@Faragiri11

فصل ۱ـ آشنایی با منطق و استدلال ریاضی

درس ۱ گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

درس ۲ استدلال ریاضی

قُل هاتو بُرهانَکُمْ اِنْ کُنتُم صادِقینْ

(آیه ۱۱۱ بقره)

«بگو اگر راست می‌گویید دلیل خود را بیاورید»

تهیه کننده:
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه استان خوزستان

«نَحنُ اَبناءُ الدَّلیل، نَمیلُ حَیثُ یَمیل» امام صادق (ع)

ما فرزندان دلیل و برهانیم و در قضاوت به‌سویی که دلایل هدایتمان کنند می‌رویم.

درس ۱

گزاره‌ها و ترکیب گزاره‌ها

مَنطق[1] در لغت به معنای «آنچه به گفته درآمده» و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال‌ها تعبیر می‌کنند. کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌هاست. امروزه منطق صرفاً به عنوان شاخه‌ای از فلسفه شمرده نشده و در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز به آن پرداخته می‌شود.

تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است. با تکیه بر این تعبیر می‌توان ادعا کرد که منطق‌دانان و افرادی که با منطق مأنوس‌ترند، بسیار کمتر از دیگران در استدلال‌ها اشتباه می‌کنند.

از میان انواع منطق و کاربردهای آن در این فصل قصد داریم شما را با منطق ریاضی[2] که شاخه‌ای از ریاضیات است و به بیان ریاضی‌گونهٔ منطق می‌پردازد، آشنا کنیم. اگر ریاضیات را به عنوان یک زبان برای انتقال مفاهیم و اطلاعات در نظر بگیریم، منطق ریاضی، دستور این زبان است.

در بین جملاتی که ما از آنها استفاده می‌کنیم، جملات خبری از اهمیت و جایگاه ویژه‌ای برخوردارند و به‌ویژه صدق و کذب یا درستی و نادرستی این خبرها برای ما و مخاطب ما اهمیت دارد. به‌عنوان مثال وقتی شما به دوست خود می‌گویید: «من امروز ساعت ۸ صبح در محل قرار حضور داشتم.» خبری را برای او بیان می‌کنید که صدق یا کذب این خبر برای شما و دوستتان مهم است.

در منطق ریاضی به هر جملهٔ خبری که بتوانیم (در حال حاضر یا در آینده) دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) را به آن نسبت بدهیم، یک **گزاره** گفته می‌شود.

جمله‌های غیر خبری مانند «چه هوای خوبی» یا «شما اهل کجایید؟» و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آنها را تعیین کنیم، گزاره نیستند؛ مثلاً «درس فلسفه از درس عربی آسان‌تر است».

فعالیت

۱. کدام یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

الف) شما چند سال دارید؟ ← گزاره نیست.

ب) عدد ۲ عددی اول است. ← گزاره است (درست)

پ) عدد $\sqrt{2}$ عددی گویا است. ← گزاره است. (نادرست)

ت) افلاطون شاگرد ارسطو است. ← گزاره است. (نادرست)

ث) $2+3\times4=20$ ← گزاره است. (نادرست)

ج) عدد $(-1)^n$ عددی همواره مثبت است. $(n\in N)$ ← گزاره است. (نادرست)

چ) سیب قرمز از سیب زرد خوش‌مزه‌تر است. ← گزاره نیست.

ح) لطفاً تخته را پاک کن. ← گزاره نیست.

1_ Logic

2_ Mathematical Logic

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

@Faragiri1

@Faragiri11

دو جمله‌ی غیر گزاره ای : معادله‌ی زیر را حل کن / به کدام رشته‌ی ورزشی علاقه دارید؟

۲. دو گزارهٔ درست و دو گزارهٔ نادرست بیان کنید و همچنین دو جمله بنویسید که گزاره نباشند.

گاهی اوقات گزاره‌ای که بیان می‌کنیم، ترکیبی از دو یا چند گزاره است. در این صورت برای تشخیص درستی یا نادرستی این گزاره‌ها که به گزاره‌های ترکیبی معروف‌اند، باید بیشتر تأمل کنیم و آنها را دقیق‌تر بررسی کنیم. به عنوان مثال جملهٔ «۳ عددی فرد است و $\sqrt{2}$ عددی گنگ است»، از ترکیب دو گزارهٔ سادهٔ «۳ عددی فرد است» و «$\sqrt{2}$ عددی گنگ است» توسط حرف ربط «و» ساخته شده است. واضح است که ارزش این گزارهٔ ترکیبی به ارزش دو گزارهٔ سادهٔ مذکور بستگی دارد. اگر هر دو گزاره نادرست باشند، ارزش گزارهٔ ترکیبی چیست؟ اگر هر دو درست باشند، چه ارزشی برای آن قائل هستید؟ اگر یکی از گزاره‌ها درست و دیگری نادرست باشد، چه پاسخی می‌دهید؟ در حالت کلی برای یک گزارهٔ ترکیبی که از ترکیب دو گزاره به دست آمده، و نسبت به ارزش‌های این دو گزاره، چند حالت می‌توان در نظر گرفت؟ آیا حروف ربط دیگری برای ترکیب دو گزاره وجود دارد؟

برای پاسخ به سؤال‌های اخیر نیاز داریم تا از نمادها و قراردادهایی استفاده کنیم. به مجموعهٔ این قراردادها و نمادگذاری‌ها جبر گزاره‌ها یا حساب گزاره‌ها گفته می‌شود.

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند p یا q یا r یا ... نمایش می‌دهیم. در سه جدول زیر وضعیت ارزشی یک، دو و سه گزاره مشخص شده است. شما جدولی را برای نمایش وضعیت ارزشی چهار گزاره تشکیل دهید.

p
د
ن

$2^1=2$

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

$2^2=4$ = تعداد حالت‌های ارزشی دو گزاره

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

$2^3=8$ = تعداد حالت‌های ارزشی سه گزاره

نقیض یک گزاره : نقیض گزارهٔ p را با نماد $(\sim p)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت «نقیض p» یا «چنین نیست که p» می‌خوانیم.

از آنجا که هر گزاره یک جملهٔ خبری است و حتماً دارای فعل، برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم و واضح است که با این کار ارزش گزارهٔ p اگر درست باشد، ارزش گزارهٔ $(\sim p)$ نادرست و اگر p گزاره‌ای نادرست باشد، ارزش گزارهٔ $(\sim p)$ درست خواهد بود.

به عنوان مثال، نقیض گزارهٔ «a مثبت است»، به صورت «a مثبت نیست» بیان می‌شود. به جدول زیر توجه کنید :

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

کار در کلاس

در هر یک از حالت‌های زیر نقیض گزاره را بیان کنید؛ سپس، ارزش هر یک را مشخص کنید.

الف) عدد ۵ زوج است. (نادرست) نقیض عدد ۵ فرد است. (درست)

ب) تساوی «۲×۲=۴» برقرار است. (درست) تساوی «۲×۲ = ۴» برقرار نیست. (نادرست)

پ) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچک‌تر است. (درست) عدد ۱۲ از ۱۵ کوچکتر نیست. (نادرست)

ت) ارسطو شاگرد افلاطون است. (درست) ارسطو شاگرد افلاطون نیست (نادرست)

ث) ایران در منطقهٔ غرب آسیا قرار دارد. (درست) ایران در منطقهٔ غرب آسیا قرار ندارد. (نادرست)

ج) $(5\times4) < (3\times7)$ (نادرست) $(5\times4) \not< (3\times7)$ (درست)

در مثال قبل اگر نقیض گزارهٔ «a مثبت است»، را به صورت «a منفی است» تعبیر کنیم. این دو گزاره نقیض هم نیستند؛ زیرا وقتی a مثبت نباشد، یا منفی است یا صفر است، در صورتی که «a منفی است» شامل صفر نمی‌شود.

ترکیب گزاره‌ها

در منطق ریاضی و در حساب گزاره‌ها، به صورت‌های متفاوتی می‌توان گزاره‌های ساده را با هم ترکیب، گزاره‌های مرکب تولید کرد. در این کتاب ترکیب گزاره‌ها توسط ۴ رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دو شرطی» انجام می‌شود. هر گزارهٔ مرکب که از ترکیب دو یا بیشتر از دو گزارهٔ ساده تولید می‌شود، خودش یک گزاره است و باید بتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم. به گزاره‌های ترکیبی زیر توجه کنید؛

الف) «۵ عددی فرد است و ۴ عددی اول است».

ب) «۱۲۱ مضرب ۱۲ است یا $\sqrt{3}$ مثبت است».

پ) «اگر من مسلمان باشم، آنگاه نبوّت حضرت رسول اکرم ﷺ را قبول دارم».

ت) «اگر n عددی زوج باشد، آنگاه n^2 زوج است و اگر n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است».

هر یک از گزاره‌های ترکیبی فوق از ترکیب دو گزاره به دست آمده‌اند و اگر از شما بخواهیم ارزش هر یک از آنها را تعیین کنید، شاید کمی مشکل به نظر برسد، ولی آنچه که مسلّم است این است که ارزش گزاره‌های ترکیبی فوق به ارزش (درستی یا نادرستی) گزاره‌های سادهٔ تشکیل دهندهٔ آنها و نوع رابط به کار رفته بین آنها بستگی دارد.

۱. **ترکیب عطفی دو گزاره**: گزارهٔ «عدد ۳ فرد است و ۷ عددی اول است» را در نظر بگیرید. چه استنباطی نسبت به درستی یا نادرستی این گزاره دارید؟ نسبت به صدق و کذب گزارهٔ «افلاطون شاگرد ارسطو است و عدد ۴ زوج است»، چه استنباطی دارید؟ کاملاً واضح است که صدق یک گزارهٔ مرکب که از ترکیب دو گزارهٔ ساده با لفظ یا حرف ربط «و» تشکیل شده است، درستی هر دو گزاره را طلب می‌کند. به نظر شما گزارهٔ دومی چه ارزشی دارد؟ توجه دارید که افلاطون شاگرد ارسطو نبوده است!

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ «و» ترکیب کنیم، از نماد «$\wedge$» بین دو گزاره استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم و می‌نویسیم. «$p\wedge q$»؛ و آن را به صورت «p و q» می‌خوانیم. ارزش ترکیب عطفی دو گزاره با توجه به جدول زیر تعیین می‌شود:

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ترکیب عطفی دو گزاره فقط وقتی دارای ارزش درست است که هر دو گزاره ارزش درست داشته باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره نادرست باشند، «$p \wedge q$» نادرست است.

فعالیت

در جدول زیر روبه‌روی گزاره‌های داده شده ارزش آنها را با علامت ✓ مشخص کرده و نیز با توجه به ارزش داده شده با یک گزارهٔ ساده، گزاره مرکب را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	هفته هفت روز دارد و ماه شهریور ۳۱ روز دارد	✓	
۲	قرآن دارای ۳۰ جزء است و همهٔ سوره‌های آن با بسم‌الله شروع می‌شود.		✓
۳	....۱۲. فرد........ و ۸ زوج است.		✓
۴	کتاب قرآن ۱۱۴ سوره دارد و .۱۱۴.. بسم‌الله دارد.	✓	
۵	۵۷ عددی اول است و ۲ عددی اول نیست.		✓
۶	۲ > ۵ و ...۲ < ۵...		✓

۲. ترکیب فصلی دو گزاره : اگر شخصی به شما بگوید؛ «آن حیوان، پرنده است یا مهره‌دار است»؛ صدق گفتهٔ او را در چه صورتی تأیید می‌کنید؟ اگر پس از بررسی معلوم شود که حیوان مورد نظر نه پرنده بوده است و نه از تیرهٔ مهره‌داران بوده است، آیا گزارهٔ مذکور دارای ارزش درست بوده است؟ در واقع صدق یک گزارهٔ مرکب که از ترکیب دو گزارهٔ ساده با لفظ «یا» تشکیل شده است، در صورتی تأیید می‌شود که حداقل یکی از دو گزارهٔ ساده، ارزش درست داشته باشند.

هرگاه بخواهیم دو گزاره مانند p و q را با لفظ «یا» با هم ترکیب کنیم، از نماد «$\vee$» استفاده می‌کنیم و آن را ترکیب فصلی دو گزاره نامیده و می‌نویسیم «$p \vee q$» و آن را به صورت «p یا q» می‌خوانیم. ارزش ترکیب فصلی دو گزاره با توجه به جدول زیر تعیین می‌شود :

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ترکیب فصلی دو گزاره تنها وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره نادرست باشد و اگر حداقل یکی از دو گزاره، ارزش درست داشته باشد، در این صورت ارزش ترکیب فصلی آنها درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است		✓
۲	حضرت مهدی ﷺ امام دوازدهم شیعیان است یا معصوم چهاردهم است.	✓	
۳	۹۱ عددی مرکّب است یا ۱۹ عددی زوج است.	✓	
۴	افلاطون شاگرد ارسطو است یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.		✓
۵	$\sqrt{20}$ گنگ است یا ۱۸ زوج است.	✓	

۳. ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه بخواهیم از گزارهٔ p گزارهٔ q را نتیجه بگیریم، از نماد «$\Rightarrow$» استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم: «$p \Rightarrow q$» و آن را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

(اگر p آنگاه q)، (p نتیجه می‌دهد q را)، (q از p نتیجه می‌شود)

در گزارهٔ شرطی «$p \Rightarrow q$»، p را **مقدم** و q را **تالی** می‌نامیم.

ارزش گزارهٔ شرطی «$p \Rightarrow q$» با توجه به جدول زیر تعیین می‌گردد:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی دارای ارزش نادرست است که مقدم؛ یعنی p درست بوده ولی تالی یعنی q دارای ارزش نادرست باشد (از یک گزارهٔ درست نتیجه‌ای نادرست حاصل شود) و در بقیهٔ موارد ارزش «$p \Rightarrow q$» درست است.

به‌ویژه وقتی که ارزش مقدم گزارهٔ شرطی یعنی p، نادرست باشد، همواره «$p \Rightarrow q$» دارای ارزش درست بوده و درست یا نادرست بودن q تأثیری در ارزش گزارهٔ «$p \Rightarrow q$» ندارد؛ بنابراین در هر یک از دو حالت مذکور، گزارهٔ شرطی **به انتفای مقدم** دارای ارزش درست است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

@Faragiri11

◆ مثال:

۱. گزاره‌های «اگر $6=3^2$ آنگاه، ۵ اول است» و «اگر ۸ فرد است، آنگاه $4<2$» هر دو به انتفای مقدم درست هستند.

۲. گزارهٔ «اگر ۱۷ اول است آنگاه ۱۸ اول است» نادرست است.

۳. گزارهٔ «اگر $4^2=2^4$ آنگاه $2^3 < 3^2$» درست است.

تذکر : در تعیین ارزش گزاره‌های شرطی، در صورتی که ارزش تالی درست باشد، نمی‌توانیم ایرادی از کلّ گزارهٔ شرطی بگیریم؛ زیرا نتیجهٔ شرط، درست است و اگر از مقدم ایراد بگیریم، گوینده به راحتی می‌تواند با کلمه «اگر» که روی مقدم بیان می‌شود، ایراد را رفع کند! و چنانچه ارزش تالی نادرست باشد و مقدم نیز دارای ارزش نادرست باشد، درست بودن گزاره $q \Rightarrow p$ فاقد ایراد است. (از بیان گزاره‌ای نادرست به نتیجه‌ای نادرست رسیدن، عجیب نیست!)

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید :

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۷ زوج است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۲	اگر ۹ مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{9}$ مربع کامل است.		✓
۳	اگر ۲۹ اول است، آنگاه ۲ زوج است.	✓	
۴	اگر ...۵>۳... آنگاه ...۴>۷...		✓
۵	اگر ...۵>۷... آنگاه ...۳>۱...	✓	
۶	اگر ۷ فرد است، آنگاه ۲۵ مربع کامل است.	✓	
۷	اگر ...۱۲ بر ۵ بخش‌پذیر باشد... آنگاه ۹۹ اول است.	✓	

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، در این صورت مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان، مشخص کنید :

۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$ (ارزش گزارهٔ $(q \Rightarrow p)$ به انتفادی مقدم درست بوده و لذا ارزش گزارهٔ $(q \Rightarrow p) \wedge r$ به ارزش گزارهٔ r بستگی دارد.)

۲) $(p \vee q) \vee r$

۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$

۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$

۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$

۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

حل شود

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه، استان خوزستان

حل کاردر کلاس صفحه‌ی ۷ فصل۱ (ریاضی و آمار۲)

$p \equiv T$ و $q \equiv F$

۱) $(q \Rightarrow p) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (q \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge r \equiv ?$
۲) $(p \vee q) \vee r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \vee q) \equiv T \rightarrow (p \vee q) \vee r \equiv T$
۳) $(p \Rightarrow q) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge r \equiv F$
۴) $(r \Rightarrow p) \vee q$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (r \Rightarrow p) \vee q \equiv T$
۵) $(r \Rightarrow p) \Rightarrow q$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (r \Rightarrow p) \equiv T \rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow q \equiv F$
۶) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv F \rightarrow (p \Rightarrow q) \Rightarrow r \equiv T$
۷) $(p \wedge q) \Rightarrow r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \rightarrow (p \wedge q) \equiv F \rightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r \equiv T$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

@Faragiri11

۴. ترکیب دو شرطی : هرگاه بخواهیم از گزارهٔ p، گزارهٔ q را نتیجه بگیریم و نیز از گزارهٔ q، گزارهٔ p را نتیجه بگیریم، از نماد «$\Leftrightarrow$» استفاده کرده و می‌نویسیم «$p \Leftrightarrow q$» و آن را به‌صورت‌های «p نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را»، «اگر p آنگاه q و اگر q آنگاه p»، «اگر p آنگاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی است برای q» و «p اگر و تنها اگر q» می‌خوانیم. در واقع گزارهٔ دو شرطی $(p \Leftrightarrow q)$ همان گزارهٔ $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ است.

تذکر : هم‌ارزش بودن دو گزارهٔ p و q را با نماد $p \equiv q$ نشان می‌دهیم؛ در این صورت :

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

بنابراین با توجه به ارزش گزاره‌های شرطی و عطفی ارزش گزاره‌های دو شرطی طبق جدول زیر به دست می‌آید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

همان‌طور که در ستون آخر مشاهده می‌کنید، اگر دو گزارهٔ p و q هم‌ارزش باشند؛ یعنی $p \equiv q$ (هر دو درست یا هر دو نادرست) در این صورت ارزش گزارهٔ دو شرطی $p \Leftrightarrow q$، درست است.

فعالیت

جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	اگر ۲ فرد است، آنگاه ۸ عددی اول است و برعکس.	✓	
۲	اگر دو عدد فرد باشند آنگاه مجموع آنها زوج است و برعکس.		✓
۳	۷ عدد اول است اگر و تنها اگر ۱۱۹ عددی مرکب ~~است~~ باشد.	✓	
۴	اگر دو زاویه متقابل به رأس باشند آنگاه مساوی‌اند و برعکس		✓
۵	یک چهار ضلعی مربع است، اگر و تنها اگر آن چهار ضلعی لوزی باشد.		✓
۶	اگر واریانس داده‌ها برابر صفر باشد؛ آنگاه داده‌ها با یکدیگر برابرند و برعکس	✓	

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

حل کار در کلاس صفحه‌ی ۹ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

$p \equiv T \to \neg p \equiv F$ و $q \equiv F \to \neg q \equiv T$

۱) $(p \Leftrightarrow q) \wedge r$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \to (p \Leftrightarrow q) \equiv F \to (p \Leftrightarrow q) \wedge r \equiv F$
۲) $(\neg p \Leftrightarrow q) \vee r$	$\begin{cases} \neg p \equiv F \\ q \equiv F \end{cases} \to (\neg p \Leftrightarrow q) \equiv T \to (\neg p \Leftrightarrow q) \vee r \equiv T$
۳) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \to (p \Leftrightarrow q) \equiv F, (p \Rightarrow q) \equiv F$ $\to (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv T$
۴) $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \to (\neg p \vee q) \equiv F, (p \Rightarrow q) \equiv F$ $\to (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv T$
۵) $(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \to (\neg p \vee \neg q) \equiv T, (p \vee q) \equiv T$ $\to (\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \equiv F$
۶) $(r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \to (r \Leftrightarrow p) \equiv ?, (p \wedge q) \equiv F$ $\to (r \Leftrightarrow p) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv ?$
۷) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$	$\begin{cases} p \equiv T \\ q \equiv F \end{cases} \to (p \wedge q) \equiv F, (p \vee q) \equiv T$ $\to (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \equiv F$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

@Faragiri11

کار در کلاس

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، مانند نمونه، ارزش هر یک از گزاره‌های مرکّب زیر را در صورت امکان مشخص کنید :

۱) $(p \Leftrightarrow q)\wedge r$

۲) $(\sim p \Leftrightarrow q)\vee r$ چون $\sim p\equiv q$ پس $(\sim p\Leftrightarrow q)\equiv T$[1] و لذا ترکیب فصلی یک گزارهٔ درست با هر گزاره‌ای، دارای ارزش درست است.

۳) $(p \Leftrightarrow q)\Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۴) $(\sim p \vee q)\Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

۵) $(\sim p \vee \sim q)\Leftrightarrow \sim(p \vee q)$

حل شد ۹.

۶) $(r \Leftrightarrow p)\Rightarrow (p \wedge q)$

۷) $(p \wedge q)\Leftrightarrow (p \vee q)$

◆ **مثال :** با استفاده از جدول ارزش‌ها درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

ب) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

پ) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

ت) $p\vee(p \wedge q) \equiv p$

ث) $(p \vee\sim p) \equiv T$ و $(p \wedge \sim p) \equiv F$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

$p \Rightarrow q$

الف)

p	q	$\sim p$	$q\Rightarrow p$	$\sim p\vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\Rightarrow q$	$\sim q\Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

۱ــ T ابتدای کلمهٔ True به معنی راست(درست) و F ابتدای کلمهٔ False به معنی دروغ(نادرست) است.

تذکر : گزارهٔ $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ را عکس نقیض گزارهٔ $(p \Rightarrow q)$ می‌نامیم.

پ)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(p \vee q)$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	د	د

تذکر : این قانون یا هم‌ارزی؛ یعنی $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ و مشابه آن؛ یعنی $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ به قوانین دمورگان معروف‌اند.

ت)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

ث)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

تذکر : ۱ گزاره‌هایی نظیر $(p \vee \sim p)$ را گزاره‌هایی همیشه درست و $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم.
۲ طبق جدول ت $p \vee (p \wedge q)$ معادل p و به طور مشابه $q \vee (p \wedge q)$ معادل q است.

تمرین

۱. جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	بزرگ‌ترین معجزهٔ پیامبر اسلام (ص) قرآن است و اسلام آخرین دین الهی است.	✓	
۲	اگر $3^2 = 6$ آنگاه مربع هر عدد فرد عددی زوج است.	✓	
۳	اگر تهران پایتخت ایران است؛ آنگاه اهواز در جنوب شرق ایران است.		✓
۴	$4 \times 2 = 2^3 \Rightarrow 8^2 > 4^3$		✓
۵	اگر عدد ۳ اول و عدد ۷ زوج باشد، آنگاه ۱۸ مربع کامل است.	✓	
۶	اگر ۲ عددی زوج یا منفی باشد، آنگاه عدد ۵ اول است.	✓	
۷	اگر فارابی معلم ثانی است، آنگاه افلاطون معلم اول است.		✓
۸	امام خمینی (ره) در سال ۱۳۴۳ تبعید و در سال ۱۳۵۷ به ایران بازگشتند.	✓	
۹	حضرت علی (ع) اولین مردی است که پس از پیامبر، اسلام آوردند و امام ...	✓	
۱۰	اگر $3 > 2$ آنگاه $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ و برعکس	✓	

امام اول شیعیان است.

ارسطو معلم اول محسوب می‌شود.

@Faragiri11

حل تمرین صفحه‌ی ۱۱ فصل۱ (ریاضی و آمار۲)

۲:

$$p\equiv T\rightarrow \neg p\equiv F \quad \text{و} \quad q\equiv F\rightarrow \neg q\equiv T$$

الف) $(p\vee r)\Rightarrow p$	$\begin{cases}p\equiv T\\ r\equiv ?\end{cases}\rightarrow (p\vee r)\equiv T\rightarrow (p\vee r)\Rightarrow p\equiv T$
ب) $(q\wedge r)\Rightarrow r$	$\begin{cases}q\equiv F\\ r\equiv ?\end{cases}\rightarrow (q\wedge r)\equiv F\rightarrow (q\wedge r)\Rightarrow r\equiv T$
پ) $(p\wedge q)\Leftrightarrow(\neg p\wedge r)$	$\begin{cases}p\equiv T\\ q\equiv F\end{cases}\rightarrow (p\wedge q)\equiv F,(\neg p\wedge r)\equiv F$ $\rightarrow (p\wedge q)\Leftrightarrow(\neg p\wedge r)\equiv T$
ت) $(\neg q\Rightarrow p)\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$	$\begin{cases}p\equiv T\\ q\equiv F\end{cases}\rightarrow (\neg q\Rightarrow p)\equiv T,(p\Rightarrow q)\equiv F$ $\rightarrow (\neg q\Rightarrow p)\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)\equiv F$
ث) $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)$	$\begin{cases}p\equiv T\\ q\equiv F\end{cases}\rightarrow (p\Rightarrow q)\equiv F,(\neg q\Rightarrow\neg p)\equiv F$ $\rightarrow (p\Rightarrow q)\Leftrightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)\equiv T$
ج) $(q\vee r)\Rightarrow(r\Rightarrow p)$	$\begin{cases}p\equiv T\\ q\equiv F\end{cases}\rightarrow (q\vee r)\equiv ?,(r\Rightarrow p)\equiv T$ $\rightarrow (q\vee r)\Rightarrow(r\Rightarrow p)\equiv T$
چ) $(\neg p\Rightarrow r)\Rightarrow\neg q$	$\begin{cases}p\equiv T\\ q\equiv F\end{cases}\rightarrow (\neg p\Rightarrow r)\equiv T$ $\rightarrow (\neg p\Rightarrow r)\Rightarrow\neg q\equiv T$
ح) $(\neg q\Rightarrow\neg p)\wedge r$	$\begin{cases}p\equiv T\\ q\equiv F\end{cases}\rightarrow (\neg q\Rightarrow\neg p)\equiv F$ $\rightarrow (\neg q\Rightarrow\neg p)\wedge r\equiv F$
خ) $(r\Rightarrow p)\wedge p$	$\begin{cases}p\equiv T\\ r\equiv ?\end{cases}\rightarrow (r\rightarrow p)\equiv T\rightarrow (r\rightarrow p)\wedge p\equiv T$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان ۱۱٫۱

۳:

الف) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

ب) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	د	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

پ) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$(p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

تهیه کننده :

۱۱٫۲

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

@Faragiri11

ت) $(p \Rightarrow p) \equiv T$

p	$p \Rightarrow p$
د	د
ن	د

ث) $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee q)$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

ج) $(p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$(p \Rightarrow q)$	$(p \wedge \neg q) \vee (p \Rightarrow q)$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

۱۱٫۳

۲. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هریک از گزاره‌های مرکب زیر را در صورت امکان مشخص کنید :

الف) $(p \vee r) \Rightarrow p$

ب) $(q \wedge r) \Rightarrow r$

پ) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge r)$

ت) $(\sim q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

ث) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

ج) $(q \vee r) \Rightarrow (\mathrm{r} \Rightarrow p)$

چ) $(\sim p \Rightarrow r) \Rightarrow \sim q$

ح) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$

خ) $(r \Rightarrow p) \wedge p$

حل شده.

۳. درستی هریک از هم‌ارزی‌های زیر را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید :

الف) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

ب) $p \wedge (q \vee \mathrm{r}) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

پ) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ت) $(p \Rightarrow p) \equiv T$

ث) $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

ج) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

حل شده.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

@Faragiri11

درس ۲

استدلال ریاضی

در درس گذشته با انواع گزاره‌ها و جدول ارزشی گزاره‌ها آشنا شدید. از طرفی در سال گذشته انواع استدلال‌های منطقی و قیاس‌ها را در کتاب منطق خود فراگرفتید. در این درس ابتدا به نحوهٔ تبدیل گزاره‌های توصیفی به نمادهای ریاضی و سپس با استفاده از قواعد و قضایای منطقی به استدلال ریاضی می‌پردازیم. در اینجا منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره‌ها در حل مسائل و همچنین اثبات یا رد یک گزاره به کمک ریاضی است.

اولین گام برای استدلال ریاضی این است که یک عبارت توصیفی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم. در ادامه با مثال‌هایی از تبدیل عبارت‌های توصیفی به زبان و نمادهای ریاضی آشنا می‌شوید.

مثال ۱ : سال گذشته با عبارت زیر آشنا شدید.

« ما و ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می‌شویم».

اکنون عبارت فوق را به‌صورت نماد ریاضی بازنویسی می‌کنیم. کافی است به‌جای «ما» در ابتدای عبارت از x استفاده کنیم. در این صورت خواهیم داشت :

$$\underbrace{x+x}_{۲x}+\underbrace{\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}x\right)}_{\frac{۱}{۴}x}+۱=۱۰۰ \longrightarrow ۲x+\frac{۳}{۴}x+۱=۱۰۰ \longrightarrow \frac{۱۱}{۴}x+۱=۱۰۰$$

بنابراین عبارت توصیفی فوق به‌صورت « $\frac{۱۱}{۴}x+۱=۱۰۰$ » بازنویسی شد که به‌وضوح یک معادلهٔ ریاضی است.

مثال ۲ : به عبارت زیر که عیناً از کتاب خلاصة الحساب انتخاب شده است، توجه کنید :

عَدَدٌ ضُرِبَ فی نصفه وَزیدَ عَلَی الحاصل اثنا عَشَرَ حَصَلَ خَمسَةُ أمثال العَدَد.

«عددی را در نصف خودش ضرب کردیم، آنگاه بر حاصل‌ضرب عدد ۱۲ را افزودیم. حاصل ۵ برابر عدد منظور شد».

برای تبدیل عبارت کلامی بالا به‌صورت نماد ریاضی، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

عدد منظور را x در نظر بگیرید. در نتیجه عبارت بالا به‌صورت زیر در خواهد آمد :

$$x\times\left(\frac{۱}{۲}x\right)+۱۲=۵x \quad \Rightarrow \frac{۱}{۲}x^{۲}+۱۲=۵x \Rightarrow \frac{۱}{۲}x^{۲}-۵x+۱۲=۰$$

عبارت فوق یک معادلهٔ درجه دوم است.

مثال ۳ : عبارت «ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن است.» را به‌صورت نماد ریاضی بیان می‌کنیم.
کافی است قیمت فروش این کالا را x و قیمت خرید آن را y درنظر بگیریم :

$$\frac{۱۰}{۱۰۰}x = x - y$$

کار در کلاس

عبارات زیر را به‌صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

الف) عددی به‌علاوه پنج، مساوی دو برابر آن عدد است. $x+۵=۲x$

ب) حاصل‌ضرب دو عدد حقیقی، برابر مجموعشان است. $xy=x+y$

ج) حاصل‌ضرب عددی در خودش به‌علاوه ۳ بزرگ‌تر از خودش است. $x^۲+۳>x$

خواندنی ۱

کورت گودل (Kurt Gödel) یک ریاضی‌دان برجسته اتریشی است که در زمینهٔ منطق، به‌ویژه تبدیل عبارات به نماد ریاضی تلاش‌های بسیاری انجام داد. نتیجهٔ تحقیقات او در منطق ریاضی سبب پیدایش تحولات شگرفی در علم منطق به‌ویژه منطق ریاضی شد. قضایای معروف او موسوم به «قضایای ناتمامیت گودل» که در سال ۱۹۳۱ منتشر شدند فهم بشر را از نارسایی‌های موجود در **دستگاه‌های منطقی سازگار**[1] دگرگون کرد. قضایای او به‌عنوان یکی از بزرگ‌ترین بحران‌های تاریخ ریاضیات شناخته می‌شوند. وی با تبدیل برخی گزاره‌ها به‌عبارات پیچیده ریاضی به کمک اعداد اول نشان داد که در هر دستگاه منطقی سازگار همواره گزاره‌هایی وجود دارند که یا درست هستند یا نادرست؛ ولی ما هرگز نمی‌توانیم درستی یا نادرستی آنها را ثابت کنیم و لذا همه دستگاه‌های منطقی سازگار، ناقص هستند. وی چنین گزاره‌هایی را «گزاره‌های اثبات ناپذیر» می‌نامد. کارهای او از جمله «کدگذاری گودلی» بعدها در زمینه‌های مختلفی به ویژه در علوم رایانه و رمزنگاری استفاده شد. امروزه از تکنیک‌های مشابهی برای تولید بارکد محصولات استفاده می‌شود. در این بارکدها ابتدا یک عبارت توصیفی به‌عبارت ریاضی (معمولاً یک عدد) و سپس به یک شکل هندسی تبدیل می‌شود. نمونه‌ای از این بارکدها را در زیر می‌بینید. با استفاده از نرم‌افزارهای بارکدخوان عبارت متناظر با این بارکدها را بیابید.
در کتاب منطق با انواع قیاس‌ها آشنا شدید. قیاس‌ها ابزارهای مهمی در استدلال و به‌ویژه استدلال ریاضی هستند.

۱ــ دستگاه منطقی مجموعه‌ای از اصول و قواعد منطقی است که درست پذیرفته می‌شوند. یک دستگاه منطقی را وقتی سازگار گوییم که با ترکیب اصول و قواعد آن نتوان هیچ یک از پارادوکس‌های شناخته شده را اثبات کرد.

@Faragiri11

یکی از انواع قیاس‌ها که در استدلالات ریاضیاتی کاربرد فراوان دارد، «قیاس استثنایی» است. در زیر با ذکر مثالی از این نوع قیاس آن را یادآوری می‌کنیم.

مقدمه ۱ : اگر امشب شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

مقدمه ۲ : امشب، شب چهاردهم ماه است.

نتیجه : ماه کامل است.

استدلال بالا را می‌توان به‌طور کلی به شکل زیر صورت بندی کرد.

اگر الف آنگاه ب

الف

∴ ب

و یا با استفاده از نمادگذاری‌های درس قبل داریم :

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

که در اینجا سه نقطه (∴) نماد نتیجه است.

گاهی از این قیاس به شکل نادرست استفاده می‌شود و منجر به نتیجه‌گیری نادرست می‌شود. به این‌گونه استدلالات مغالطه می‌گویند. در زیر به مثالی از این نوع پرداخته شده است.

مثال ۱ : آرش معتقد است که «هرکس از من متنفر است، پشت سر من حرف می‌زند. از طرفی سعید پشت سر من حرف زده است. پس سعید از من متنفر است».

برای بررسی درستی یا نادرستی استدلال آرش ابتدا مقدمات استدلال او را در زیر مرتب کرده‌ایم :

اگر $\underbrace{\text{کسی از من متنفر باشد}}_{p}$، آنگاه $\underbrace{\text{پشت سر من حرف می‌زند}}_{q}$.

$\underbrace{\text{سعید پشت سر من حرف زده است}}_{q}$.

سعید از من متنفر است : p

در واقع استدلال آرش به‌صورت روبه رو است :

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

در حالی که در قیاس استثنایی مقدمهٔ دوم باید p باشد و نه q. پس استدلال آرش نادرست است.

با استفاده از نمادهای ریاضی و قواعد منطقی می‌توان مسائل زیادی را حل کرد. استفاده از نمادهای ریاضی اغلب باعث شفاف‌تر شدن مسئله و سهولت در به‌کارگیری قواعد منطقی می‌شود. در زیر به نمونه‌ای از استدلال ریاضی در حل مسائل پرداخته شده است.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

کار در کلاس

۱. با استفاده از جدول ارزشی، درستی قاعدهٔ قیاس استثنایی $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ را نشان دهید.

۲. در هر یک از استدلالات زیر جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس کامل شود.

p: دو خط موازی باشند $\Longrightarrow$ q: دو خط هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند

دو خط L_1 و L_2 موازی‌اند.

$\therefore$ خطوط L_1 و L_2 هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

$p: x>0$

$x:\ p>0 \rightarrow q:\ x^2>0$

$p:\ 3>0$

$\therefore$ $3^2>0$

مثال ۲ : سه لیوان همانند شکل زیر داریم که یکی از آنها وارونه است. می‌خواهیم همهٔ آنها در حالت درست (رو به بالا) قرار گیرند. ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارونه است، آن را درست کنیم و برعکس) سؤال این است که آیا این کار امکان‌پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز؟ امتحان کنید!

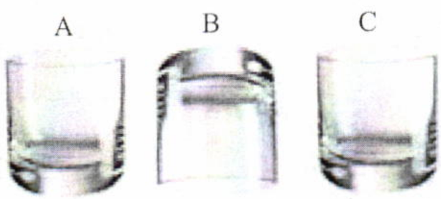
پاسخ : به کمک یک استدلال سادهٔ ریاضی که در ادامه می‌آید، نشان می‌دهیم که این کار امکان‌پذیر نیست. برای این کار داریم :

تعداد لیوان‌های وارونه $= s$

وضعیت فعلی (یک لیوان وارونه است) : $s=1$

وضعیت مطلوب (هیچ لیوانی وارونه نباشد) : $s=0$

حرکت مجاز : در هر بار دقیقاً دو لیوان تغییر وضعیت دهد.



حالات ممکن در هر حرکت مجاز در حالت کلی:

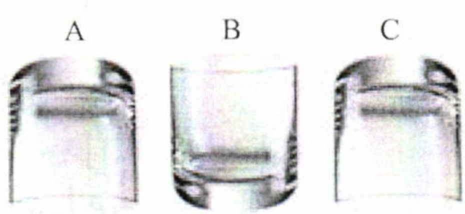
- $s-2 \leftarrow$ تعداد لیوان‌های وارونه دو تا کم می‌شود $\leftarrow$ دو لیوان درست می‌شود
- $s+2 \leftarrow$ تعداد لیوان‌های وارونه دو تا اضافه می‌شود $\leftarrow$ دو لیوان وارونه می‌شود
- $s+0 \leftarrow$ یک لیوان درست و یک لیوان وارونه می‌شود

بنابراین s همیشه به اندازهٔ عددی زوج (یا ۲− یا ۲+ یا ۰) تغییر می‌یابد و هرگز از ۱ به ۰ کاهش نمی‌یابد.

کار در کلاس

۱. مثال سه لیوان را در حالت زیر بررسی کنید. آیا فقط یک راه حل دارد؟

حل شده.



۲. مثال سه لیوان را برای حالتی که بیش از ۳ لیوان داریم و تعداد فردی از لیوان‌ها را که وارونه هستند، بررسی کنید. آیا استدلال گفته شده در آنجا قابل تعمیم به حالت اخیر است؟

@Faragiri11

حل کار در کلاس اوّل صفحه‌ی ۱۵ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

۱:

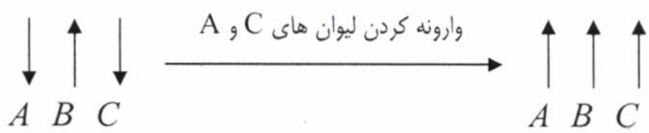
p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د

لذا قیاس استثنایی $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ همیشه درست است.

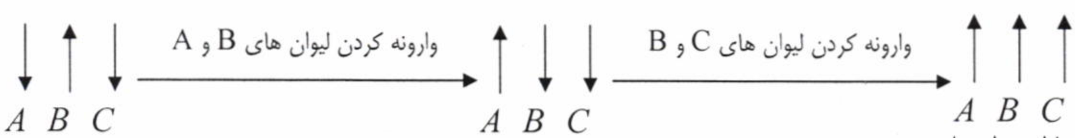
***

حل کار در کلاس دوّم صفحه‌ی ۱۵ فصل ۱ (ریاضی و آمار ۲)

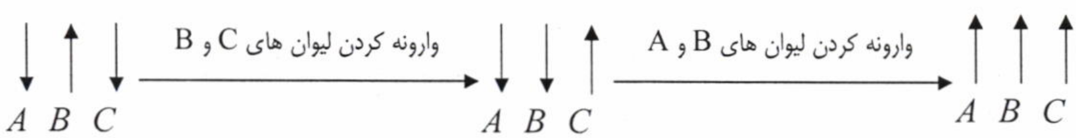
۱: یک راه حل :



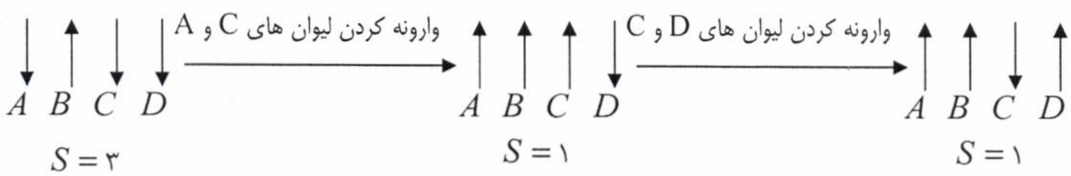
مسئله راه حل های دیگری هم دارد. مثلاً :



یا این راه حل :



۲: مسئله را برای چهار لیوان که سه لیوان از بین آنها وارونه هستند را بررسی می کنیم.(تعداد لیوان های وارونه را برابر S قرار می دهیم.)



در هر حالت با وارونه کردن دو لیوان مقدار S برابر ۱ باقی می ماند. مطلوب آن است که $S=۰$ شود. با این استدلال معلوم می شود که حالت $S=۰$ به دست نمی آید. لذا مسئله جواب ندارد.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

۱۵٫۱

تذکر : در درس قبل دیدیم که دوگزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ هم ارزند. به عبارت دیگر اگر بخواهیم ثابت کنیم گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ درست است و این‌کار دشوار باشد، به جای آن می‌توان ثابت کرد $\sim q \Rightarrow \sim p$ درست است. در این حالت می‌گوییم عکس نقیض گزارهٔ اصلی را ثابت می‌کنیم.

مثال ۳ : ثابت کنید «اگر n^2 زوج باشد آنگاه n زوج است $(n \in Z)$.»

اگر فرض کنیم

p : n^2 زوج است

q: n زوج است

و بخواهیم از درستی گزارهٔ p به گزارهٔ q برسیم، مسیر اثبات دشوار است. برای این‌کار از عکس نقیض گزارهٔ $p \Rightarrow q$ یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ استفاده می‌کنیم. یعنی نشان می‌دهیم اگر n زوج نباشد (یعنی فرد باشد، چون حالت دیگری وجود ندارد)، آنگاه n^2 زوج نیست (یعنی n^2 فرد است).

وجود دارد $(k \in Z)$

n فرد است $\Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 \Rightarrow n^2 = 2(\underbrace{2k^2+2k}_{m})+1$

$\Rightarrow n^2 = 2m+1$

تساوی اخیر نشان می‌دهد که n^2 فرد است و لذا حکم به‌دست می‌آید.

گاهی در یک استدلال یا اثبات ریاضی دچار خطا می‌شویم. یافتن خطا در یک استدلال برای رفع ایراد آن بسیار مهم است. گاهی یک استدلال غلط برای سال‌ها درست پنداشته می‌شود تا اینکه دانشمندی به غلط بودن آن پی می‌برد. کشف محل اشکال در یک استدلال همواره ساده نیست و نیاز به مهارت و دقت دارد. به مثال‌های زیر دقت کنید.

مثال ۱ : دانش‌آموزی ادعا می‌کند که معادلهٔ $x^2 - x = 0$ تنها یک ریشه دارد و آن $x=1$ است. استدلال او در زیر آمده است.

۱) $x^2 - x = 0$

۲) $x(x-1) = 0$ تجزیهٔ معادله

۳) $\frac{\cancel{x}(x-1)}{\cancel{x}} = \frac{0}{x}$ تقسیم طرفین بر x و ساده‌سازی

۴) $x - 1 = 0$ حاصل ساده‌سازی و تبدیل به معادله ساده‌تر

۵) $x = 1$ جواب معادله

ایراد این استدلال در این است که در گام سوم اجازه تقسیم بر x وجود ندارد، چون x ممکن است صفر باشد و عبارت بی‌معنا می‌شود.

مثال ۲ : دانش‌آموزی گزارهٔ «$a < b \Rightarrow ac < bc$» را که a، b و c اعداد حقیقی‌اند، به‌صورت زیر ثابت کرده است. ایراد این استدلال را پیدا کنید.

۱) $a < b$

۲) $a + c < b + c$ طرفین را با c جمع می‌کنیم.

۳) $c(a+c) < c(b+c)$ طرفین نامساوی قبل را در c ضرب می‌کنیم.

۴) $ac + c^2 < bc + c^2$ c را در پرانتزها ضرب می‌کنیم.

۵) $ac + \cancel{c^2} < bc + \cancel{c^2}$ چون c^2 عددی همواره مثبت است، می‌توان آن‌را از طرفین کم کرد.

۶) $ac < bc$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

@Faragiri11

ایراد این استدلال در گام سوم است. چون علامت c معلوم نیست (ممکن است مثبت یا منفی باشد)؛ پس نمی‌توان آن‌را در طرفین نامساوی ضرب کرد. به‌عنوان مثال اگر $a=۱$ و $b=۲$ و $c=-۱$ باشد، آنگاه گزاره فوق معادل است با «$۱ > ۲ \Longrightarrow -۱ > -۲$» که آشکارا نادرست است.

کار در کلاس

سؤال زیر در یک امتحان ریاضی داده شده است.

«اگر $a=\frac{a-d}{c-d}$ آنگاه مطلوب است d. ($a\neq ۱$).»

استدلال‌های زیر را برای به‌دست آوردن d از برگه‌های امتحانی دانش‌آموزان آورده‌ایم.

کدام یک از استدلال‌ها درست و کدام نادرست است؟ دلیل نادرستی هر استدلال غلط را بیان کنید.

الف)

۱) $\cancel{a}=\frac{\cancel{a}-d}{c-d}$ ✗

۲) $۰=\frac{-d}{c-d}$

۳) $d=۰$

حذف a در مرحله اول ایراد دارد. «استدلال نادرست»

$a=۵$ و $c=\frac{۹}{۵}$ و $d=۱$

$۵=\frac{۵-۱}{\frac{۹}{۵}-۱} \Longrightarrow ۰=\frac{۰-۱}{\frac{۹}{۵}-۱} \longrightarrow ۰=-\frac{۵}{۴}$ نادرست

ب)

۱) $a=\frac{a-d}{c-d}$

۲) $ac-ad=a-d$

۳) $ac-a=ad-d$

۴) $a(c-۱)=(a-۱)d$

۵) $\frac{\cancel{a}(c-۱)}{\cancel{a}-۱}=d$ ✗

۶) $-(c-۱)=d$

حذف a در مرحله پنجم ایراد دارد. «استدلال نادرست»

$a=۳$ و $c=\frac{۵}{۳}$ و $d=۱$

$\frac{۳(\frac{۵}{۳}-۱)}{۳-۱}=۱ \xrightarrow{\text{حذف } a} -(\frac{۵}{۳}-۱)=۱ \longrightarrow -\frac{۲}{۳}=۱$ نادرست

پ)

۱) $a=\frac{a-d}{c-d}$

۲) $a(c-d)=a-d$

۳) $ac-a=ad-d$

۴) $ac-a=(a-۱)d$

۵) $\frac{ac-a}{a-۱}=d$

ایراد ندارد. «استدلال درست»

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

تمرین

۱. گزاره‌های زیر را به‌صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

حل شده

الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به‌علاوهٔ پنج است.

پ) مجموع معکوس‌های دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی مجموع آن دو عدد است.

ت) مجموع مکعبات دو عدد بزرگ‌تر یا مساوی مکعب مجموع آن دو عدد است.

ث) هر عدد ناصفری از معکوس خود بزرگ‌تر یا مساوی با آن است.

۲. در هر مورد گزاره‌ای همراه با یک استدلال نادرست برای آن داده شده است. دلیل نادرستی استدلال را بیان کنید.

الف) اگر طول و عرض یک مستطیل را دو برابر کنیم، آنگاه مساحت آن نیز دو برابر می‌شود.

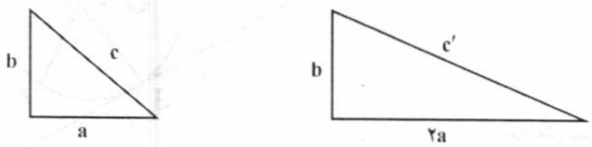
طول : x

عرض : y

مساحت $S = xy$

$۲(xy) = ۲\underbrace{xy}_{S} = ۲S \rightarrow$ مساحت دو برابر شده است.

ب) در یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائمه a و b و وتر c همانند شکل زیر اگر ضلع a را دو برابر کنیم، آنگاه وتر آن نیز دو برابر می‌شود.



استدلال : می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو قضیهٔ فیثاغورث به‌صورت زیر برقرار است :

$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$

اکنون این رابطه را برای مثلث قائم‌الزاویهٔ جدید نیز می‌نویسیم :

$$c'^۲ = (۲a)^۲ + b^۲ = ۴a^۲ + b^۲ = ۴(\underbrace{a^۲ + b^۲}_{c^۲}) = ۴c^۲ \Rightarrow c'^۲ = ۴c^۲ \xRightarrow{\text{جذر}} c' = ۲c$$

پس وتر دو برابر شده است.

پ) تساوی $\sqrt{\frac{۱۲\times۳+۴\times۱۶}{۶}} = ۲\sqrt{۱۱}$ برقرار است.

$$\sqrt{\frac{۱۲\times۳+۴\times۱۶}{۶}} = \sqrt{\frac{۱۲\times\cancel{۳}+۴\times۱۶}{۲\times\cancel{۳}}} = \sqrt{\frac{۱۲+\cancel{۴}^{۲}\times۱۶}{\cancel{۲}}} = \sqrt{۱۲+۳۲} = \sqrt{۴۴} = \sqrt{۴\times۱۱} = ۲\sqrt{۱۱}$$

تهیه کننده :
گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

@Faragiri11

حل تمرین صفحه‌ی ۱۸ فصل۱ (ریاضی و آمار۲)

۱:

الف) $۲\sqrt{x} = x$ پ) $\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} \geq a + b$ ث) $x \geq \frac{۱}{x}\ ;\ x \neq ۰$

ب) $k^۳ > ۷k + ۵$ ت) $\alpha^۳ + \beta^۳ \geq (\alpha + \beta)^۳$

۲:

الف) استدلال نادرست است. مسئله اشاره به دو برابر کردن اضلاع داشته است. در اینجا مساحت را دو برابر کرده است. می توان با مثال نیز نادرستی استدلال را نشان داد.

$a = ۳ \rightarrow x = ۳ \times ۲ = ۶$

$b = ۵ \rightarrow y = ۵ \times ۲ = ۱۰$

$a \times b = ۳ \times ۵ = ۱۵$ مساحت مستطیل اوّلیه

$x \times y = ۶ \times ۱۰ = ۶۰$ مساحت مستطیل ثانویه

مشاهده می کنیم که مساحت چهار برابر شده است نه دو برابر

ب) استدلال در مرحله‌ی ($۴a^۲ + b^۲ = ۴(a^۲ + b^۲)$) باطل می شود. به این مثال توجه کنید.

$a = ۳$ و $b = ۵$

$۴a^۲ + b^۲ = ۴(۳)^۲ + (۵)^۲ = ۳۶ + ۲۵ = ۶۱$

$۴(a^۲ + b^۲) = ۴(۳^۲ + ۵^۲) = ۴(۹ + ۲۵) = ۴ \times ۳۴ = ۱۳۶$

پ) استدلال در اوّلین قدم،(ساده کردن۳ از صورت و مخرج) باطل می شود. ابتدا باید حاصل صورت را به دست آوریم و سپس در صورت امکان ساده کنیم.

$$\sqrt{\frac{۱۲ \times ۳ + ۴ \times ۱۶}{۶}} = \sqrt{\frac{۳۶ + ۶۴}{۶}} = \sqrt{\frac{۱۰۰}{۶}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۶}} = \frac{۱۰}{۶}\sqrt{۶} = \frac{۵}{۳}\sqrt{۶}$$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

۱۸,۱