$

ب: فاصله دو نقطه عمودی (قائم) برابر اختلاف طول های آنهاست. $d = |x_2 - x_1|$

ج: فاصله دو خط موازی: $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



تذکره: در حالت ج باید ضرایب x و y در هر دو خط با ضرب یا تقسیم در یک عدد مناسب یکسان شوند.

نکته: برای محاسبه فاصله دو خط موازی روش دیگر این است که فاصله یک نقطه دلخواه از یک خط را از خط دیگر با فرمول

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

بدست آوریم.

نکته: معادله خطی وسط دو خط موازی: $ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$

۲۹- فاصله دو خط به معادلات $5x - 12y + 8 = 0$, $-10x + 24y + 10 = 0$ کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $2\sqrt{2}$

۳۰- فاصله دو خط موازی $y = 3x + 2$, $(m + 4)x - my = m + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{7}{\sqrt{10}}$ (۳) $\frac{1}{2\sqrt{10}}$ (۴) $\frac{7}{2\sqrt{10}}$

۳۱- نقطه $(m - 1, m)$ از دو خط به معادلات $y = 2x - 1$, $3y - 6x - 4 = 0$ به یک فاصله است. m کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{6}$ (۲) $-\frac{13}{6}$ (۳) $\frac{11}{6}$ (۴) $-\frac{11}{6}$

۳۲- معادله خطی که با خط $3y - 4x + 2 = 0$ موازی و به فاصله ۲ واحد از آن است، کدام می تواند باشد؟

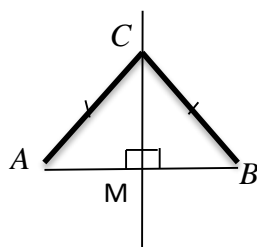
- (۱) $y = \frac{4}{3}x + 8$ (۲) $y = \frac{4}{3}x - 8$ (۳) $y = \frac{4}{3}(x + 2)$ (۴) $y = \frac{4}{3}(x - 2)$

مختصات نقطه وسط دو نقطه دیگر و معادله عمود منصف یک پاره خط

نکته: مختصات نقطه وسط بین دو نقطه $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ به صورت $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$ است.

نکته: عمود منصف پاره خط AB عمود بر آن بوده و از وسط آن می گذرد.

پس برای نوشتن معادله عمود منصف کافی است نقطه M وسط A, B استفاده کنیم و شیب را معکوس و قرینه شیب AB در نظر بگیریم.



$$CA = CB$$

نکته: هر نقطه ای روی عمود منصف، فاصله ای برابر از دو سر پاره خط AB دارد.

۳۳- فاصله مبدا مختصات از وسط پاره خط AB , $A(14, 3)$, $B(10, -13)$ کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۳۴- معادله عمود منصف پاره خطی که دو سر آن $A(4, 3)$, $B(2, -3)$ می باشد کدام است؟

- (۱) $3y + x = 4$ (۲) $3y + x = 3$ (۳) $3x + y = 9$ (۴) $3x - y = 9$

۳۵- نقطه $A(-2, -1)$ و نقطه B روی محور X ها قرار دارد. اگر $C(1, 3)$ نقطه ای روی عمود منصف پاره خط AB باشد، طول نقطه B کدام می تواند باشد؟

۴ (۴)

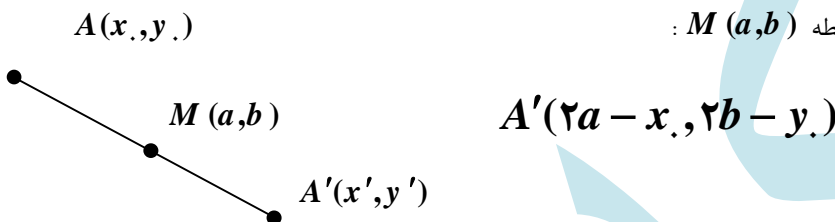
-۳ (۳)

۳ (۲)

-۵ (۱)

قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر

نکته: قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به نقطه $M(a, b)$:



$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x + x'}{2} \Rightarrow x' = 2a - x \\ b = \frac{y + y'}{2} \Rightarrow y' = 2b - y \end{cases}$$

M وسط A و A' است. : اثبات

۳۶- A' قرینه نقطه $A(1, -2)$ نسبت به نقطه $M(-2, 3)$ فاصله نقطه A' از نیمساز ربع اول و سوم کدام است؟

$5\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

۳۷- نقطه $N(5, -4)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه $A, B(7, -2)$ است. مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟ (کتاب درسی)

-۴ (۴)

۳ (۳)

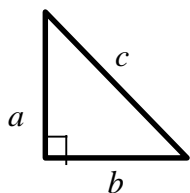
۹ (۲)

-۳ (۱)

هندسه تحلیلی در مثلث

تشخیص نوع مثلث

نکته: اگر $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ سه رأس یک مثلث باشند. برای تشخیص نوع مثلث کافی است ابتدا طول اضلاع AB, AC, BC را بدست آوریم و با هم مقایسه کنیم.



تذکره: اگر قضیه فیثاغورث بین طول اضلاع برقرار باشد، مثلث قائم الزاویه است.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \begin{cases} c = \sqrt{a^2 + b^2} \\ b = \sqrt{c^2 - a^2} \end{cases}$$

فیثاغورث

مساحت مثلث قائم الزاویه $s = \frac{1}{2} ab$

مساحت مثلث متساوی الاضلاع $s = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \rightarrow$ چرا؟

۳۸- مثلث با رئوس $C(4,1), B(2,5), A(1,2)$ چگونه است؟ (کتاب درسی)

- (۱) متساوی الاضلاع (۲) متساوی الساقین (۳) فقط قائم الزاویه (۴) متساوی الساقین و قائم الزاویه

۳۹- مثلث با رئوس $C(a, \sqrt{12}), B(2a, 0), A(0, 0)$ متساوی الاضلاع است. مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) $8\sqrt{3}$

۴۰- سه ضلع یک مثلث بر خطوط به معادلات $y + x = 4, y = 2x + 1, 2y + x + 3 = 0$ واقع است. نوع این مثلث کدام است؟

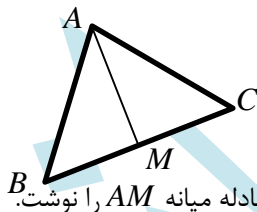
- (۱) متساوی الاضلاع (۲) فقط متساوی الساقین (۳) فقط قائم الزاویه (۴) متساوی الساقین و قائم الزاویه

۴۱- مثلث ABC با رئوس $C(3-a, -a), B(1, 2), A(2, 5)$ در رأس B قائمه و متساوی الساقین می باشد. a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) -۱

میانه های یک مثلث

نکته: میانه نظیر رأس A در مثلث ABC خطی است که از رأس A به وسط ضلع BC وصل می شود و آن را با AM نشان می دهیم:



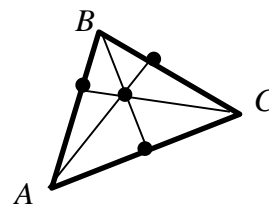
به همین ترتیب میانه های BM و CM را می توان رسم کرد.

نکته: با داشتن دو نقطه A, M می توان طول میانه AM بدست می آید و هم می توان معادله میانه AM را نوشت.

تذکر: مختصات M وسط BC هم در معادله میانه AM و هم در معادله BC صدق می کند.

نکته: میانه های یک مثلث هم رأس هستند یعنی در یک نقطه متقاطع اند که آن نقطه مرکز ثقل مثلث نیز است و از میانگین سه رأس بدست می آید:

محل برخورد میانه های مثلث (مرکز ثقل مثلث) $G(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3})$



۴۲- مثلث با رأس های $C(7, 11), B(3, 1), A(1, 9)$ را در نظر بگیرید طول میانه AM کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۲۵ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۴۳- در مثلث سؤال قبل معادله میانه AM کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) $4y + 3x = 29$ (۲) $4y + 3x = 39$ (۳) $4y - 3x = 11$ (۴) $3y - 4x = -2$

۴۴- فاصله محل برخورد میانه های مثلث با رئوس $A(3, 1), B(-1, 2), C(1, 3)$ از مبدا مختصات کدام است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

۴۵- دو نقطه $B(a-2, a+2), A(a, a+4)$ دو رأس از مثلث ABC هستند. اگر میانه CM منطبق بر خط $x+2y=1$ باشد، a کدام است؟

-۲ (۴)

$-\frac{4}{3}$ (۳)

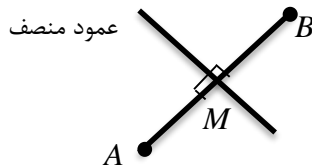
۲ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

عمود منصف های یک مثلث

نکته: عمود منصف های اضلاع یک مثلث در یک نقطه متقاطع اند پس با داشتن معادله دو عمود منصف می توان محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث را بدست آورد.

یادآوری: برای محاسبه عمود منصف یک پاره خط کافی است نقطه وسط آن پاره خط را مشخص کرده و شیب عمود منصف و معکوس و قرینه شیب آن پاره خط در نظر بگیریم.



۴۶- در مثلث ABC با رئوس $A(-1, 2), B(2, -4), C(3, 2)$ مجموع طول و عرض نقطه محل برخورد عمود منصف های این مثلث کدام است؟

۸/۵ (۴)

۷/۵ (۳)

۶/۵ (۲)

۵/۵ (۱)

۴۷- در مثلث ABC با رأس های $A(a, b+5), B(b, -2a), C(-5, 2)$ ، معادله عمود منصف ضلع AB به صورت $x+3y=3$ است. مقدار b کدام است؟

-۲ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

ارتفاع های وارد بر اضلاع یک مثلث

نکته: در مثلث ABC با نوشتن معادله ضلع BC، فاصله رأس A تا ضلع BC طبق فرمول $d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ همان طول ارتفاع AH است.

نکته: برای محاسبه معادله خط ارتفاع AH می توان ابتدا شیب ضلع BC را با معلوم بودن دو رأس B و C بدست آورد و سپس شیب AH که معکوس و قرینه شیب BC است را مشخص کرد. (عمود بر هم) با داشتن m_{AH} و مختصات رأس A معادله ارتفاع AH بدست می آید.

نکته: برای محاسبه مختصات پای عمود (H) در ارتفاع AH کافی است معادله ارتفاع AH و معادله ضلع BC را در یک دستگاه مختصات برخورد داده و جواب دستگاه را بدست آوریم که همان مختصات نقطه برخورد است. از برخورد معادلات میانه AM و ارتفاع AH مختصات رأس A بدست می آید.

۴۸- در مثلث ABC با رئوس $A(1, 2), B(2, -2), C(-2, -5)$ معادله ارتفاع AH کدام است؟

$$(1) \quad 4x + 3y = \frac{-21}{2} \quad (2) \quad 4x + 3y = 10 \quad (3) \quad 4y - 3 = 5 \quad (4) \quad 3y - 4x = 2$$

۴۹- در مثلث سؤال قبل طول ارتفاع AH چقدر است؟

$$(1) \quad \frac{19}{5} \quad (2) \quad \frac{9}{5} \quad (3) \quad \frac{6}{5} \quad (4) \quad \frac{17}{5}$$

۵۰- در مثلث سؤال قبل طول پای عمود در ارتفاع AH کدام است؟

$$(1) \quad \frac{50}{19} \quad (2) \quad \frac{60}{19} \quad (3) \quad \frac{70}{19} \quad (4) \quad \frac{80}{19}$$

۵۱- سه ضلع یک مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3, AC: y - 2x = 5, BC: 2y + 3x = 6$ هستند، معادله ارتفاع AH از مثلث مفروض کدام است؟ (تجربی خارج ۸۹)

$$(1) \quad 6y - 4x = 15 \quad (2) \quad 9y - 6x = 17 \quad (3) \quad 3y - 2x = 7 \quad (4) \quad 3y + 2x = 9$$

محاسبه مساحت مثلث با معلوم بودن مختصات سه رأس

روش اول: می توان طول ارتفاع AH را طبق فاصله رأس A تا ضلع BC بدست آورد و طول ضلع BC را نیز محاسبه کرد و طبق فرمول ارتفاع \times قاعده $S = \frac{1}{2} \times$ مساحت مثلث را بیابیم.

روش دوم: استفاده از فرمول زیر: $S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$

این روش در واقع برگرفته از اعمال جبری در جدول مقابل است، که پیشنهاد می شود به جای حفظ کردن فرمول بالا روش ماتریسی زیر را استفاده کنید.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_A & y_A \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - y_A x_B - y_B x_C - y_C x_A|$$

روش سوم: اگر طول اضلاع مثلث را به صورت اعدادی گویا داشته باشیم، می توانیم از قضیه هرون مساحت را محاسبه کنیم:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow P = \frac{a+b+c}{2} \text{ نصف محیط}$$

۵۲- مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $C(0, 2), B(3, 0), A(2, 5)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۷/۵ (۴)

۷ (۳)

۶/۵ (۲)

۶ (۱)

۵۳- مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوط به معادله $y + x = 2, y - x = 4$ است و ضلع سوم آن بر خط $y = -1$ واقع می باشد، کدام است؟

$\frac{27}{2}$ (۴)

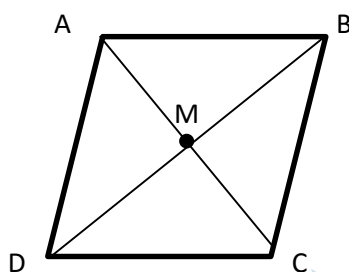
$\frac{9}{2}$ (۳)

۲۷ (۲)

۹ (۱)

هندسه تحلیلی در متوازی الاضلاع

نکته: هر متوازی الاضلاع (از جمله مستطیل و مربع) قطرهایکدیگر را نصف می کنند. پس محل برخورد قطرهای وسط دو رأس مقابل به هم است:



$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

رئوس مقابل به هم

نتیجه: با معلوم بودن مختصات سه رأس از یک متوازی الاضلاع (مستطیل یا مربع) می توان مختصات رأس چهارم آن را با توجه به نکته بالا بدست آورد.

نکته: مساحت متوازی الاضلاع دو برابر مساحت مثلث است. پس با معلوم بودن سه رأس از متوازی الاضلاع می توان مساحت مثلث مربوطه را بدست آورد و دو برابر کرد.

۵۴- نقاط $C(-2, 2), B(2, 5), A(-1, 3)$ سه رأس متوازی الاضلاع ABCD هستند، مجموع طول و عرض رأس D کدام است؟

-۵ (۴)

۵ (۳)

-۶ (۲)

۶ (۱)

۵۵- محیط متوازی الاضلاع سؤال قبل کدام است؟

$8 + 2\sqrt{13}$ (۴)

$4 + \sqrt{13}$ (۳)

$10 + 2\sqrt{13}$ (۲)

$5 + \sqrt{13}$ (۱)

۵۶- مساحت متوازی الاضلاع سؤال ۵۴ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۵۷- نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ ، $3y + 4x = 8$ می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ (تجربی داخل ۹۰)

- (۱) (۱, ۵) (۲) (۳, ۴) (۳) (۳, ۵) (۴) (۴, ۳)

هندسه تحلیلی در مستطیل

نکته: مستطیل نوعی متوازی الاضلاع است که قطرها یکدیگر را نصف می کنند پس می توان با معلوم بودن مختصات سه رأس، مختصات رأس چهارم را بدست آورد.

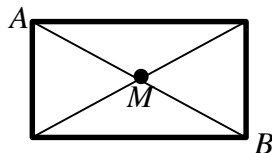
$$x_A + x_C = x_B + x_D, y_A + y_C = y_B + y_D$$

نکته: اگر مختصات سه رأس مجاور هم در مستطیل معلوم باشد بدون نیاز به مختصات رأس چهارم مساحت مستطیل و محیط آن بدست می آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{طول} = AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ \text{عرض} = AC = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{array} \right.$$

(عرض + طول) $P = 2$ محیط مستطیل ، $S =$ مساحت مستطیل = عرض \times طول

نکته: از آن جا که در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می کنند پس با داشتن دو رأس مقابل هم می توان وسط آن قطر (محل برخورد قطرها) را بدست آورد.



نکته: دو ضلع مقابل به هم مستطیل موازی غیر منطبق با یکدیگر (شیب برابر) و دو ضلع مجاور مستطیل عمود بر هم اند (شیب ها معکوس و قرینه) که محل برخورد دو ضلع مجاور یک رأس مستطیل را مشخص می کند.

تذکر: وقتی مختصات سه رأس مستطیل بدون نامگذاری و ترتیب داده شده است حتماً با توجه به رسم شکل و الزام قائمه بودن زاویه ها ابتدا مشخص کنید که رئوس داده شده مجاور یا مقابل هم اند سپس به ادامه حل مسئله بپردازید.

۵۸- نقاط $(0, 0)$ ، $(-1, 1)$ و $(3, 3)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت این مستطیل کدام است؟ (آزاد غیر پزشکی ۸۰)

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۹

۵۹- دو ضلع غیر موازی یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + ax = 3$ ، $y = 2x - a$ و یک رأس آن $(-3, -2)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟ (مشابه تجربی خارج ۹۰)

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) $6\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{5}$

۶۰- در مستطیل سؤال قبل مختصات محل برخورد قطرهای مستطیل کدام است؟

- (۱) (۱, ۱) (۲) (-۱, -۱) (۳) $(-۱, \frac{1}{2})$ (۴) $(-۱, -\frac{1}{2})$

هندسه تحلیلی در مربع

چند نکته مهم در مورد مربع:

(۱) در مربع طول اضلاع برابر و برهم عمودند. از طرفی قطرهای مربع نیز برهم عمودند و یکدیگر را نصف می کنند پس می توان با معلوم بودن مختصات سه رأس، رأس چهارم را نیز بدست آورد. حتی با معلوم بودن مختصات دو رأس هم می توان دو رأس دیگر را مشخص کرد.

(۲) فاصله ی دو رأس مجاور هم مربع برابر طول ضلع مربع را است.
 $(\text{طول ضلع مربع})^2 = \text{مساحت مربع}$
 $\text{محیط مربع} = 4 \times (\text{طول ضلع مربع})$

(۳) اگر مختصات دو رأس مقابل به هم معلوم باشد آنگاه فاصله دو رأس از هم طول قطر مربع است.

(۴) فاصله یک رأس از ضلع مقابل همان طول ضلع مربع است.
 $\text{مساحت مربع} = \frac{(\text{طول قطر})^2}{2}$
 $\text{طول قطر مربع} = \text{طول ضلع} \times \sqrt{2}$
 $\text{طول ضلع مربع} = \frac{\text{طول قطر}}{\sqrt{2}}$
 (۵) مربع نوعی متوازی الاضلاع است یعنی ضلع های روبرو هم موازی هستند و فاصله دو ضلع مقابل به هم برابر طول ضلع مربع است.

۶۱- هرگاه نقاط $A(-۱, ۲), B(۲, -۲)$ دو رأس مجاور هم یک مربع باشند، آنگاه محیط مربع برابر کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

۶۲- یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(۳, ۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع کدام است؟ (کتاب درسی)

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $4\sqrt{5}$ (۳) ۵ (۴) ۱۰

۶۳- نقاط $(۵, -۲), (-۲, -۱)$ دو رأس مقابل به هم یک مربع هستند. محیط این مربع کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲۰ (۳) ۱۰ (۴) $\sqrt{5}$

۶۴- یکی از قطرهای مربعی بر خط $y + 3x = -5$ واقع است. اگر $A(1, 5)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع کدام است؟

۶/۵ (۴)

۵۲ (۳)

۱۳ (۲)

۲۶ (۱)

۶۵- نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۴۵ (۲)

۴۰ (۱)

۶۶- دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$, $y = x + 1$ هستند. مساحت این مربع کدام است؟ (تجربی داخل ۹۱)

$\frac{25}{4}$ (۴)

$\frac{25}{8}$ (۳)

$\frac{9}{8}$ (۲)

$\frac{9}{4}$ (۱)

۶۷- نقاط $A(5, 1)$, $B(10, 4)$ دو رأس مجاور هم مربع ABCD هستند معادله خطی که ضلع AD روی آن واقع است، کدام است؟ (کتاب درسی)

$3x - 5y = 8$ (۴)

$3x - 5y = 10$ (۳)

$5x + 3y = 28$ (۲)

$5x + 3y = 18$ (۱)

۶۸- نقاط $(-1, -4)$, $(5, -2)$ دو رأس مقابل به هم مربعی هستند. کدام گزینه می تواند معادله خطی باشد که قطری از این مربع روی آن واقع است؟

$y + 3x = 3$ (۴)

$y - 3x + 9 = 0$ (۳)

$y - 3x + 3 = 0$ (۲)

$3y - x = 11$ (۱)

۶۹- دو ضلع مقابل به هم یک مربع روی خطوط $2x - my = 1$, $(m-1)x + 2my = 5$ واقع هستند، طول قطر این مربع کدام است؟ ($m \neq 0$)

$\frac{14}{\sqrt{26}}$ (۴)

$\frac{14}{\sqrt{13}}$ (۳)

$\frac{7}{\sqrt{13}}$ (۲)

$\frac{7}{\sqrt{26}}$ (۱)

۷۰- دو ضلع مقابل به هم مربعی روی دو خط به معادلات $y = ax + \frac{5}{4}$, $4x - 8y = b$ قرار دارند. اگر مساحت این مربع $\frac{1}{8}$ واحد مربع باشد. مقدار مثبت

$a+b$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

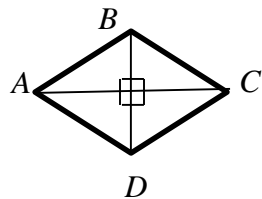
$\frac{5}{2}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

هندسه تحلیلی در لوزی

نکته: لوزی نوعی متوازی الاضلاع است که چهار ضلع آن برابرند و قطرهای نیز عمود منصف یکدیگرند پس در لوزی نیز با معلوم بودن مختصات سه رأس، رأس چهارم بدست می آید.



نکته: فاصله دو رأس مجاور هم در لوزی، برابر طول اضلاع است: طول ضلع $\times 4 =$ محیط لوزی

نکته: اگر سه رأس یک لوزی معلوم باشد و بخواهیم مساحت آن را بدست آوریم دو روش وجود دارد:

روش اول: مساحت مثلثی که سه رأس می سازند را طبق روش های گفته شده در قبل بدست می آوریم و آن را دو برابر می کنیم.

روش دوم: با رسم شکل ترتیب قرارگیری رئوس را مشخص کرده و با مشخص کردن مختصات رأس چهارم، طول قطرهای (فاصله رئوس مقابل به هم) را بدست می آوریم:

(حاصل ضرب دو قطر) $\times \frac{1}{2} =$ مساحت لوزی

۷۱- نقاط $(2, -2), (-1, 2)$ دو رأس مجاور هم یک لوزی اند. محیط این لوزی کدام است؟

- ۵(۱)
- ۱۰ (۲)
- ۲۰ (۳)
- ۲۵ (۴)

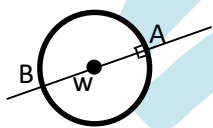
۷۲- اگر $A(3, 4), B(-1, 2)$ دو رأس مقابل به هم لوزی ABCD باشند معادله خطی که رئوس C و D بر آن واقع اند کدام است؟

- ۱) $y + 2x + 5 = 0$
- ۲) $y + 2x = 5$
- ۳) $2y + x = 7$
- ۴) $y - 2x = 1$

۷۳- نقاط $(-2, -1), (4, -1), (1, -2)$ سه رأس یک لوزی اند مساحت این لوزی کدام است؟

- ۲(۱)
- ۳ (۲)
- ۶(۳)
- ۱۲ (۴)

هندسه تحلیلی دایره: محاسبه شعاع دایره با معلوم بودن مرکز یا قطر و نقاط معلومی از آن



۱) شعاع ها یا قطرهای دایره از مرکز دایره می گذرند و بر دایره عمود (قائم) هستند .

۲) مختصات مرکز دایره در معادله قطر دایره صدق می کند .

۳) محل برخورد قطرهای دایره همان مرکز دایره است یعنی با داشتن معادله دو قطر و حل دستگاه ، مختصات مرکز دایره بدست می آید .

۴) اگر مختصات دو سر قطر AB معلوم باشد مختصات مرکز دایره همان وسط دو سر قطر است: $w = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$

۵) فاصله مرکز دایره تا هر نقطه ای روی دایره برابر شعاع آن دایره است.

۶) با معلوم بودن دو نقطه و معادله یک قطر از دایره می توان مرکز و شعاع دایره را بدست آورد.(تست ۷۸)

۷) با معلوم بودن سه نقطه روی دایره می توان مرکز و شعاع دایره را بدست آورد. (تست ۷۷)

۷۴- دایره ای به مرکز $W(-1, 2)$ از نقطه $A(2, 3)$ می گذرد، مساحت این دایره کدام است؟ (کتاب درسی)

20π (۴)

10π (۳)

$\sqrt{10}\pi$ (۲)

$2\sqrt{10}\pi$ (۱)

۷۵- دو نقطه $B(6, 4), A(2, -2)$ دو سر قطری از دایره اند، مرکز و شعاع این دایره کدام اند؟ (کتاب درسی)

$R = 2\sqrt{13}, W = (4, 2)$ (۲)

$R = \sqrt{13}, W = (4, 1)$ (۱)

$R = \sqrt{13}, W = (4, 2)$ (۴)

$R = 2\sqrt{13}, W = (4, 1)$ (۳)

۷۶- دسته خطوط به معادله $mx - (m+2)y = m+4$ بر دایره ای عموداند، اگر این دایره از نقطه $p(2, 2)$ بگذرد، شعاع این دایره کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۴)

۱۰ (۳)

۵ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

۷۷- شعاع دایره ای گذرا بر سه نقطه $(0, 0), (2, 1), (1, -2)$ برابر کدام است؟ (تجربی داخل ۹۳)

$\frac{1}{2}\sqrt{13}$ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}\sqrt{10}$ (۱)

۷۸- دایره ای محور X ها را در دو نقطه به طول های ۱ و ۳ قطع می کند و مرکز آن روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵ و مشابه تجربی خارج ۹۰)

۳ (۴)

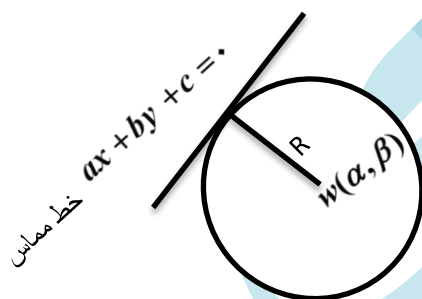
$\sqrt{5}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

خطوط مماس و قائم بر یک دایره

نکته: شعاع دایره بر خط مماس بر دایره در نقطه تماس با دایره عمود است پس اولاً شیب شعاع (یا قطر) معکوس و قرینه شیب خط مماس بر دایره در آن نقطه تماس است. ثانیاً فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره همان اندازه شعاع است.



نکته: اگر معادله دو مماس و موازی هم در دایره ای معلوم باشد فاصله دو خط موازی طول قطر دایره است

از طرفی خط وسط بین دو خط موازی و مماس بر دایره از مرکز دایره گذشتهدو قطری از دایره است.

۷۹- خط $L: y = \frac{3}{4}x$ بر دایره ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. طول قطر این دایره کدام است؟ (کتاب درسی)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۸۰- معادله خط مماس بر دایره ای به مرکز $W(-1, 2)$ در نقطه $(-3, 1)$ روی آن کدام است؟

- ۱ (۱) $y + 2x = 0$ ۲ (۲) $y + 2x = 5$ ۳ (۳) $y - 2x = 5$ ۴ (۴) $y + 2x + 5 = 0$

۸۱- دایره ای به مرکز $(-1, 2)$ و شعاع ۵ مفروض است. معادله خط مماس بر این دایره در نقطه ای به طول ۲ واقع در ربع چهارم روی دایره، کدام است؟

- ۱ (۱) $4y - 3x = 12$ ۲ (۲) $3y + 4x = 2$ ۳ (۳) $4y + 3x + 14 = 0$ ۴ (۴) $4y - 3x + 14 = 0$

۸۲- در سؤال قبل معادله خط قائم بر دایره در نقطه مذکور کدام است؟

- ۱ (۱) $4y - 3x = 12$ ۲ (۲) $3y + 4x = 2$ ۳ (۳) $3y - 4x + 14 = 0$ ۴ (۴) $3y + 4x + 2 = 0$

۸۳- خط $y = mx + 2$ بر دایره ای به مرکز $(1, 0)$ و شعاع ۲ مماس است مقدار m کدام می تواند باشد؟

- ۱ (۱) $\frac{4}{3}$ ۲ (۲) $-\frac{4}{3}$ ۳ (۳) $\frac{3}{4}$ ۴ (۴) $-\frac{3}{4}$

۸۴- دایره ای گذرا بر مبداء مختصات، بر دو خط به معادلات $y = 2x$, $y = 2x + 1$ مماس است. مختصات مرکز این دایره کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

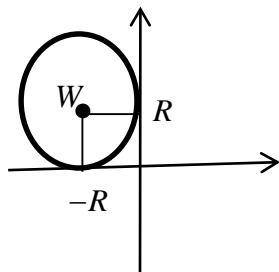
- ۱ (۱) $(-3, 2)$ ۲ (۲) $(-3, 1)$ ۳ (۳) $(-2, 1)$ ۴ (۴) $(-1, 2)$

۸۵- نیمساز ربع اول قطری از دایره است. اگر این دایره از نقطه $A(6, 3)$ گذشته و بر خط $y = 2x$ مماس شود، شعاع آن کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۲)

- ۱ (۱) $\sqrt{10}$ ۲ (۲) $\sqrt{6}$ ۳ (۳) $2\sqrt{2}$ ۴ (۴) $\sqrt{5}$

دایره هایی مماس بر یک یا هر دو محورهای مختصات

نکته: مرکز دایره ای به شعاع R که بر هر دو محور مختصات مماس است بر حسب R نوشته می شود که بستگی به این دارد در

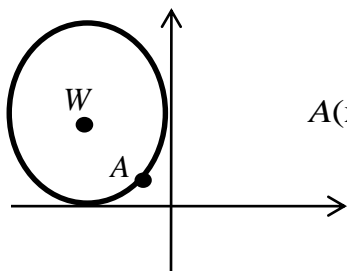


کدام ناحیه بر محورهای مختصات مماس باشد. مثلاً اگر دایره در ناحیه دوم بر محورهای مماس باشد آن گاه مرکز

$$\text{ناحیه دوم} \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow w(-R, R)$$

تذکره: همواره دایره وجود دارد که از نقطه $A(x, y)$ گذشته و در آن ناحیه مربوطه بر هر دو محور مختصات مماس باشد.

با توجه به نکته بالا می توان با در نظر گرفتن فاصله مرکز (بر حسب $\pm R$) تا نقطه ای معلوم روی دایره شعاع R را بدست آورد.



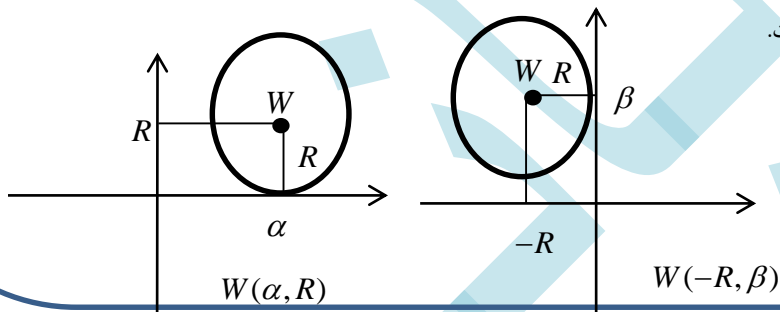
در ناحیه دوم
مماس بر محورها

$$A(x, y) \rightarrow w(-R, R) \Rightarrow \sqrt{(x+R)^2 + (y-R)^2} = R \Rightarrow R \text{ بدست می آید.}$$

(البته دو تا R کوچک و یک R بزرگ!!)

نکته: اگر دایره ای به شعاع R فقط بر یک محور مختصات مماس باشد آن گاه فقط یک مؤلفه مرکز بر حسب $\pm R$ است و $+R$ یا $-R$ بودن آن بستگی به ناحیه

ایی دارد که دایره در آن واقع است و محوری که دایره بر آن مماس است.



۸۶- دو دایره گذرا بر نقطه $(-9, 2)$ بر هر دو محورهای مختصات مماس است. شعاع دایره بزرگتر کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۵ و مشابه تجربی داخل ۹۰)

- ۱۴(۱) ۱۵(۲) ۱۷(۳) ۱۹(۴)

۸۷- دایره ای بر محور x ها و خط به معادله $3x + 4y = 0$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه اول و شعاع آن ۳ واحد باشد. نقطه مشترک آن با محور x ها

دارای کدام طول است؟ (ریاضی ۹۴ خارج)

- ۱(۱) ۱/۵(۲) ۲(۳) ۲/۵(۴)

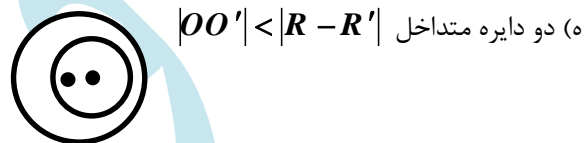
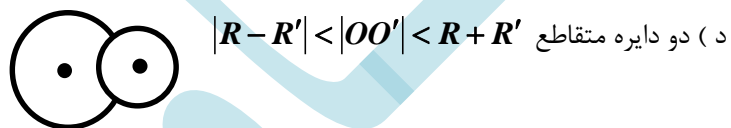
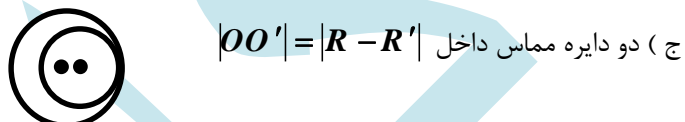
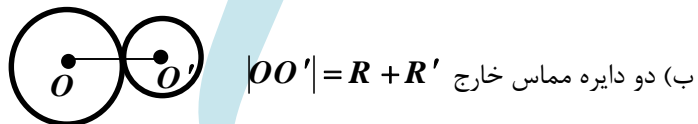
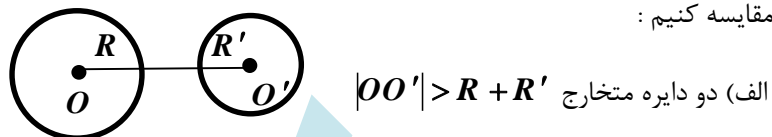
۸۸- دایره ای در ربع سوم بر محور y ها مماس بوده و از نقطه $(-2, -2)$ می گذرد. اگر شعاع این دایره برابر ۵ واحد باشد، عرض نقطه تماس دایره با محور y ها

کدام است؟

- ۲(۱) -۶(۲) ۲(۳) -۷(۴)

وضعیت دو دایره نسبت به هم

نکته: برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم کافی است $|OO'|$ (طول خط مرکزترین) ، $R + R'$ و $|R - R'|$ را بدست بیاوریم و مقایسه کنیم :



۸۹- دایره C به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۲ واحد و دایره C' به مرکز (۳, ۴) و شعاع ۳ واحد ، نسبت به هم چگونه اند ؟

- (۱) مماس داخل (۲) مماس خارج (۳) متخارج (۴) متقاطع

۹۰- دایره C به مرکز (۱, -۲) و شعاع ۷ واحد درون دایره ای به مرکز (۱, -۳) و شعاع R و مماس بر آن است . مقدار R کدام است ؟

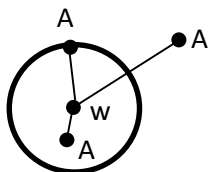
- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۹۱- دو دایره C و C' در نقطه ی (۰, ۱) مماس برونیه هم هستند ، اگر قائم های بر دایره C همواره از نقطه (۲, -۳) بگذرند . مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{5}$ کدام است؟ (ریاضی داخل ۹۴)

- (۱) (۱, -۱) (۲) (-۱, ۲) (۳) (۱, -۲) (۴) (-۱, ۳)

وضعیت یک نقطه نسبت به دایره

نکته: اگر مرکز (W) و شعاع (R) معلوم باشد می توان با بررسی فاصله نقطه دلخواهی مانند A تا مرکز دایره و مقایسه آن با شعاع دایره مشخص کرد که نقطه A نسبت به دایره چه وضعیتی دارد روی دایره است یا بیرون آن .



$|WA| > R \Rightarrow$ نقطه A خارج دایره

$|WA| = R \Rightarrow$ نقطه A روی دایره

$|WA| < R \Rightarrow$ نقطه A داخل دایره

۹۲- اگر $A(-1, 2), B(-5, -2)$ دو سر قطری از یک دایره باشند ، وضعیت نقطه $(-2, \sqrt{7})$ نسبت به این دایره چگونه است؟

- (۱) روی محیط دایره (۲) داخل دایره (۳) خارج دایره (۴) نامعلوم

۹۳- به ازای کدام مقادیر m نقطه $A(m, 5-m)$ درون دایره ای به مرکز $(-2, 0)$ و شعاع ۵ است؟

- (۱) $-1 < m < 2$ (۲) $0 < m < 2$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $-1 < m < 3$

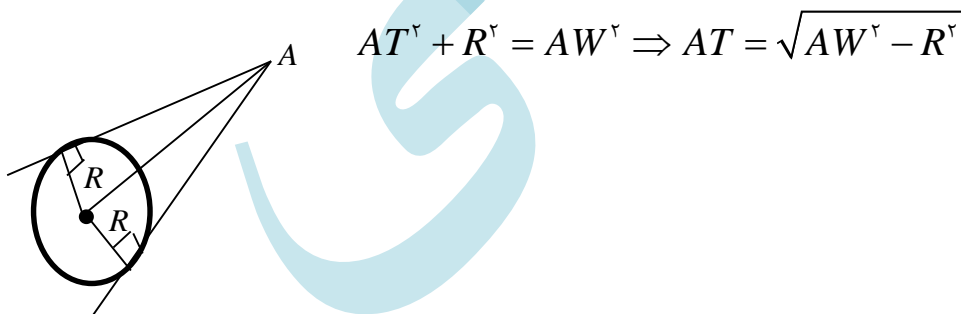
۹۴- بیشترین فاصله نقطه $A(-1, -5)$ از دایره ای به مرکز $W(2, -1)$ و شعاع ۸ واحد کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۱۳ (۳) ۲۱ (۴) ۱۱

طول قطعه مماسی از نقطه ای خارج دایره بر آن

نکته: از هر نقطه ای خارج دایره می توان دو خط مماس (با طول برابر) بر دایره رسم کرد.

از آن جا که شعاع (یا قطر) بر خط مماس بر دایره در نقطه تماس قائم است پس می توان طبق شکل بر اساس قضیه فیثاغورث طول قطعه مماس را بدست آورد.



$$AT^2 + R^2 = AW^2 \Rightarrow AT = \sqrt{AW^2 - R^2}$$

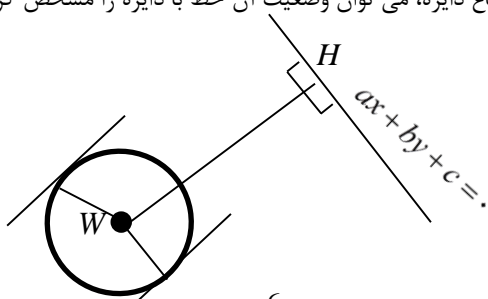
۹۵- از نقطه $A(1, 2)$ دو خط مماس بر دایره ای به مرکز $(-2, -3)$ و شعاع واحد می توان رسم کرد ، طول هر قطعه مماسی کدام است؟

- (۱) $\sqrt{33}$ (۲) $\sqrt{33}$ (۳) $2\sqrt{33}$ (۴) $\frac{\sqrt{33}}{2}$

وضعیت خط نسبت به دایره

نکته: با توجه به فاصله مرکز دایره از یک خط و مقایسه آن با شعاع دایره، می توان وضعیت آن خط با دایره را مشخص کرد.

W



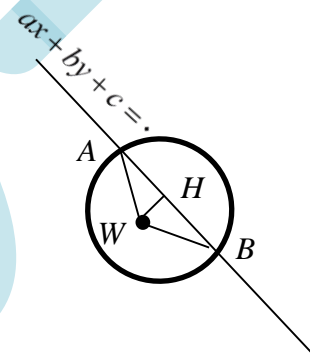
فاصله مرکز دایره تا خط : $WH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\begin{cases} WH > R \Rightarrow \text{خط دایره را قطع نمی کند.} \\ WH = R \Rightarrow \text{خط بر دایره مماس است.} \\ WH < R \Rightarrow \text{خط دایره را در دو نقطه قطع می کند.} \end{cases}$$

نکته: در حالتی که خط دایره ای را در دو نقطه قطع می کند طبق شکل می توان طول وتر AB را بر اساس قضیه فیثاغورث بدست آورد.

$$AH = \sqrt{R^2 - WH^2} \Rightarrow AB = 2AH$$

فاصله مرکز دایره تا خط : $WH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



۹۶- خط $y = -x - 5$ نسبت به دایره ای به مرکز $W(1, 2)$ و شعاع ۴ چگونه است؟

- (۱) آن را قطع نمی کند . (۲) بر آن عمود است . (۳) بر آن مماس است . (۴) آن را دو نقطه قطع می کند .

۹۷- دایره ای به مرکز $(-1, 2)$ و شعاع ۳ از خط $y = x + 1$ و تری با کدام طول جدا می کند؟

$2\sqrt{5}$ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

$2\sqrt{7}$ (۲)

$\sqrt{7}$ (۱)