فصل
تابع

بندر سیراف، شهر باستانی استان بوشهر یکی از مکان‌های تاریخی و از نقاط دیدنی ایران است که زمانی دارای رونق چشمگیری بوده و در آن زمان با سیصد هزار نفر جمعیت، روابط تجاری زیادی با روم و یونان (در اروپا) و ماداگاسکار (در آفریقا)، هند و چین (در آسیا) داشته است. با این همه زمین‌لرزهٔ شدیدی در قرن چهارم هجری قمری ویران شدن کامل این بندر را در پی داشت.

درس اوّل — آشنایی با برخی از انواع توابع

درس دوم — وارون یک تابع و تابع یک به یک

درس سوم — اعمال جبری روی توابع

درس اول

آشنایی با برخی از انواع توابع

در سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم. به دستور یا قانون بیانگر تابع، **ضابطهٔ** آن تابع گفته می‌شود. برای مشخص کردن یک تابع، باید **دامنهٔ** تابع و **ضابطهٔ** آن را داشته باشیم. بنا به قرارداد، اگر ضابطهٔ تابعی داده شده باشد، اما دامنهٔ آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که آن تابع در آن قابل تعریف است، به عنوان دامنه در نظر گرفته می‌شود.

توابع گویا

فعالیت

حسین در پایهٔ یازدهم درس می‌خواند. او در روستای کوچکی زندگی می‌کند که در چند کیلومتری یکی از جاده‌های پرتردد ایران قرار دارد. مردم این روستا تا چند سال پیش به کشاورزی و باغداری مشغول بودند، اما چند سالی است که به دلیل کم‌آبی، کشاورزی رونقی ندارد و در نتیجه مردم این روستا درآمد کافی ندارند. حسین تصمیم گرفت این وضع را تغییر دهد. برای این منظور با خود اندیشید که باید فضای روستا را زیباتر کند و با تبلیغاتی مناسب، بخشی از افرادی که قصد گردشگری دارند و معمولاً از جادهٔ اصلی کنار روستا می‌گذرند را به روستای خود جلب کند. او با خود فکر کرد این گردشگران بابت پذیرایی محلی و تجربهٔ خوشایند یک زندگی روستایی، هزینه خواهند پرداخت و به این ترتیب چرخهٔ اقتصادی مردم روستا پر رونق خواهد شد.

پس از چند هفته تحقیق و پرس و جو، حسین به این نتیجه رسید که برای شروع کار به حدوداً ده میلیون تومان نیاز دارد که البته او به تنهایی این پول را نداشت. برای همین تصمیم گرفت ابتکار خود را با دیگران مطرح کند و از آنها هم برای این کار مفید یاری بخواهد. به این ترتیب افراد روستا می‌توانستند با سرمایه‌گذاری به نسبت مساوی در راه‌اندازی این کار اقتصادی سهیم شوند.

۱ الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می‌بایست $\frac{۱}{۱}$ از ده میلیون تومان را بپردازد، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می‌شد، هر کدام باید $\frac{۱}{۲}$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$\frac{۱}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۱۰}$

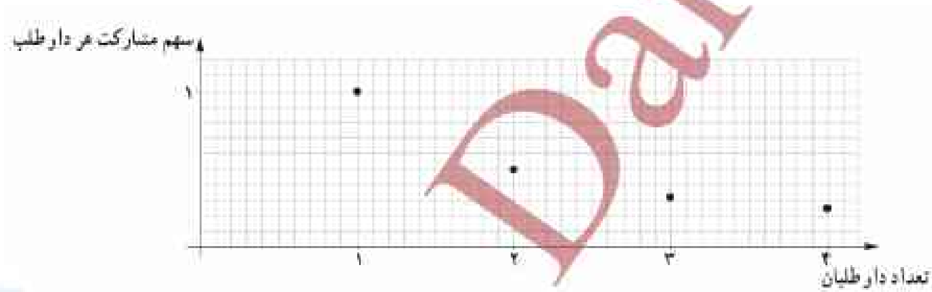
ب) اگر تعداد داوطلبانی که می‌خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟ $\frac{1}{n}$

پ) رابطهٔ بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطهٔ این تابع چیست؟ $f(x)=\frac{1}{x}$

۲ در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینهٔ مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

«با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش ☑ افزایش ☐ می‌یابد».

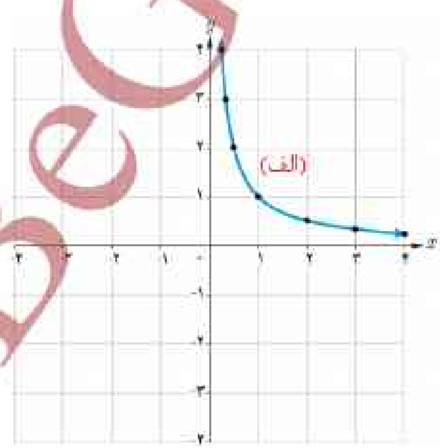
این نمودار نشان می دهد که با افزایش تعداد افراد سهم مشارکت هر فرد کاهش می یابد.

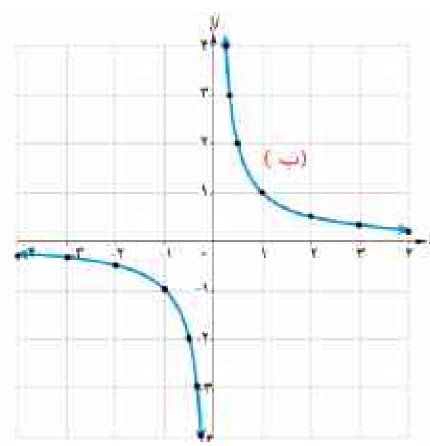


فعالیت

در نمودارهای زیر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ با دو دامنهٔ متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟

الف) $D_f=(۰,+\infty)$ ب) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$





هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ ، $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

خواندنی

هزینهٔ پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی رودخانه‌ای با تابع با ضابطهٔ $p(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $p(x)$ هزینهٔ پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی خواهد شد؟

پ) چرا هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

x	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰
$p(x)$	۲۸/۳	۱۰۹/۳	۲۵۵	۵۹۵	۲۲۹۵

الف)

$$p(۱۰)=\frac{۲۵۵\times ۱۰}{۱۰۰-۱۰}=\frac{۲۵۵۰}{۹۰}=۲۸/۳۳۳...=۲۸/۳$$

$$p(۳۰)=\frac{۲۵۵\times ۳۰}{۱۰۰-۳۰}=\frac{۷۶۵۰}{۷۰}=۱۰۹/۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴...=۱۰۹/۳$$

$$p(۵۰)=\frac{۲۵۵\times ۵۰}{۱۰۰-۵۰}=\frac{۲۵۵\times ۵۰}{۵۰}=۲۵۵$$

$$p(۷۰)=\frac{۲۵۵\times ۷۰}{۱۰۰-۷۰}=\frac{۲۵۵\times ۷۰}{۳۰}=\frac{۲۵۵\times ۷}{۳}=۵۹۵$$

$$p(۹۰)=\frac{۲۵۵\times ۹۰}{۱۰۰-۹۰}=\frac{۲۵۵\times ۹۰}{۱۰}=۲۵۵\times ۹=۲۲۹۵$$

ب)

$$۱۰۰۰=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}\Rightarrow ۱۰۰۰۰۰-۱۰۰۰x=۲۵۵x\Rightarrow ۱۰۰۰۰۰=۱۲۵۵x$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۰۰۰۰۰}{۱۲۵۵}\approx ۷۹/۶۸\simeq ۸۰$$

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ و همچنین توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-10} \qquad f(x)=\frac{x}{x+5}$$

$$f(x)=2 \qquad f(x)=\sqrt{5}x$$

کار در کلاس

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» اوست. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همهٔ پرتاب‌های آزاد حساب می‌کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همهٔ پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطهٔ تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$$f(x)=\frac{7+x}{10+x} \qquad f(x)=\frac{x}{0/7+x} \qquad f(x)=x+0/7$$

نسبت پرتاب های موفق وحیده به کل پرتاب های ی او $\frac{7}{10}$ است حالا اگر فرض کنیم که او x پرتاب موفق دیگر انجام دهد پس به ۷پرتاب موفق قبلی x و به کل پرتاب ها هم x تا پرتاب اضافه می شود و نسبت پرتاب های موفق جدید به کل پرتاب های جدید به صورت $\frac{7+x}{10+x}$خواهد بود. بنا براین ضابطه ی تابع پرتاب های موفق وحیده $f(x)=\frac{7+x}{10+x}$ است .

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟

بله زیرا صورت و مخرج کسر یک چندجمله ای است . و همچنین مخرج صفر نیست زیرا تعداد پرتاب ها که x است منفی نیست و با عدد ۱۰ هم که جمع شود صفر نمی شود.

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپیِ دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟

$$f(x)=\frac{80}{100} \rightarrow \frac{7+x}{10+x}=\frac{80}{100} \rightarrow 100x+700=80x+800 \rightarrow 20x=100 \rightarrow x=5$$

دامنهٔ توابع گویا

از سال‌های گذشته می‌دانیم مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد؛ بنابراین عدد صفر در دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\frac{1}{x}$ نیست. به‌طور کلی اعدادی که مخرج کسر مربوط به ضابطهٔ یک تابع گویا را صفر کنند،عضو دامنهٔ آن تابع نیستند. به عنوان مثال، دامنهٔ تابع گویای با ضابطهٔ $f(x)=\frac{5}{x-2}$ برابر $\mathbb{R}-\{2\}$ است.

کار در کلاس

دامنهٔ هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$D_g=\mathbb{R}-\{4\}$	$g(x)=\frac{3}{x-4}$	$D_f=\mathbb{R}-\{-5\}$	$f(x)=\frac{x}{x+5}$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

بنابراین در صورت رسم نمودارهای دو تابع مساوی در یک دستگاه مختصات، باید نمودارهای آنها دقیقاً بر هم منطبق شوند.

به نمودار دو تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۲x}{x}$ و $g(x)=۲$ دقت کنید.

می‌بینیم که نمودارهای این دو تابع کاملاً بر هم منطبق نیستند. در واقع با اینکه ضابطهٔ دو تابع شبیه هم هستند و در صورت ساده شدن x، ضابطه‌های دو تابع برابر می‌شوند ولی دامنهٔ دو تابع با هم متفاوت‌اند، زیرا داریم:

$$D_f = \mathbb{R} - \{۰\} \qquad\qquad D_g = \mathbb{R}$$

در نتیجه این دو تابع با هم برابر نیستند.

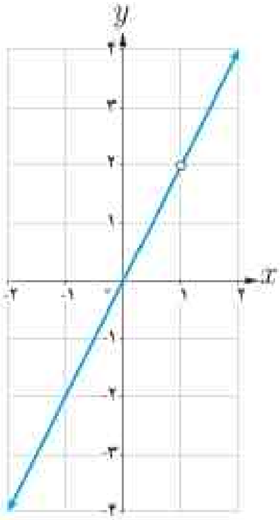
تذکر: همواره دامنهٔ تابع را قبل از ساده کردن ضابطهٔ آن محاسبه می‌کنیم.

کار در کلاس

۱ آیا دو تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۲}{x}$ و $g(x) = x$ با هم برابرند؟ چرا؟

خیر زیرا وقتی تابع **f(x)** را ساده می کنیم ، ضابطه ی دو تابع برابر می شود ولی دامنه ها باهم برابر نیستند پس این دو تابع با هم برابر نیستند.

$f(x) = \frac{x^۲}{x} = x$ $\qquad$ $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$, $D_g = \mathbb{R}$



۲ نمودار مقابل مربوط به کدام‌یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟

الف) $D_g = \mathbb{R}$ $\quad g(x) = ۲x$

ب) $D_g = \mathbb{R} - \{۲\}$ $\quad g(x) = ۲x$

پ) $D_g = \mathbb{R} - \{۱\}$ $\quad g(x) = ۲x$

ت) $D_g = \mathbb{R} - \{۱\}$ $\quad g(x) = \dfrac{۲x^۲ - ۲x}{x - ۱}$

ث) $D_g = \mathbb{R} - \{۲\}$ $\quad g(x) = \dfrac{۲x^۲ - ۴x}{x - ۲}$

با توجه به شکل دامنه ی تابع عبارت است از : $D_g = \mathbb{R} - \{۱\}$ بنا براین دامنهٔ آن با قسمت های (پ) و (ت) یکی است اما باید ضابطه های هر کدام از این قسمت ها را هم بررسی کنیم.

$$g(x) = \frac{۲x^۲ - ۲x}{x - ۱} = \frac{۲x(x-۱)}{(x-۱)} \xrightarrow[D_g = \mathbb{R} - \{۱\}]{\div (x-۱)} g(x) = ۲x$$

می دانیم نقاط $(۰,۰)$ و $(-۱,-۲)$ روی نمودار این تابع قرار دارند و در ضابطهٔ تابع $g(x) = ۲x$ صدق می کنند:

$$g(x) = ۲x \Rightarrow \begin{cases} ۰ = ۲ \times ۰ \Rightarrow ۰ = ۰ \\ -۲ = ۲ \times (-۱) \Rightarrow -۲ = -۲ \end{cases}$$

توابع رادیکالی

کار در کلاس

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه‌جایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطهٔ $S = ۳۵۶\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است.

الف) جدول زیر را کامل کنید. $(\sqrt{۲} = ۱/۴ \;,\; \sqrt{۳} = ۱/۷)$

d	۱	۲	۳	۴
$S = ۳۵۶\sqrt{d}$	۳۵۶	۴۹۸/۴	تقریباً ۶۰۵/۲	۷۱۲

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

چون هر عدد، تنها ... یک ... ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی یک تابع است.

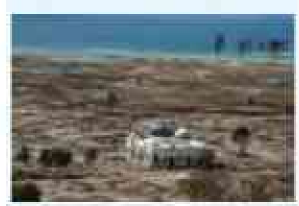
پ) کدام‌یک از اعداد ۵- و ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است؟

عدد ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است.

خواندنی

سونامی (آبلرزه) به لرزش شدید آب دریا گفته می‌شود. این اتفاق ممکن است در پی زمین‌لرزه‌های زیر دریا، لغزیدن صخره، انفجار آتشفشانی و یا هر حادثهٔ دیگری که انرژی زیادی در دریا آزاد می‌کند، رخ دهد. آبی که به لرزه درآمده است، به‌شکل موج‌های عظیم به کرانه‌ها می‌رسد و ویرانی به بار می‌آورد. سونامی زمانی شروع می‌شود که حجم عظیمی از آب، به سرعت مرتفع شود. تندی موج‌های سونامی بسته به محل رویداد، ممکن است به بیش از ۸۰۰ کیلومتر در ساعت برسد!

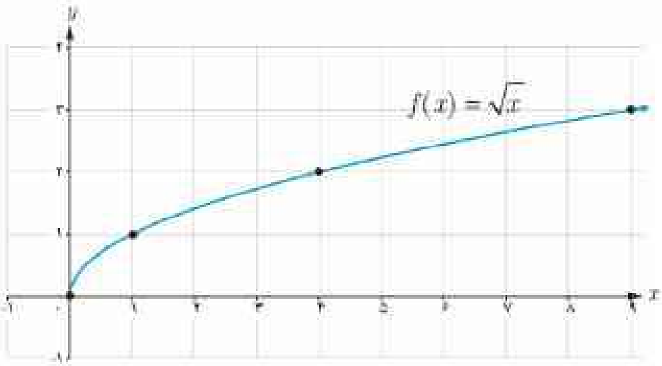
یکی از بزرگ‌ترین سونامی‌ها در سال ۱۳۸۳ در نزدیکی سوماترای اندونزی روی داد و باعث ویرانی عظیمی شد و حدود ۲۰۰ هزار نفر را به کام مرگ کشانید.



در کتاب‌های تاریخ ادعا شده است که قسمت بزرگی از بندر باستانی سیراف ناگهان بر اثر زمین‌لرزه‌ای به زیر آب رفته است. پاسخ دقیق این سؤال را که « آیا یک سونامی سیراف را ویران کرده و به زیر آب برده است؟» باید با کمک پژوهش‌های باستان‌شناسی و زمین‌شناسی یافت. با توجه به اینکه میانگین عمق خلیج فارس حدود ۵۰ متر است، نظر شما چیست؟

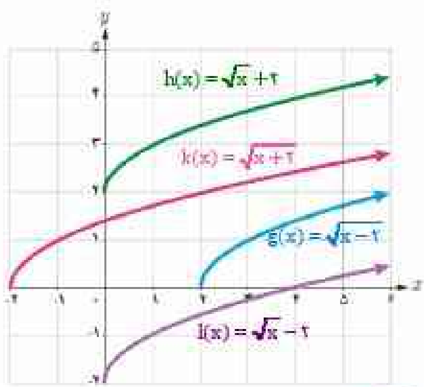
مطالعهٔ **توابع رادیکالی** مانند $S=356\sqrt{d}$ به‌دلیل نقش کاربردی آنهاست. در این کتاب با برخی از توابع رادیکالی آشنا می‌شویم. همان‌طور که هنگام کار با تابع رادیکالی سونامی دیدید، دامنهٔ این نوع توابع ممکن است همهٔ اعداد حقیقی نباشد.

ساده‌ترین تابع رادیکالی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ است. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی و نمودار آن به‌صورت زیر است.



فعالیت

۱ در شکل مقابل با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر رسم شده است. مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنهٔ آنها را تعیین کنید.



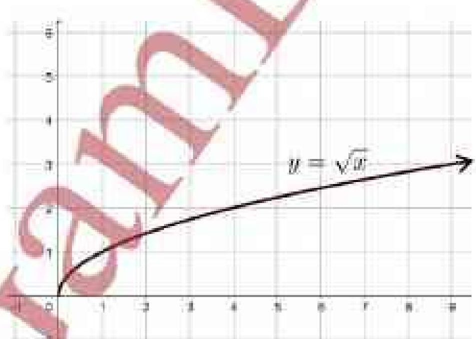
الف) $g(x)=\sqrt{x-2}$ $D_g=[2,+\infty)$ ب) $h(x)=\sqrt{x}+2$ $D_h=[0,+\infty)$

پ) $k(x)=\sqrt{x+2}$ $D_k=[-2,+\infty)$ ت) $l(x)=\sqrt{x}-2$ $D_l=[0,+\infty)$

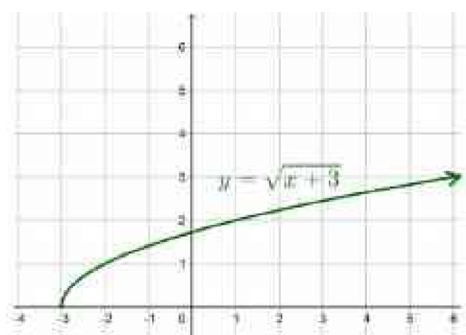
۲ می‌خواهیم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-2+\sqrt{x+3}$ را رسم کنیم.

الف) (مرحلهٔ اول) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x}$ در صفحهٔ قبل را در نظر بگیرید.

ب) (مرحلهٔ دوم) حال، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x+3}$ را رسم کنید.



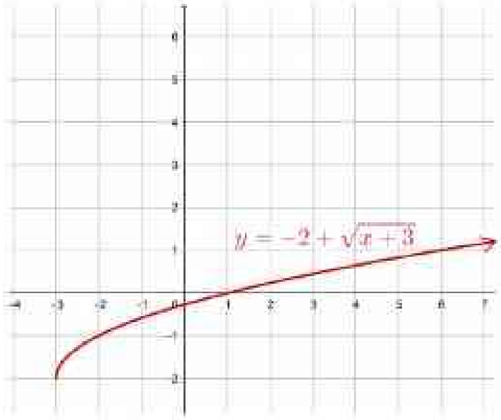
(الف) مرحلهٔ اول



(ب) مرحلهٔ دوم

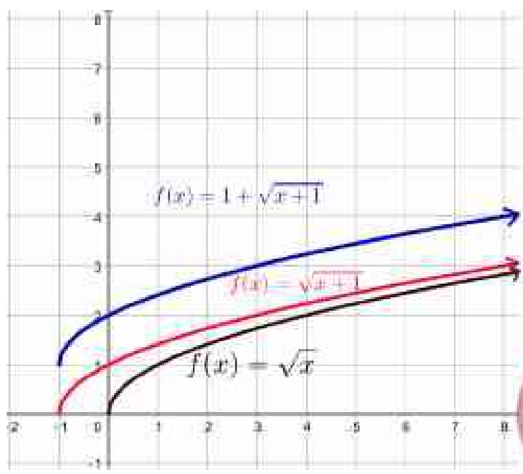
ب) (مرحلهٔ سوم) در پایان، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-۲+\sqrt{x+۳}$ را رسم کنید.

با توجه به شکل می‌بینید که دامنهٔ این تابع $[-۳,+\infty)$ است.



۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۱+\sqrt{x+۱}$ را رسم کنید؛ سپس دامنهٔ آن را بیابید.

$D_f=[-۱,+\infty)$



توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

فعالیت

هزینهٔ پارکینگ خودرو

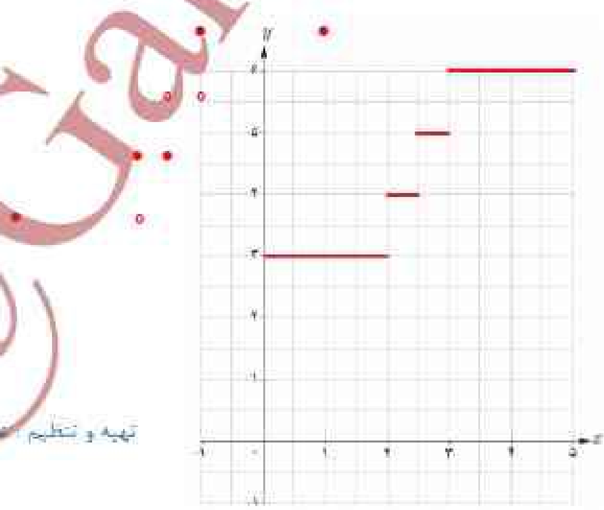
در یک پارکینگ، هزینهٔ پارک خودرو به این صورت محاسبه می‌شود :

زمان		هزینه (هزار تومان)
از هنگام ورود	تا کمتر از ۲ ساعت	۳
از ۲ ساعت	تا ۲/۵ ساعت	۴
از بیشتر از ۲/۵ ساعت	تا کمتر از ۳ ساعت	۵
از ۳ ساعت	تا ۵ ساعت	۶

الف) ضابطهٔ تابع هزینهٔ پارکینگ خودرو چیست؟

$$f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰\leq x<۲ \\ ۴ & ۲\leq x\leq ۲/۵ \\ ۵ & ۲/۵<x<۳ \\ ۶ & ۳\leq x\leq ۵ \end{cases}$$

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.



به توابعی مانند تابع هزینهٔ پارکینگ، **توابع پله‌ای** می‌گویند. توابع پله‌ای در تجارت با خرید و فروش نقش تعیین کننده‌ای دارند. مشهورترین تابع پله‌ای، **تابع جزء صحیح** است.

> تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد. ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود.

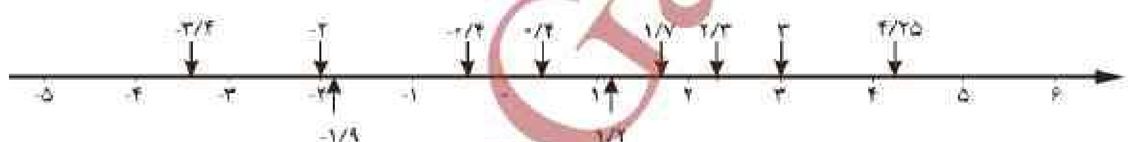
برای مثال داریم:

[-۳]=-۳   [-۴/۳]=-۵   [۰]=۰   [۶/۱]=۶   [۴]=۴

همان‌طور که در مثال دیدیم، جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

کار در کلاس

۱ با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به‌دست آورید.



[-۰/۴] = -۱   [۰/۴] = ۰   [-۱/۹] = -۲   [-۲] = -۲   [-۳/۴] = -۴

[۱/۲] = ۱   [۱/۷] = ۱   [۲/۳] = ۲   [۳] = ۳   [۴/۲۵] = ۴

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

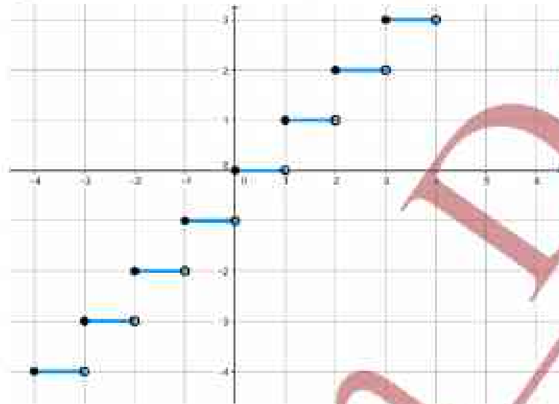
$\left[-\frac{۱۳}{۵۱}\right] = [-۰/۲۵۴] = -۱$ $\left[\frac{۴۱}{۳۷}\right] = [۱/۱۰۸] = ۱$

فعالیت

۱ اگر $[x]=۲$، آنگاه x برابر چه اعدادی می‌تواند باشد؟ مجموعه جواب را به‌صورت بازه بنویسید.

$[x] = ۲ \Rightarrow ۲ \leq x < ۳ \Rightarrow x \in [۲, ۳)$

۲ برای رسم نمودار یک تابع جزء صحیح باید توجه کنیم که اعداد هر بازه‌ای از دامنه، به چه عددی نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر $0 \leq x < 1$، آنگاه $[x] = 0$؛ پس مقدار تابع $f(x) = [x]$ برای همهٔ اعداد عضو بازهٔ $[0,1)$ برابر صفر می‌شود. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x]$ رسم شده است. نمودار این تابع را در بازهٔ $[-4,4)$ تکمیل کنید.



خواندنی
برای قیمت‌گذاری یک محصول تولیدی خاص، قیمت مواد اولیه تعیین‌کننده است؛ اما بالا و پایین رفتن‌های جزئی قیمت مواد اولیه، قیمت یک محصول را تغییر نمی‌دهد. بنابراین به اعداد بازه‌ای از قیمت‌های مواد اولیه، تنها یک قیمت نهایی محصول را نسبت می‌دهند. به این ترتیب، تابع مورد نظر یک تابع پله‌ای است.

خواندنی
با مراجعه به وب‌گاه رسمی سامانهٔ محاسبهٔ نرخ مرسولات پستی شرکت ملی پست (http://parcelprice.post.ir) می‌توانید دو شهر را انتخاب کنید. سپس تابع پله‌ای هزینهٔ ارسال یک بسته را برحسب وزن ــ قیمت مشاهده کنید.

۳ الف) به دلخواه نقطه‌ای مانند a را روی محور اعداد داده شده مشخص کنید.

ب) نقطهٔ $a+3$ را روی این محور مشخص کنید.

پ) نقاط $[a]$ و $[a+3]$ را روی محور مشخص کنید.

ت) چه رابطه‌ای بین $[a]$ و $[a+3]$ برقرار است؟ $[a+3] = [a] + 3$

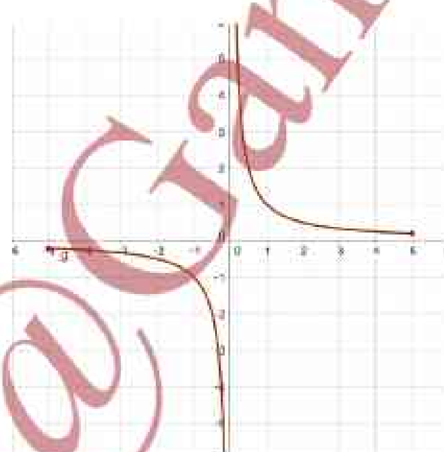
ث) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

«اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a+n] = [a] + n$»

تمرین

۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{x}$ و با دامنهٔ $D_f = [-5,5] - \{0\}$ را رسم کنید.

$f(x) = \frac{1}{x}$ $D_f = [-5,5] - (0)$



۲ دامنهٔ تابع گویای با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$ را به‌دست آورید.

کافی است عددی را که مخرج را صفر می کند از مجموعه ی اعداد حقیقی حذف کنیم . بنابراین داریم : $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۳ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases} \quad , \quad g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

الف) دامنهٔ این دو تابع باهم برابر است . $D_f = D_g = \mathbb{R}-\{۰\}$

پس از ساده کردن تابع g مشاهده می کنیم که ضابطهٔ این دو تابع نیز باهم برابر است :

$$\left.\begin{array}{l} x>۰ \Rightarrow g(x)=\dfrac{x}{x}=۱ \\ x<۰ \Rightarrow g(x)=\dfrac{-x}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow g(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$$

ب) $f(x)=x-۲ \quad , \quad g(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x+۲}$

ب) می دانیم دامنه ی این دو تابع عبارت است از : $D_f=\mathbb{R} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$

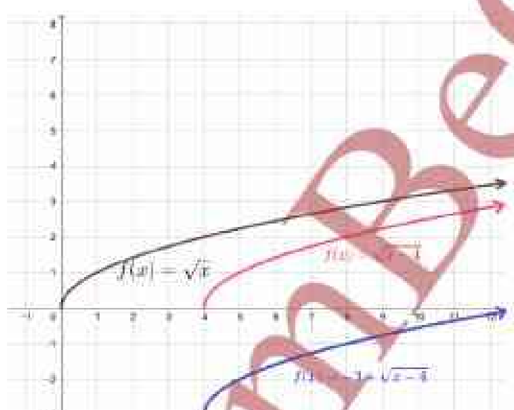
با وجود این که اگر $g(x)$ را ساده کنیم ضابطه ی آن با ضابطه ی $f(x)$ برابر می شود اما چون دامنه ها برابر نیستند نمی توانیم بگوییم که دو تابع برابر هستند.

$$g(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x+۲)}=x-۲$$

۴ تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش برابر $\mathbb{R}-\{-۱\}$ شود. پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

$$f(x)=\frac{x+۳}{x+۱} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^۲+x}$$

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=-۳+\sqrt{x-۴}$ را رسم کنید.

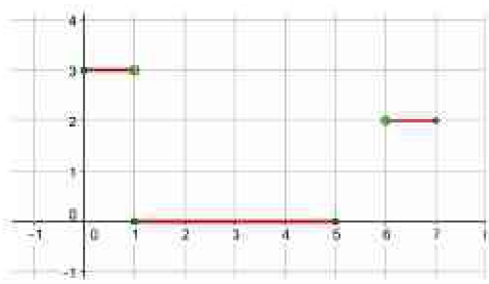


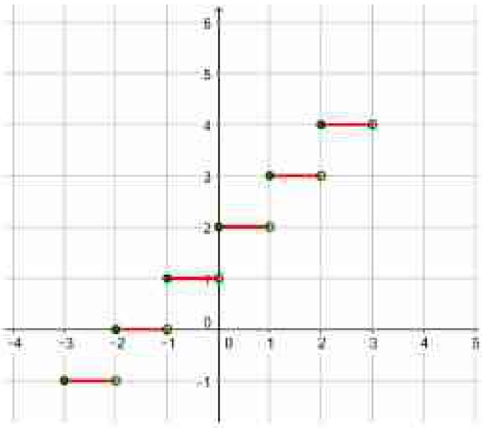
۶ حاصل عبارت‌های مقابل را حساب کنید.

$[۳۰۰/۴۰۰۲]=۳۰۰ \qquad [-۱۰۳/۰۰۳]=-۱۰۴ \qquad [-۲۳۰۹/۵۴]=-۲۳۱۰$

۷ تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۳ & x\in[۰,۱)\\ ۰ & x\in[۱,۵]\\ ۲ & x\in(۶,۷]\end{cases}$$





۸ تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]+۲$ و دامنهٔ $D_f=[-۳,۳)$ را رسم کنید.

$-۳ \le x < -۲ \quad f(x) = -۳ + ۲ = -۱$

$-۲ \le x < -۱ \quad f(x) = -۲ + ۲ = ۰$

$-۱ \le x < ۰ \quad f(x) = -۱ + ۲ = ۱$

$۰ \le x < ۱ \quad f(x) = ۰ + ۲ = ۲$

$۱ \le x < ۲ \quad f(x) = ۱ + ۲ = ۳$

$۲ \le x < ۳ \quad f(x) = ۲ + ۲ = ۴$

خواندنی

تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ به‌طور تقریبی قد متوسط کودکان[1] را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. در این تابع x نشان‌دهندهٔ ماه‌های پس از تولد است.

قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریباً چقدر است؟

در چه سنی قد متوسط یک کودک تقریباً یک متر می‌شود؟

۱ــ کودکان حاضر در تصویر، فرزندان شهدای مدافع حرم هستند.

$f(x) = ۷\sqrt{x} + ۵۰$

$f(۹) = ۷\sqrt{۹} + ۵۰ = ۲۱ + ۵۰ = ۷۱ \ \text{cm}$

$۱۰۰ = ۷\sqrt{x} + ۵۰ \Rightarrow ۵۰ = ۷\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{۵۰}{۷} \Rightarrow x = \frac{۲۵۰۰}{۴۹} \approx ۵۱$

قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریبا ۷۱ سانتی متر است.

در سن تقریبا ۵۱ ماهگی کودک تقریبا یک متر می شود.

درس دوم

وارون یک تابع و تابع یک به یک

وارون یک تابع

کار در کلاس

الف) هر مایل تقریباً ۱/۶ کیلومتر است. تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام یک از رابطه‌های سمت چپ است.

این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است. $f(x)=\frac{۸}{۵}x$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است. $g(x)=\frac{۵}{۸}x$

ب) تندی ۳۰ مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟ $f(۳۰)=\frac{۸}{۵}\times ۳۰=۴۸\ \ km/h$

هر تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ بیان می کند که متغیر y چه ارتباطی با متغیر x دارد و چگونه می توان با در دست داشتن مقدار x، مقدار y را به‌دست آورد. اما گاهی مهم است که بدانیم چگونه می‌توان از مقدار y به مقدار x رسید. تبدیل یکای اندازه‌گیری نمونه‌ای ساده از این حالت است.

به خاطر دارید که یک تابع را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

خواندنی

سال‌هاست که ریاضی‌دانان، با کمک داده‌های آماری جمعیت، تلاش می‌کنند به تابع تخمین جمعیت دست یابند و در این زمینه به نتایجی هم رسیده‌اند. این تابع نشان می‌دهد که مثلاً در سال ۱۴۲۰ جمعیت ایران چه تعداد خواهد بود. با این همه، در عمل معمولاً وارون این تابع نیز اهمیت دارد؛ به عنوان مثال مهم است که مشخص کنیم در چه سالی جمعیت ایران به ۱۰۰ میلیون نفر خواهد رسید. در فصل پنجم با نمونه‌ای از توابع تخمین جمعیت آشنا خواهید شد.

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به‌دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را **وارون** تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

برای مثال وارون تابع $f=\{(۱,۲),(۳,۵),(۴,۶)\}$ برابر با $f^{-1}=\{(۲,۱),(۵,۳),(۶,۴)\}$ است.

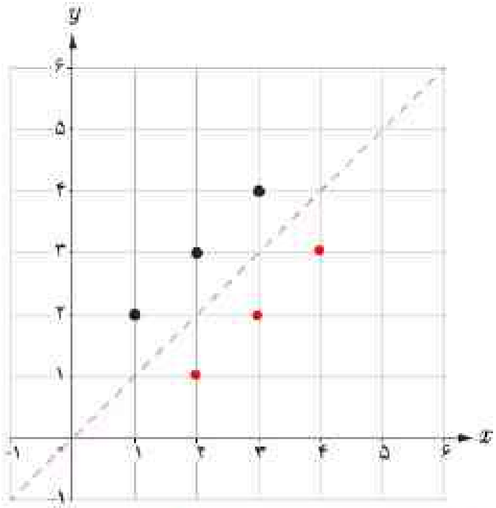
کار در کلاس

وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$s^{-1}=\{(۱,۴),(۴,۱),(۳,۳),(۵,۲)\}$	$s=\{(۴,۱),(۱,۴),(۳,۳),(۲,۵)\}$
$t^{-1}=\{(۱,۵),(۴,۱),(۳,۴),(۳,۲)\}$	$t=\{(۵,۱),(۱,۴),(۴,۳),(۲,۳)\}$
$u^{-1}=\{(۳,۲),(۲,۵),(۱,۴),(۴,۳)\}$	$u=\{(۲,۳),(۵,۲),(۴,۱),(۳,۴)\}$

فعالیت

۱) در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است.



الف) تابع f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

$f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$

ب) تابع $f^{-۱}$ را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

$f^{-۱} = \{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳)\}$

پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.

ت) نمودار f و $f^{-۱}$ چه ارتباطی با هم دارند؟

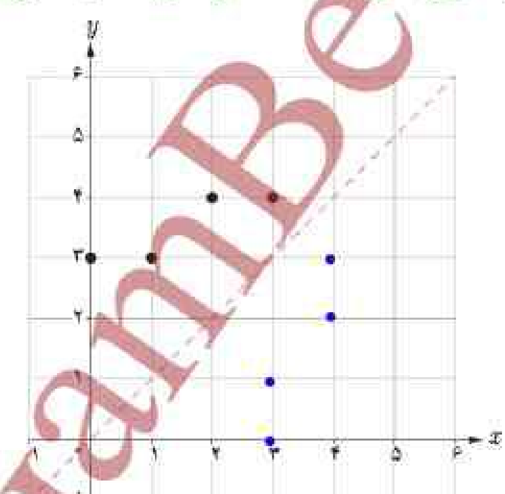
نمودار ها دو طرف خطچین قرمز رنگ قرار دارند ونسبت به این خط قرینه اند زیرا اگر هر نقطه را روی نمودار f به نقطهٔ تظیرش روی نمودار $f^{-۱}$ وصل کنیم این خط عمود منصف پاره خط ایجاد شده خواهد بود.

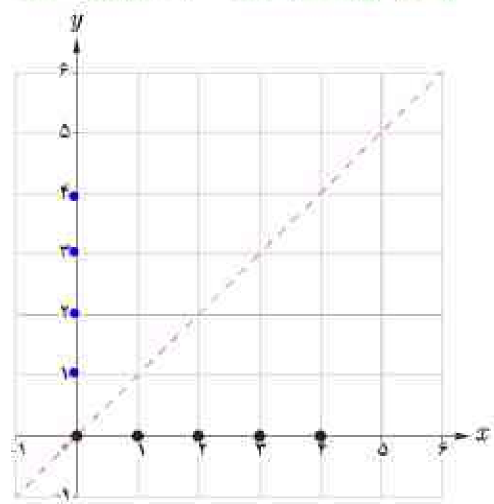
«نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y = x$ قرینهٔ یکدیگرند.»

۲) الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع است و سپس وارون آن را رسم کنید.

نمودار ها معرف یک تابع هستند زیرا برای هر x فقط یک y وجود دارد.

می توانیم خط هایی موازی محور y ها رسم کنیم ملاحظه می شود که نمودار ها فقط در یک نقطه این خطوط را قطع خواهند کرد. همچنین می توانیم هر یک از توابع را به صورت زوج مرتب نمایش دهیم و مشاهده می کنیم که مؤلفه اول تکراری نداریم.



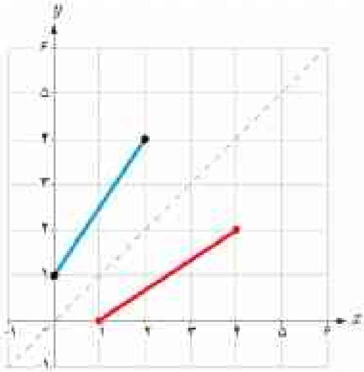


ب) عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است که قرینهٔ نمودار آن تابع را نسبت به خط $y = x$ رسم کنید.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

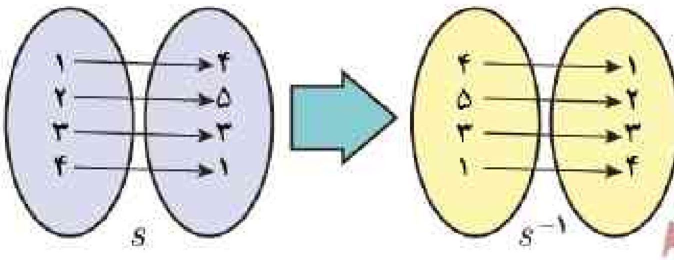
۳ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

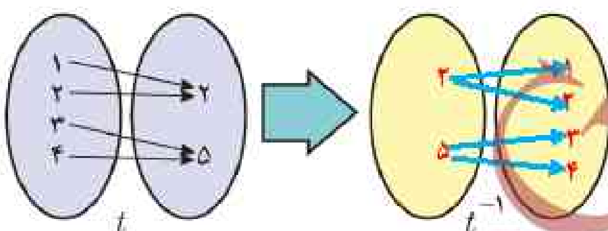


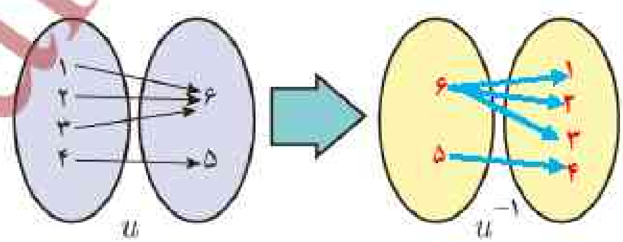
تابع یک به یک

فعالیت

۱ الف) به نمونهٔ حل شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به دست آورید.







ب) درستی یا نادرستی عبارات روبه‌رو را تعیین کنید.

s یک تابع است.	بله■ خیر□
t^{-1} یک تابع است.	بله□ خیر■
u^{-1} یک تابع است.	بله□ خیر■

پ) عبارت زیر را کامل کنید.

وارون تابع f، خود یک تابع است هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه‌های ...... دوم ...... تکراری وجود نداشته باشند.

به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع **یک‌به‌یک** می‌گویند.

تذکر : وارون هر تابع یک‌به‌یک، خود یک تابع است.

ت) تابع $f=\{(1,2),(-2,4),(1,-2),(-1,2)\}$ را در نظر بگیرید. بدون محاسبهٔ f^{-1}، تعیین کنید که این تابع یک‌به‌یک است یا خیر؟

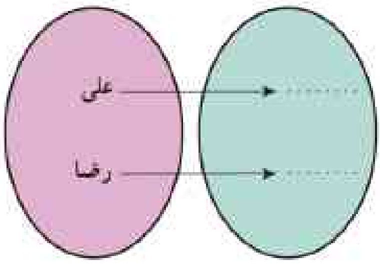
خیر ، زیرا همانطور می بینم مولفه های دوم در زوج های مرتب متفاوت تکراری است پس این تابع یک به یک نیست.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

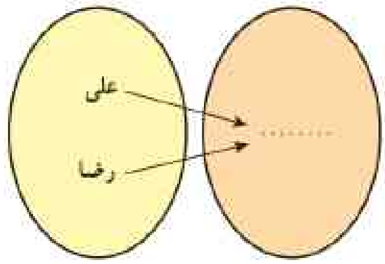
۲ نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.

الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

نمودار پیکانی f مربوط به اثر انگشت و نمودار پیکانی g مربوط به گروه خونی است.



f



g

ب) آیا f و g هر دو تابع‌اند؟

بله هردو تابع هستند زیرا هر شخص فقط یک اثر انگشت و یک نوع گروه خونی دارد.

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان گفت؟

f^{-1} تابع است اما g^{-1} تابع نیست.

ت) کدام‌یک از دو تابع f و g یک‌به‌یک هستند؟

تابع f یک به یک است ولی تابع g یک به یک نیست.

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود.

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

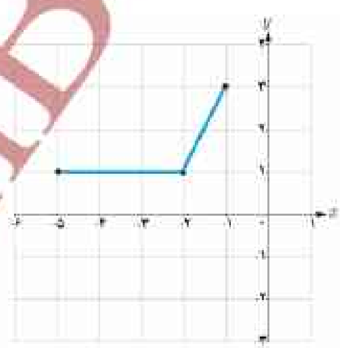
خواندنی

قرن‌ها پیش رشیدالدین فضل‌الله همدانی، طبیب و مورخ برجستهٔ ایرانی در کتاب جامع التواریخ به رسم چینی‌ها در شناسایی افراد از طریق اثر انگشت اشاره کرده و توضیح داده بود که «شواهد و تجربیات نشان می‌دهد که اثر انگشت هیچ دو نفری کاملاً یکسان نیست». در آن زمان در ایران نیز از اثر انگشت دست برای مهر کردن اسناد استفاده می‌کردند. در اوایل قرن بیستم، غربی‌ها نیز با الهام گرفتن از شرقی‌ها برای شناسایی در تحقیقات جنایی از اثر انگشت بهره گرفتند. امروزه تشخیص اثر انگشت به عنوان یکی از دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش بیومتریک در حفظ امنیت سیستم‌های کنترل دسترسی و همچنین در ساعت‌های حضور و غیاب، کاربرد بسیاری دارد.

فعالیت

۱ در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.

الف) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک‌به‌یک است؟



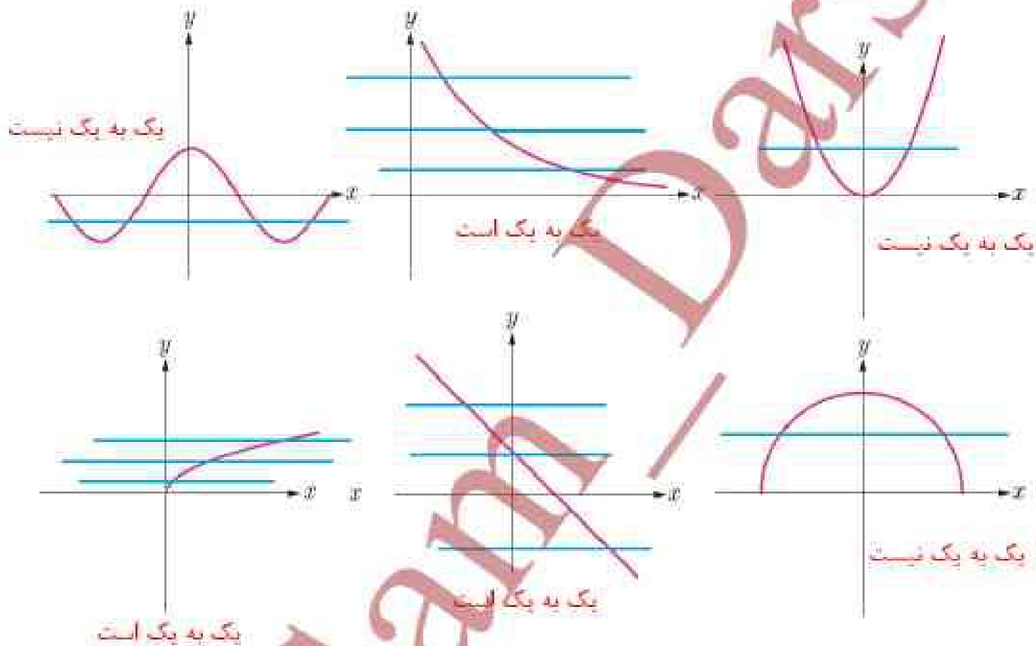
خیر یک به یک نیست ،زیرا نقاطی که روی پاره خط موازی محور طول ها قرار دارند همگی یک عرض دارند به عبارتی نقاط متفاوت مؤلفه ی دوم یکسان دارند.

ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟

اگر هر خطِ موازی محور طول ها (x ها) نمودار یک تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک به یک است.

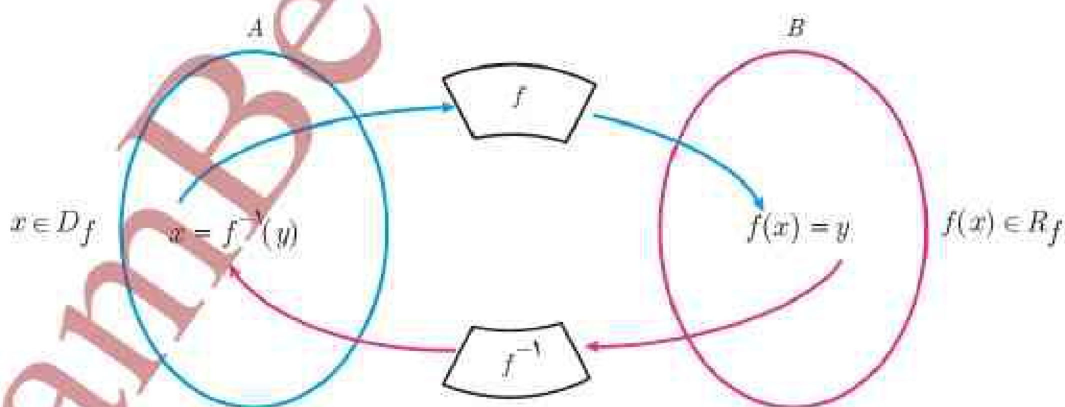
برای تشخیص دادن این که یک تابع یک به یک است یا خیر کافی است خط یا خطوطی موازی محور طول ها (**x** ها) رسم کنیم اگر نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند می گوییم تابع یک به یک نیست.

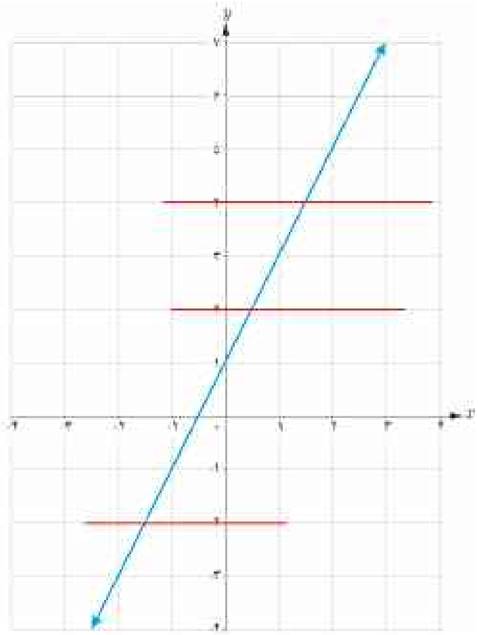
۲ کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟



به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد. (R_f نماد برد تابع f است).





فعالیت

تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ را در نظر می‌گیریم.

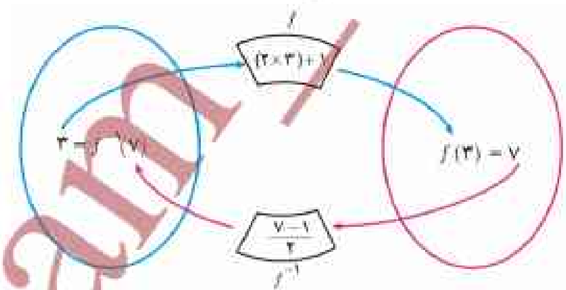
الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

هماتطور که مشاهده می شود اگر خط یا خطوطی موازی محور طول ها رسم کنیم نمودار را حد اکثر در یک نقطه قطع می کند .

ب) نمودار زیر را توضیح دهید :

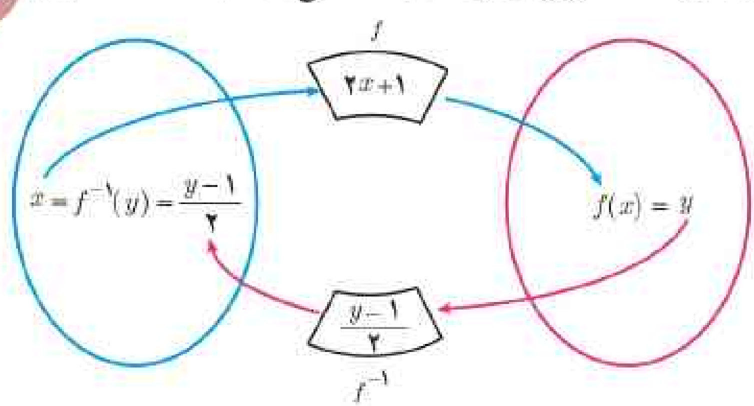
$(۳,۷) \in f$ و $(۷,۳) \in f^{-۱}$

به عبارت دیگر $f(۳) = ۷$ و $f^{-۱}(۷) = ۳$



۳ عضوی از دامنه تابع **f** است که با توجه به ضابطهٔ تابع **f** ابتدا دو برابر می شود سپس یک واحد به آن اضافه می شود و مقدار برد به دست می آید که ۷ است . حالا عدد ۷ عضوی از برد تابع **f** است و عضوی از دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ است که از آن یک واحد کم می شود سپس حاصل نصف می شود تا عدد ۳ به دست آید. که عدد ۳ حالا عضوی از برد تابع $f^{-۱}$ است .

پ) در حالت کلی برای هر عضو دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ ، داریم :



ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$f(x) = ۲x+۱ \qquad (x \in D_f)$$

$$f^{-۱}(y) = \frac{y-۱}{۲} \qquad (y \in R_f)$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای f به‌صورت زیر است :

$$f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۲}$$

به‌طور کلی :
برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f، در معادله $y = f(x)$ ، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

وارون تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ ، چنین محاسبه می‌شود :

$$f(x) = ۲x+۱ \Rightarrow y = ۲x+۱$$
$$\Rightarrow ۲x = y-۱$$
$$\Rightarrow x = \frac{y-۱}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(y) = \frac{y-۱}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۲}$$

کار در کلاس

۱ هر تابع خطی غیرثابت یک‌به‌یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به‌دست آورید.

توابع خطی غیر ثابت یک به یک هستند زیرا هرگاه خطی موازی محور **x** ها رسم کنیم نمودار را فقط در یک نقطه قطع می کند.

اما نمودار توابع ثابت خطی موازی محور طول ها است و هر دو زوج مرتب متفاوت دارای مؤلفه دوم یکسان هستند. پس نمی تواند یک به یک باشد.

الف) $f(x) = x+۵$

$y = x + ۵ \Rightarrow x + ۵ = y$

$\Rightarrow x = y - ۵ \Rightarrow f^{-۱}(x) = x - ۵$

ب) $g(x) = ۴x$

$y = ۴x \Rightarrow ۴x = y$

$\Rightarrow x = \frac{۱}{۴}y \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۴}x$

پ) $u(x) = ۲x+۳$

$y = ۲x + ۳ \Rightarrow ۲x + ۳ = y$

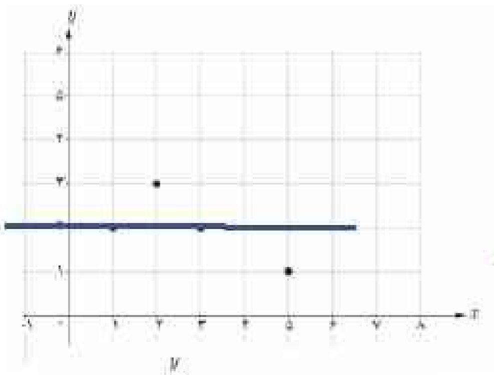
$\Rightarrow ۲x = y - ۳ \Rightarrow x = \frac{y-۳}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x-۳}{۲}$

ت) $v(x) = \frac{۲}{۳}x - ۴$

$y = \frac{۲}{۳}x - ۴ \Rightarrow y = \frac{۲x-۱۲}{۳} \Rightarrow ۳y = ۲x - ۱۲$

$\Rightarrow ۲x - ۱۲ = ۳y \Rightarrow ۲x = ۳y + ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۳y+۱۲}{۲}$

$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۳x+۱۲}{۲}$



۲ الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک نیست؟

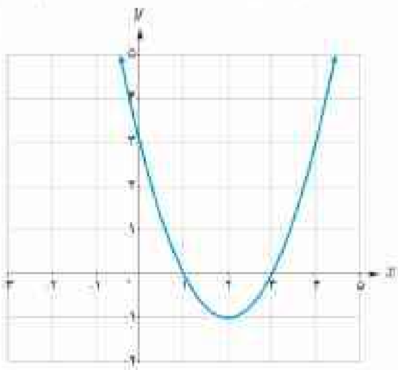
زیرا اگر خطی مانند $y = ۲$ را رسم کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می کنند.

ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنید.

مسئله چند جواب دارد؟

می توانیم نقطهٔ (۲،۲) یا (۱،۲) را حذف کنیم تا نمودار تبدیل به یک تابع شود.

کار در کلاس



الف) به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^2 - ۴x + ۳$ در شکل مقابل، دقت کنید.

با محدود کردن دامنهٔ این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟

☐ $[۱,۴)$

☑ $[۰,۲]$

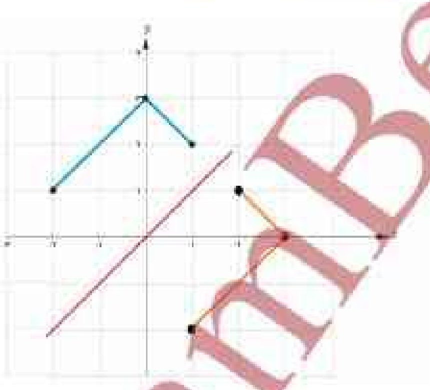
ب) آیا هر تابع درجهٔ ۲، تابعی یک‌به‌یک است؟ چرا؟

در حالت کلی خیر زیرا وقتی خطی موازی محورطول ها رسم می کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می کند. مگر اینکه دامنهٔ تابع را محدود کنیم .

تمرین

۱ وارون تابع $\{(۲,۳), (-۲,۱), (-۱,۲)\}=f$ را به‌دست آورید. $f^{-1} = \{(۳,۲), (۱,-۲), (۲,-۱)\}$

۲ نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.



۳ ضابطهٔ وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف) $f(x) = ۵x - ۲$

$y = ۵x - ۲ \Rightarrow ۵x - ۲ = y \Rightarrow ۵x = y + ۲$

$\Rightarrow x = \dfrac{y+۲}{۵} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+۲}{۵}$

ب) $f(x) = \dfrac{۳}{۵}x + ۴$

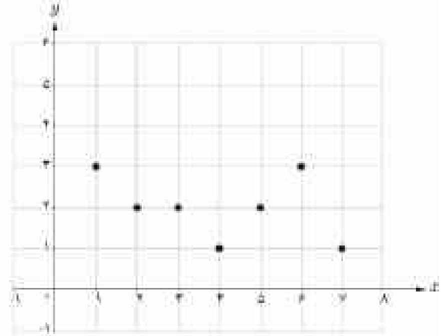
$y = \dfrac{۳}{۵}x + ۴ \Rightarrow ۵y = ۳x + ۲۰ \Rightarrow ۳x + ۲۰ = ۵y$

$\Rightarrow ۳x = ۵y - ۲۰ \Rightarrow x = \dfrac{۵y - ۲۰}{۳} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{۵x - ۲۰}{۳}$

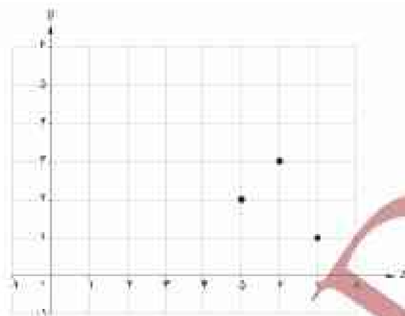
ج) $f(x) = \dfrac{-۷x + ۳}{۵}$

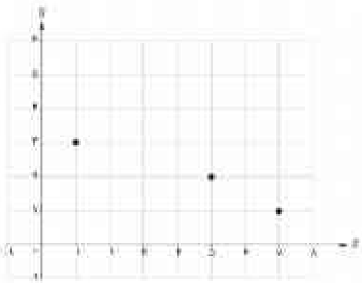
$y = \dfrac{-۷x+۳}{۵} \Rightarrow ۵y = -۷x + ۳ \Rightarrow ۷x = -۵y + ۳ \Rightarrow x = \dfrac{-۵y+۳}{۷} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{-۵x+۳}{۷}$

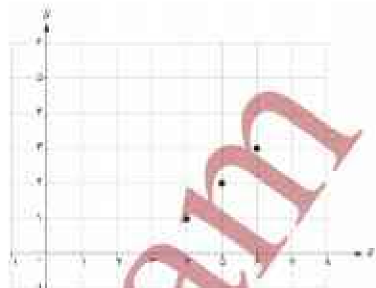
۴ می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می‌تواند باقی بماند؟

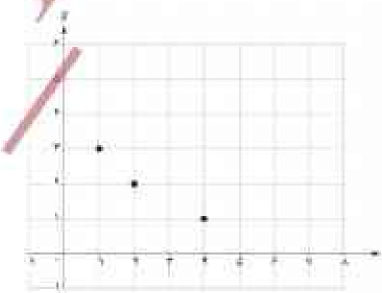


حد اکثر ۳ نقطه می تواند باقی بماند.
در شکل ها ی زیر چند حالت را رسم کرده ایم.



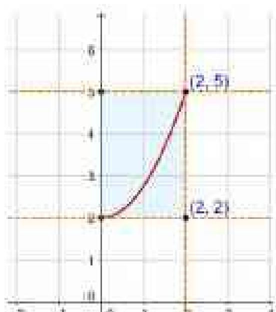






۵ نمودار تابعی با دامنهٔ [۰,۲] و برد [۲,۵] را رسم کنید :

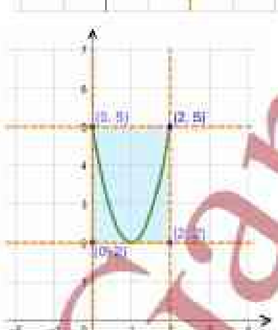
الف) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک باشد.



نمودار تابع هایی مانند $g(x)=\frac{-3}{2}x+5$ ، $f(x)=\frac{5}{2}x$ و $f(x)=\frac{3}{4}x^2+2$ با دامنه [۰, ۲] و برد [۲, ۵] یک به یک است.

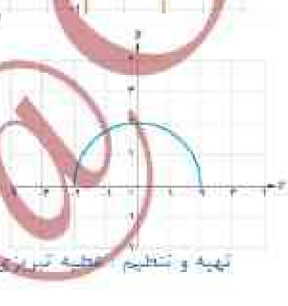
البته بی شمار تابع خطی و غیر خطی یک به یک می توان پیدا کرد.

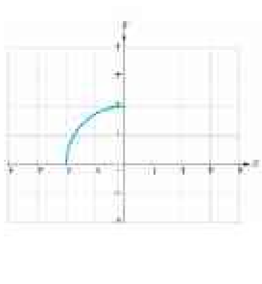
ب) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک نباشد.

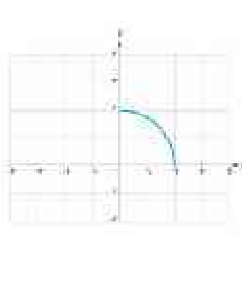


نمودار تابع $f(x)=3x^2-6x+5$ با دامنه [۰, ۲] و برد [۲, ۵] رسم شده است این تابع یک به یک نیست.

۶ با حذف بخشی از نمودار نیم‌دایرهٔ داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص کنید.







دامنه تابع نیم دایره [۲, ۲-] است اگر دامنه را به صورت [۰, ۲] یا [۰, ۲-] محدود کنیم آنگاه نمودار یک تابع یک به یک را مشخص می کند.

درس سوم

اعمال جبری روی توابع

اگر f و g به‌ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این‌صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

نام عمل	تعریف ضابطه	تعریف دامنه
جمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$
ضرب*	$(f.g)(x)=f(x).g(x)$	$D_{f.g}=D_f\cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}$

فعالیت

اگر $f(x)=2x-1$ و $g(x)=x-2$، آن‌گاه مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و حاصل‌تقسیم آنها $(\frac{f}{g})$ را به‌دست آورید و دامنهٔ هر یک را مشخص کنید.

حل :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x-1)+(x-2)=3x-3$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x-1)-(x-2)=x+1$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(2x-1).(x-2)=2x^2-5x+2$$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(2x-1)}{(x-2)}$$

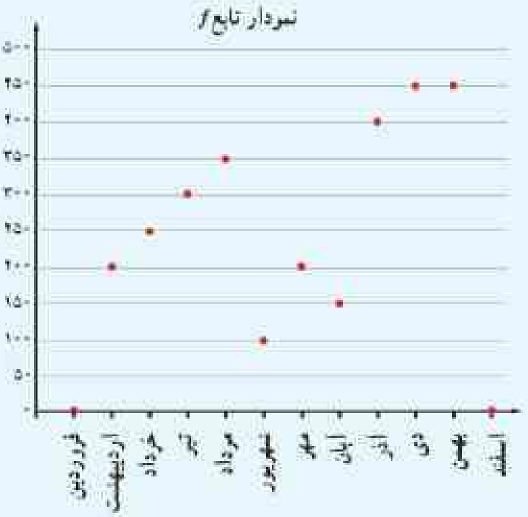
$$D_{\frac{f}{g}}=\left(D_f\cap D_g\right)-\{x\mid g(x)=0\}=\left(\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\right)-\{x\mid x-2=0\}=\mathbb{R}-\{2\}$$

*ضرب دو تابع f و g را با نمادهای $f\times g$ و یا fg هم نشان می‌دهند.

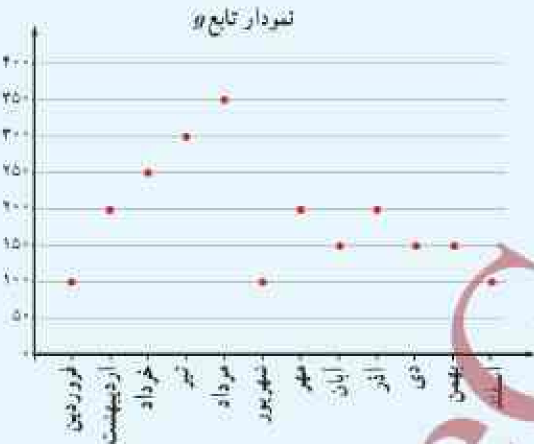
خواندنی

علی در یک کارگاه خانگی، محصولات دست‌دوز چرمی تولید می‌کند. او بخشی از مواد و لوازم مورد نیاز خود را از فروشگاه چرم و بخشی را از فروشگاه ابزار و یراق خریداری می‌کند. وی پس از تولید محصولاتی هنری، آنها را در بازارچه‌های کارآفرینی به فروش می‌رساند. نمودارهای زیر مقدار خرید او را در یک سال نشان می‌دهد.

نمودار تابع f نشان می‌دهد که در هر ماه سال گذشته، چند هزار تومان چرم خریداری شده است؛ برای مثال با توجه به شکل، $f(\text{تیر}) = ۳۰۰$. پس این هنرمند در چهارمین ماه سال، ۳۰۰ هزار تومان چرم خریده است.



نمودار تابع g نشان می‌دهد که این هنرمند در هر ماه سال گذشته چند هزار تومان ابزار و یراق خریده است.



پس در واقع هزینه‌ای که علی در کارگاه خود دارد، شامل دو بخش است؛ هزینهٔ چرم و هزینهٔ ابزار و یراق.

به زبان ساده، «هزینهٔ» او شامل قیمت همهٔ مواد و لوازم خریداری شده است. در شکل روبه‌رو نمودار تابع هزینهٔ خرید علی در سال گذشته رسم شده است. این تابع را با c نشان می‌دهیم.

الف) بر روی شکل، درستی مقدارهای تابع c را برای ماه‌های فصل زمستان بررسی کنید.

ب) آیا برای هر x در دامنهٔ تابع c، $c(x) = f(x) + g(x)$ درست است؟

همچنان که می‌بینید برای به‌دست آوردن مقادیر تابع c، مقادیر دو تابع f و g را با هم جمع می‌کنیم.

کار در کلاس

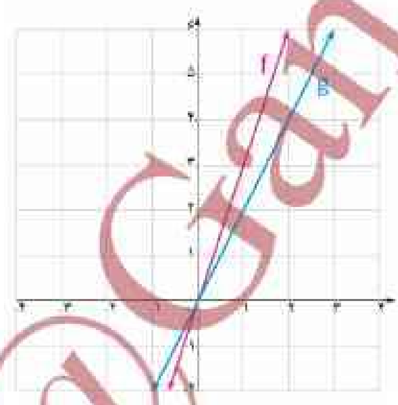
۱ دربارهٔ دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲+۳x+۱$ و $g(x)=x-۳$ جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=x^۲+۴x-۲$	$D_{f+g}=\mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x)=x^۲+۲x+۴$	$D_{f-g}=\mathbb{R}$
$f.g$	$(f.g)(x)=x^۳+۳x^۲-۲x-۳$	$D_{fg}=\mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^۲+۳x+۱}{x-۳}$	$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-(۳)$

۲ دربارهٔ دو تابع با ضابطهٔ $u(x)=\sqrt{x}+۱$ و $v(x)=x-۱$ جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x)=\sqrt{x}+۱+x-۱=\sqrt{x}+x$	$D_{u+v}=[۰,+\infty)\cap\mathbb{R}=[۰,+\infty)$
$u-v$	$(u-v)(x)=\sqrt{x}+۱-(x-۱)=\sqrt{x}-x+۲$	$D_{u+v}=[۰,+\infty)\cap\mathbb{R}=[۰,+\infty)$
$u.v$	$(u.v)(x)=(\sqrt{x}+۱)(x-۱)=\sqrt{x}(x-۱)+x-۱$	$D_{u+v}=[۰,+\infty)\cap\mathbb{R}=[۰,+\infty)$
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)(x)=\frac{\sqrt{x}+۱}{x-۱}$	$D_{u+v}=([۰,+\infty)\cap\mathbb{R})-\{۱\}=[۰,+\infty)-\{۱\}$

فعالیت



مطابق شکل، دو تابع f و g به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند.

الف) ضابطهٔ دو تابع f و g را به‌دست آورید.

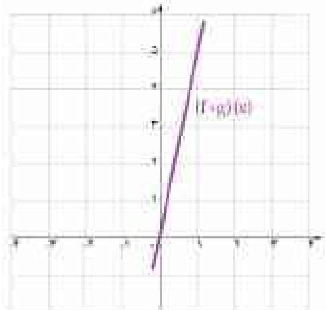
$f(x)=۳x$ $\qquad$ $g(x)=۲x$

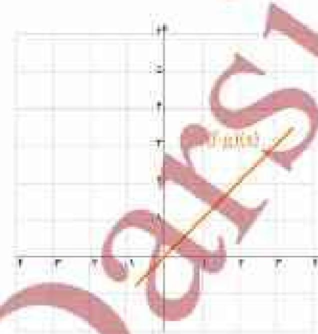
ب) ضابطهٔ دو تابع $f+g$ و $f-g$ را به‌دست آورید.

$(f-g)(x)=۳x-۲x=x$ $\qquad$ $(f+g)(x)=۳x+۲x=۵x$

پ) با تکمیل جدول مقابل، نمودارهای توابع $f+g$ و $f-g$ را با رنگ‌های مختلف رسم کنید.

x	۰	۱
$f(x)$	۰	۳
$g(x)$	۰	۲
$(f+g)(x)$	۰	۵
$(f-g)(x)$	۰	۱





ت) آیا جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است؟ در مورد تفریق آنها چه می‌توان گفت؟

بله جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax + b \\ g(x) = a'x + b' \end{array}\right\} \Rightarrow (f+g)(x) = ax + b + a'x + b'$$

$$(f+g)(x) = (a+a')x + (b+b') \xrightarrow[b+b'=B]{a+a'=A} (f+g)(x) = Ax + B$$

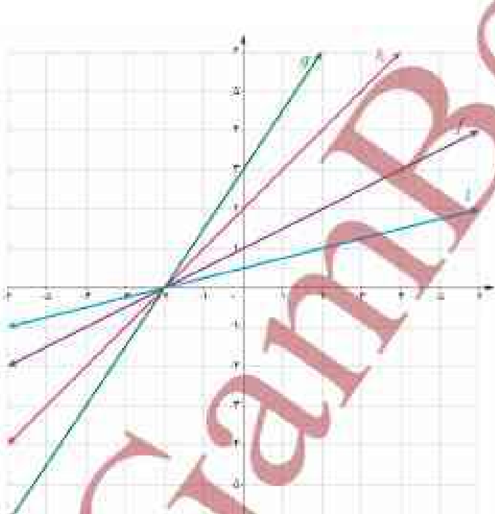
بله تفریق دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax + b \\ g(x) = a'x + b' \end{array}\right\} \Rightarrow (f-g)(x) = (ax+b) - (a'x+b')$$

$$(f-g)(x) = (a-a')x + (b-b') \xrightarrow[b-b'=B]{a-a'=A} (f+g)(x) = Ax + B$$

$$\xrightarrow[b\neq b']{a=a'} (f-g)(x) = B$$

$$\xrightarrow[b=b']{a=a'} (f-g)(x) = ۰$$



فعالیت

با توجه به شکل دیده می‌شود که $l(x)=\frac{۱}{۲}f(x)$. جاهای خالی را پر کنید.

$g(x) = $ ...۳... $f(x)$

$h(x) = $ ...۲... $f(x)$

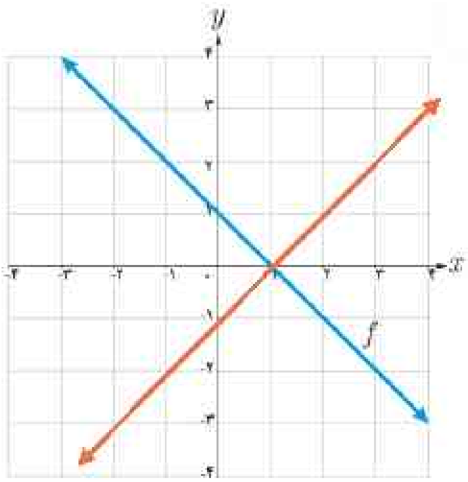
$f(x) = \frac{۱}{۲}x + ۱$ ، $l(x) = \frac{۱}{۴}x + \frac{۱}{۲}$ ، $h(x) = x + ۲$ ، $g(x) = \frac{۳}{۲}x + ۳$

$\Rightarrow l = \frac{۱}{۲}f$ ، $h = ۲f$ ، $g = ۳l$

با توجه به نمودار فوق ملاحظه می‌شود که :

اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

کار در کلاس



۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -f(x)$ را رسم کنید.

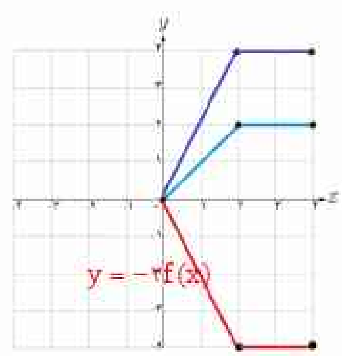
$y = f(x) \Rightarrow f(۰) = ۱ \ , \quad f(۱) = ۰$

$y = -f(x) \Rightarrow y = -f(۰) = -۱ \Rightarrow (۰, -۱)$

$y = -f(x) \Rightarrow y = -f(۱) = ۰ \Rightarrow (۱, ۰)$

۲ عبارت زیر را کامل کنید.

> برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -f(x)$ کافی است قرینهٔ نمودار تابع ضابطهٔ $y = f(x)$ را نسبت به محور طول ها (x ها) رسم کنیم.



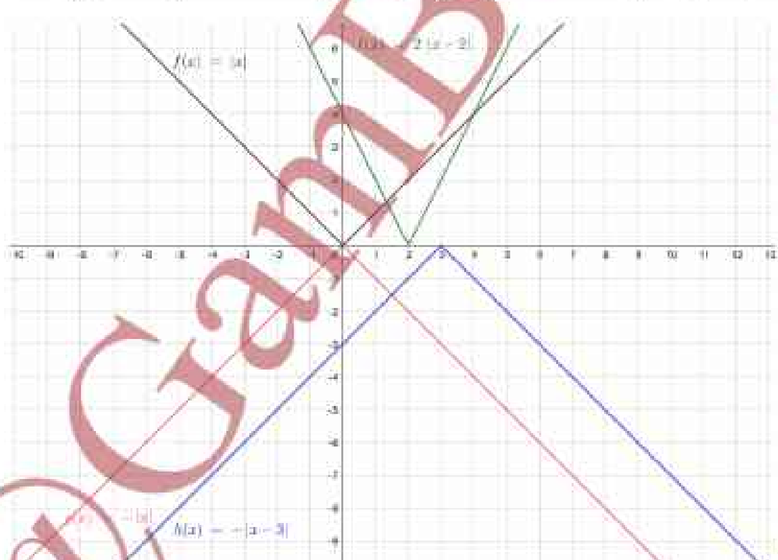
۳ در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده‌شده است. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -۲f(x)$ را رسم کنید.

ابتدا عرض هر نقطه را ۲ برابر می کنیم و نمودار جدید را رسم می کنیم ،سپس قرینهٔ نقاط جدید را نسبت به محور طول ها (x ها) به دست می آوریم و نقاط را به هم وصل می کنیم.

تمرین

۱ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x|$، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -|x|$ ب) $h(x) = -|x-۳|$ پ) $l(x) = ۲|x-۲|$



الف) $g(x) = -f(x)$

کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

ب) $h(x) = -f(x-۳)$

باید نمودار تابع f را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم و ۳واحد روی محور طول ها به سمت مثبت ها حرکت کنیم.

پ) $l(x) = ۲f(x-۲)$

باید نمودار تابع f را روی محور طول ها ۲ واحد به سمت مثبت ها حرکت داده وبه ازای هر طول عرض را دو برابر کنیم.

۲ در هر مورد، دامنه و ضابطهٔ حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف) $g(x)=x$ $\quad f(x)=|x|$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=\lvert x\rvert+x$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x)=\lvert x\rvert-x$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$f.g$	$(f.g)(x)=\lvert x\rvert x=x\lvert x\rvert$	$D_{fg}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}=\mathbb{R}-\{0\}$

ب) $g(x)=x+۲$ $\quad f(x)=x^۲-۴$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=x^۲-۴+x+۲=x^۲+x-۲$	$D_{f+g}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x)=x^۲-۴-(x+۲)=x^۲-x-۶$	$D_{f-g}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$f.g$	$(f.g)(x)=(x^۲-۴)(x+۲)=x^۳+۲x^۲-۴x-۸$	$D_{fg}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^۲-۴}{(x+۲)}=x-۲$	$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-۲\}$

پ) $g(x)=-\sqrt{x}$ $\quad f(x)=\sqrt{x}$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+(-\sqrt{x})=0$	$D_{f+g}=[0,+\infty)$
$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-(-\sqrt{x})=۲\sqrt{x}$	$D_{f-g}=[0,+\infty)$
$f.g$	$(f.g)(x)=\sqrt{x}(-\sqrt{x})=-x$	$D_{fg}=[0,+\infty)$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}}=-۱$	$D_{\frac{f}{g}}=[0,+\infty)-\{0\}=(0,+\infty)$

ت) $g(x)=x^{۲}+۳x-۱۰ \qquad f(x)=\dfrac{x-۲}{x+۵}$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=\dfrac{x^{۳}+۸x^{۲}+۶x-۵۲}{x+۵}$	$D_{f+g}=\mathbb{R}-\{-۵\}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}-\{-۵\}$
$f-g$	$(f-g)(x)=\dfrac{-x^{۳}-۸x^{۲}-۴x+۴۸}{x+۵}$	$D_{f-g}=\mathbb{R}-\{-۵\}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}-\{-۵\}$
$f.g$	$(f.g)(x)=(x-۲)^{۲}$	$D_{f.g}=\mathbb{R}-\{-۵\}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}-\{-۵\}$
$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{۱}{(x+۵)^{۲}}$	$D_{\frac{f}{g}}=(\mathbb{R}-\{-۵\}\cap\mathbb{R})-\{۲\}$ $=\mathbb{R}-\{-۵,۲\}$

$$(f+g)(x)=\frac{x-۲}{x+۵}+x^{۲}+۳x-۱۰=\frac{x-۲+x^{۳}+۳x^{۲}-۱۰x+۵x^{۲}+۱۵x-۵۰}{x+۵}\Rightarrow(f+g)(x)=\frac{x^{۳}+۸x^{۲}+۶x-۵۲}{x+۵}$$

$$(f-g)(x)=\frac{x-۲}{x+۵}-(x^{۲}+۳x-۱۰)=\frac{x-۲-x^{۳}-۳x^{۲}+۱۰x-۵x^{۲}-۱۵x+۵۰}{x+۵}\Rightarrow(f+g)(x)=\frac{-x^{۳}-۸x^{۲}-۴x+۴۸}{x+۵}$$

$$(f.g)(x)=\left(\frac{x-۲}{x+۵}\right)(x^{۲}+۳x-۱۰)=\frac{(x-۲)}{(x+۵)}(x+۵)(x-۲)\Rightarrow(f+g)(x)=(x-۲)^{۲}$$

$$(f.g)(x)=\left(\frac{x-۲}{x+۵}\right)\div(x^{۲}+۳x-۱۰)=\frac{(x-۲)}{(x+۵)}\times\frac{۱}{(x+۵)(x-۲)}\Rightarrow(f+g)(x)=\frac{۱}{(x+۵)^{۲}}$$

ث) $g=\{(-۱,۲),(۰,۳),(۲,۴),(۳,۰)\} \qquad f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۰,-۲)\}$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=\{(۲,۹),(۳,۴),(۰,۱)\}$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{۰,۲,۳\}$
$f-g$	$(f-g)(x)=\{(۲,۱),(۳,۴),(۰,-۵)\}$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\{۰,۲,۳\}$
$f.g$	$(f.g)(x)=\{(۲,۲۰),(۳,۰),(۰,-۶)\}$	$D_{f.g}=D_f\cap D_g=\{۰,۲,۳\}$
$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\{(۲,\frac{۵}{۴}),(۰,\frac{-۲}{۳})\}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}=\{۰,۲\}$

$\left.\begin{array}{l}f(۲)=۵\\g(۲)=۴\end{array}\right\}\Rightarrow(f+g)(۲)=۵+۴=۹$
$\left.\begin{array}{l}f(۳)=۴\\g(۳)=۰\end{array}\right\}\Rightarrow(f+g)(۳)=۴+۰=۴$
$\left.\begin{array}{l}f(۰)=-۲\\g(۰)=۳\end{array}\right\}\Rightarrow(f+g)(۰)=-۲+۳=۱$

$\left.\begin{array}{l}f(۲)=۵\\g(۲)=۴\end{array}\right\}\Rightarrow(f-g)(۲)=۵-۴=۱$
$\left.\begin{array}{l}f(۳)=۴\\g(۳)=۰\end{array}\right\}\Rightarrow(f-g)(۳)=۴-۰=۴$
$\left.\begin{array}{l}f(۰)=-۲\\g(۰)=۳\end{array}\right\}\Rightarrow(f-g)(۰)=-۲-۳=-۵$

$\left.\begin{array}{l}f(۲)=۵\\g(۲)=۴\end{array}\right\}\Rightarrow(f.g)(۲)=۵\times۴=۲۰$
$\left.\begin{array}{l}f(۳)=۴\\g(۳)=۰\end{array}\right\}\Rightarrow(f.g)(۳)=۴\times۰=۰$
$\left.\begin{array}{l}f(۰)=-۲\\g(۰)=۳\end{array}\right\}\Rightarrow(f.g)(۰)=-۲\times۳=-۶$

$\left.\begin{array}{l}f(۲)=۵\\g(۲)=۴\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\dfrac{f}{g}\right)(۲)=\dfrac{۵}{۴}$
$\left.\begin{array}{l}f(۰)=-۲\\g(۰)=۳\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\dfrac{f}{g}\right)(۰)=\dfrac{-۲}{۳}$

۳ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $r(x)=۲\sqrt{x}$ ب) $s(x)=-\sqrt{x-۲}$ پ) $t(x)=-۳\sqrt{x}$

ت) $u(x)=۱-\sqrt{x}$ ث) $v(x)=۱-\sqrt{x-۳}$

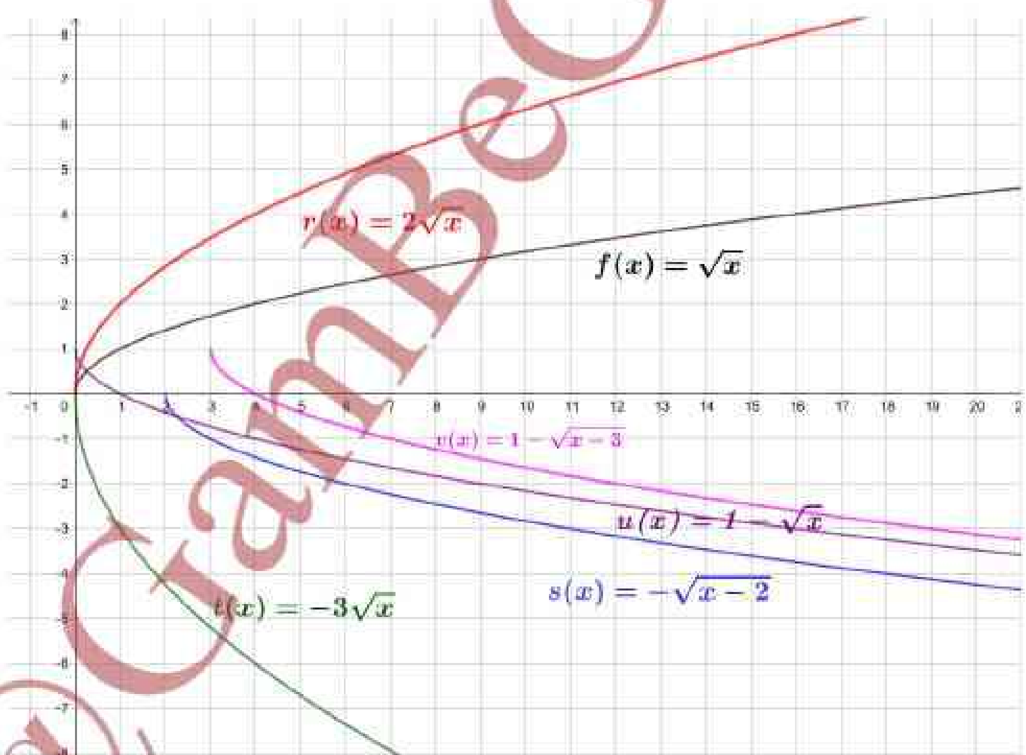
الف) با توجه به این که $r(x)=۲f(x)$ کافی است عرض های هر نقطه از نمودار f را دو برابر کنیم.

ب) با توجه به این که $s(x)=-f(x-۲)$ کافی است ابتدا نمودار f را به اندازه ی ۲ واحد روی محور طول ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم سپس آن را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

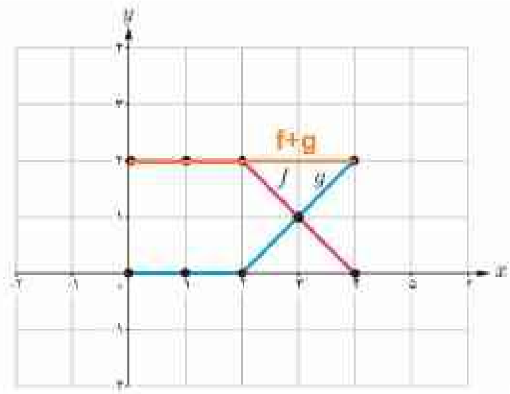
پ) با توجه به این که $t(x)=-۳f(x)$ کافی است ابتدا عرض های هر نقطه از نمودار f را سه برابر کنیم سپس نمودار را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

ت) با توجه به این که $u(x)=-f(x)+۱$ کافی است ابتدا نمودار f را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم سپس نمودار جدید را به اندازه ی ۱ واحد روی محور عرض ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم.

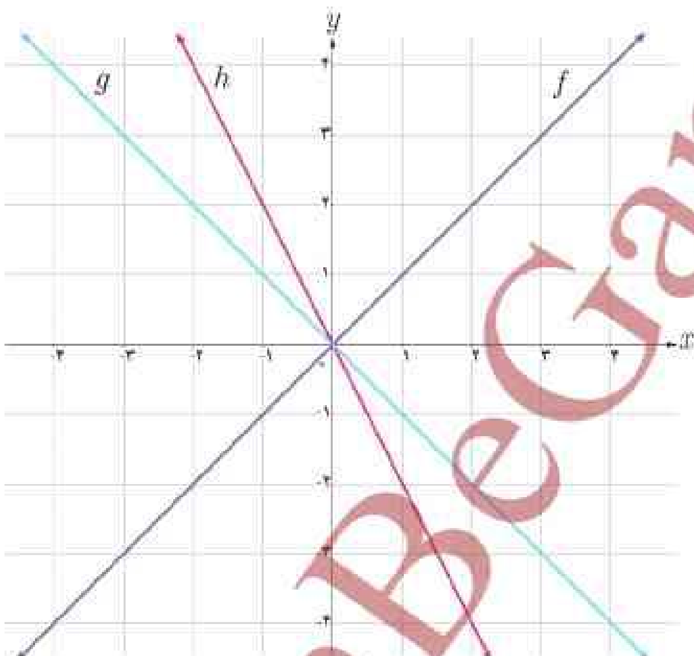
ث) با توجه به این که $v(x)=-f(x-۳)+۱$ کافی است ابتدا نمودار f رابه اندازهٔ ۳ واحد روی محور طول ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم سپس نسبت به محور طول ها قرینه کنیم بعد نمودار جدید را به اندازه ی ۱ واحد روی محور عرض ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم.



۴ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل‌جمع این دو تابع را به‌دست آورید.



۵ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام‌یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟



$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ h(1) = -2 \\ g(1) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) + h(1) = g(1) \Rightarrow (f+h)(x) = g(x)$$