به نام خدا

بخش پذیری در اعداد صحیح

تهیه و تنظیم :

محمود کامکار

KAMKAR

بخش پذیری در اعداد صحیح

تعریف : گوئیم عدد صحیح b بر عدد صحیح $a \neq 0$ بخش پذیر است اگر و تنها اگر $q \in \mathbb{Z}$ موجود باشد به قسمی که داشته باشیم : $b = aq$ در این حالت می نویسیم $a | b$ می خوانیم: ((a عاد می کند b را)) . پس :

$$a \mid b \iff b = aq \qquad q \in \mathbb{Z}$$

مثلا:

1) $5 \mid 15 \iff 15 = 5(3)$

2) $3 \mid -21 \iff -21 = 3(-7)$

3) $5 \nmid 27 \iff$ 27 مضرب 5 نیست

تذکر1: تمام عبارات زیر معادلند:

۱) $a \mid b$ ۲) b مضرب a است. ۳) a مقسوم علیه b است.

۴) a عامل b است. ۵) b بر a بخش پذیر است.

۶) a می شمارد b را. ۷) a شمارنده b است .

KAMKAR

خواص رابطه بخش پذیری(عاد کردن)

1)رابطه "|" در مجموعه اعداد صحیح خاصیت بازتابی (انعکاسی)دارد. یعنی : $a | a \quad : \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

زیرا : $\forall a \in \mathbb{Z} : a | a \Leftrightarrow a = a \times 1$ بخصوص: $q \in \mathbb{Z} \qquad 0|0 \Leftrightarrow 0 = 0 \times q$

2)رابطه "|" در $\mathbb{Z}$ دارای خاصیت تعدی (ترایایی – متعدی) است یعنی : $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}: \begin{cases} a | b \\ b | c \end{cases} \Rightarrow a | c$

اثبات: اعداد صحیح q و q' و q'' وجود دارند به طوری که :

$$\begin{cases} a | b \\ b | c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = aq \\ c = bq' \end{cases} \Rightarrow c = (aq)q' \Rightarrow c = a(qq') \Rightarrow c = aq'' \Rightarrow a | c$$

KAMKAR

ویژگی های تقسیم پذیری

به ازای اعداد صحیح a و b اگر $a|b$ آنگاه : الف: $-a|b$ ب: $a|-b$ پ: $-a|-b$

ت: $m\in\mathbb{Z}$: $a|mb$ ث: اگر $b\neq 0$ آنگاه: $|a|\leq|b|$

KAMKAR

ویژگی های تقسیم پذیری

به ازای اعداد صحیح a و b اگر $a \mid b$ آنگاه : الف: $-a \mid b$ ب : $a \mid -b$ پ : $-a \mid -b$

ت : $m \in \mathbb{Z}$: $a \mid mb$ ث: اگر $b \neq 0$ آنگاه: $|a| \leq |b|$

اثبات: اعداد صحیح q و q' و m وجود دارند به طوری که :

الف: $a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b = (-a)(-q) \Rightarrow b = (-a)q' \Rightarrow -a \mid b$

ب : $a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow -b = a(-q) \Rightarrow -b = aq' \Rightarrow a \mid -b$

پ : $a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow -b = (-a)q \Rightarrow -a \mid -b$

ت: $a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow mb = a(mq) \Rightarrow mb = aq' \Rightarrow a \mid mb$

ث: $a \mid b \Rightarrow b = aq \Rightarrow |b| = |a||q| \quad (1)$

وچون $b \neq 0$ پس $q \neq 0$ لذا $1 \leq |q|$ پس $|a| \times 1 \leq |a| \times |q|$ پس طبق رابطه (۱) نتیجه می شود: $|a| \leq |b|$

چند ویژگی دیگر : به ازای اعداد صحیح a و b و c :

الف : اگر $a | 1$ آنگاه : $a = \pm 1$ **ب)** اگر $a | b$ و $b | a$ آنگاه $a = \pm b$

پ) اگر $a|c$ و $a| b$ آنگاه : $a| mb + nc \quad (m,n \in Z)$

اثبات الف: $a | 1 \Rightarrow |a| \leq |1| \Rightarrow |a| \leq 1 \Rightarrow a = -1$ یا 0 یا $+1$

اما a نمی تواند صفر باشد زیرا $0 \nmid 1$ پس $a = \pm 1$.

اثبات ب : طبق قضیه قبل داریم:

$$\begin{cases} a | b \\ b | a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| \leq |b| \\ |b| \leq |a| \end{cases} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

KAMKAR

اثبات پ : طبق قضیه قبل اعداد صحیح m و n و q و q' وجود دارند که :

$$\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid mb \\ a \mid nc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mb = aq \\ nc = aq' \end{cases} \Longrightarrow mb + nc = aq + aq' \Longrightarrow mb + nc$$

$$= a(q + q') = aq'' \Longrightarrow a \mid mb + nc$$

تذکر۲: $mb + nc$ را ترکیب خطی از b و c گوئیم.

مثال ۱ : الف : اگر $a,b,k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ آنگاه $a \mid b$ **اگر و تنها اگر** $ak \mid bk$.

ب: اگر $a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad , a \neq 0, c \neq 0$ و $a \mid b$ و $c \mid d$ **ثابت کنید** $ac \mid bd$

حل :الف :

$$a|b \Leftrightarrow b = aq \overset{k\neq 0}{\Longleftrightarrow} bk = akq \Leftrightarrow ak|bk$$

ب:

$$\begin{cases} a \mid b \\ c \mid d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = aq \\ d = ck \end{cases} \overset{\times}{\Rightarrow} bd = acqk = acq' \Rightarrow ac \mid bd$$

KAMKAR

مثال۲: اگر $a - b| \ a$ و $a,b \in Z$ آنگاه کدام گزینه درست است ؟(آزاد ۷۷)

۱) $a \ |a - b$ ۲) $b|a - b$ ۳) $a \mid b$ ٤) $a - b| \ b$

حل: گزینه ۴ درست است زیرا داریم :

$$\begin{cases} a - b| \ a \\ a - b| \ a - b \end{cases} \Rightarrow a - b \mid a - 1(a - b) \Rightarrow a - b| \ b$$

مثال ۳ : اگر $a \mid c$ و $ab \mid c$ آنگاه کدام گزینه درست است ؟ (آزاد ۷۹)

۱) $b| \ c$ ۲) $a + b| \ c$ ۳) $a - b \mid c$ ۴) $a^2 \mid c$

حل: گزینه ۱ درست است زیرا:

$$ab| \ c \Rightarrow c = (ab)q = b(aq) = bq' \Rightarrow b| \ c$$

KAMKAR

تمرین۱ : اگر برای اعداد صحیح a و b و c اگر $a|bc$ آیا می توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b یا c را عاد می کند؟

تمرین ۲: اگر $a \mid b$ و m و n دو عدد طبیعی باشند نشان دهید :

الف : $a \mid b^n$

ب: $a^m | b^n \quad (m \leq n)$

ج: $a^n | b^n$

KAMKAR

تمرین ۳ : اگر a و b دو عدد طبیعی فرد باشند ثابت کنید: $2 | a^2 + b^2$ ولی $4 \nmid a^2 + b^2$ (خرداد ۸۰)

تمرین ۴ : اگر $5|4k + 1$ نشان دهید $25 \mid 16k^2 + 28K + 6$.

KAMKAR

تمرین۵ : نشان دهید حاصل جمع هر چهار عدد صحیح فرد متوالی مضرب ۸ است. (مرداد ۷۹)

تمرین ۶ : الف : اگر $a \neq 0$ عددی صحیح باشد و دو عدد $5 + 6m$, $7m + 6$ بر a بخش پذیر باشند .نشان دهید $a = \pm 1$

ب: اگر a عددی طبیعی و دو عدد $7k + 6$ و $9k + 7$ را عاد کند نشان دهید $a = 1$ یا $a = 5$.

KAMKAR

نکته۱: حاصل ضرب k عدد طبیعی متوالی مضرب $k!$ است.

KAMKAR

نکته۱: حاصل ضرب k عدد طبیعی متوالی مضرب $k!$ است.

اثبات : می دانیم برای عدد طبیعی n ، $\binom{n}{k}$ برای $1 \leq k \leq n$ همواره عدد طبیعی است . پس می توان نوشت:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-k+k)}{k!} = q \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-k+k) = k!\,(q) \qquad q \in \mathbb{N}$$

با فرض $n-k=m$ داریم: $(m+1)(m+2)\ldots(m+k) = k!\,q$ پس حاصل ضرب k عدد طبیعی متوالی مضرب $k!$ است. مثلا حاصل ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی مضرب $3! = 6$ است و حاصل ضرب ۵ عدد متوالی مضرب $5! = 120$ است.

KAMKAR

مثال۴: اگر n عددی طبیعی و زوج باشد ثابت کنید : $48 \mid n^3 - 4n$

حل : چون n زوج است پس: $n = 2k \quad k \in Z$ لذا داریم :

$$n^3 - 4n = (2k)^3 - 4(2k) = 8k^3 - 8k = 8k(k^2 - 1) == 8(k-1)(k)(k+1)$$

$k+1$ و k و $k-1$ سه عدد صحیح متوالی اند پس حاصلضربشان مضرب $3!$ یا مضرب ۶ است پس:

$$n^3 - 4n = 8(k-1)(k)(k+1) = 8(6q) = 48q \Rightarrow 48 \mid n^3 - 4n \qquad q \in \mathbb{Z}$$

تمرین۷: اگر n عددی فرد باشد ثابت کنید: $24 \mid n^3 - n$

KAMKAR

تمرین۸ : ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی مضرب ۸ است. (دی ۷۹)

تمرین ۹: به ازای هر عدد صحیح مانند n ثابت کنید $n^3(n^2-1)$ همواره بر ۸ بخش پذیر است. (خرداد ۸۰)

KAMKAR

نکته ۲ : اگر $n-a \mid f(n)$ و $f(a) \in \mathbb{Z}$ آنگاه $n-a \mid f(a)$. (اثبات تمرین)

مثال ۵: چند عدد صحیح مانند n وجود دارد به گونه ای که n^4+1 بر $n+1$ تقسیم پذیر است؟

۱(۱ ۲ (۲ ۳ (۳ ۴ (۴

حل : داریم $n+1 \mid n^4+1 = f(n)$ و چون ریشه $n+1$ برابر ۱− است و $f(-1)=2$ عددی صحیح است پس :

$$n+1 \mid f(-1) = 2 \Rightarrow n+1 = \pm1, \pm2 \Rightarrow n = -3, -2, 0, 1$$

بنا براین ۴ مقدار صحیح برای n حاصل شد .

KAMKAR

چند ویژگی دیگر برای رابطه بخش پذیری

۱) $a^p + b^p \mid a^n - b^n$ (به شرط $\frac{n}{p}$ زوج)

۲) $a^p - b^p \mid a^n - b^n$ (به شرط $\frac{n}{p}$ طبیعی)

۳) $a - b \nmid a^n + b^n$

۴) $a^p + b^p \mid a^n + b^n$ (به شرط $\frac{n}{p}$ فرد)

۵) اگر $a^x \mid b^y$ و $\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = xt - yz \geq 0$ آنگاه می توان نتیجه گرفت: $a^z \mid b^t$

نکته۳ : برای پیدا کردن تعداد مقسوم علیه ها یا تعداد شمارنده های عدد n ، آن را به عامل های اول تجزیه می کنیم و سپس به صورت $n = {p_1}^{\alpha_1}{p_2}^{\alpha_2}{p_3}^{\alpha_3} \ldots {p_k}^{\alpha_k}$ نوشته آنگاه:

۱– تعداد مقسوم علیه های طبیعی (مثبت) n برابر است با : $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)$

۲– تعداد کل مقسوم علیه های n ، ۲ برابر تعداد مقسوم علیه های مثبت n ، است.

KAMKAR

مثال۶ : عدد ۱۲۰ در مجموعه اعداد صحیح چند شمارنده دارد ؟

حل : داریم $120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$ در نتیجه تعدا د شمارنده های مثبت و تعداد کل شمارنده ها ۱۲۰ برابر است با :

$$(3+1)(1+1)(1+1) = 16 \Longrightarrow \text{تعداد کل شمارنده ها} = 2 \times 16 = 32$$

تمرین ۱۰: تعداد عضوهای مجموعه $\{n : 65 \mid 2^n + 1\}$ از مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰ کدام است ؟ (کنکور ۶۵)

۱) ۶   ۲) ۷   ۳) ۸   ۴) ۹

KAMKAR

تمرین ۱۱: بزرگترین عضو مجموعه $A = \{n \in \mathbb{N}: 25 \mid 3^n + 4^n, n \leq 100\}$ کدام است؟

۱)۱۰۰ ۲)۹۹ ۳) ۹۸ ۴) ۹۷

KAMKAR

نکته ۴: تعداد صفرهای جلوی $n!$ عبارت است از :

$$\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{n}{5^3}\right]+\cdots+0$$

مثال ۷ : در جلوی $50!$ چند صفر وجود دارد؟

حل : $$12 = 10+2+0 = \left[\frac{50}{5}\right]+\left[\frac{50}{5^2}\right]+\left[\frac{50}{5^3}\right] = \text{تعداد صفر های جلوی } 50!$$

$$\Rightarrow 50! = A\times 10^{12}$$

KAMKAR

مثال ۸: در جلوی $\frac{600!}{60!} + \frac{400!}{40!}$ چند صفر وجود دارد؟ (آزاد ۷۸)

۱) ۲۴ ۲) ۹۰ * ۳) ۹۹ ۴) ۴۸

KAMKAR

مثال ۸: در جلوی $\frac{600!}{60!}+\frac{400!}{40!}$ **چند صفر وجود دارد؟ (آزاد ۷۸)**

۱) ۲۴   ۲) ۹۰ *   ۳) ۹۹   ۴) ۴۸

حل: چون $\frac{600!}{60!} < \frac{400!}{40!}$ پس کافي است تعداد صفر هاي جلوي $\frac{400!}{40!}$ را بيابيم.

$$\begin{cases} \text{تعداد صفر های جلوی } 400! = \left[\frac{400}{5}\right]+\left[\frac{400}{5^2}\right]+\left[\frac{400}{5^3}\right]+\left[\frac{400}{5^4}\right] = 80+16+3+0 = 99 \\ \text{تعداد صفر های جلوی } 40! = \left[\frac{40}{5}\right]+\left[\frac{40}{5^2}\right]+\left[\frac{40}{5^3}\right] = 8+1+0 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{400!}{40!} = \frac{A\times 10^{99}}{B\times 10^{9}} = \left(\frac{A}{B}\right)\times 10^{90} = c\times 10^{90} \Rightarrow \text{پس 90 صفر جلوی عبارت وجود دارد}$$

KAMKAR

نکته۵ : توان عامل اول p در $n!$ برابر است با :

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots+0$$

مثلا توان ۳ در $37!$ برابر است :

$$\left[\frac{37}{3}\right]+\left[\frac{37}{3^2}\right]+\left[\frac{37}{3^3}\right]+\left[\frac{37}{3^4}\right]=17$$
$$\Longrightarrow 37!=A\times 3^{17}$$

نکته ۶ : **اگر p و q دو عدد اول باشند آنگاه توان $k=pq$ در $n!$ برابر است با توان $max\{p\ ,q\}$ در $n!$. مثلا توان عدد $6=2\times 3$ در $13!$ برابر است با توان $max\{2\ ,3\}=3$ در $13!$ که برابر است با :**

$$\left[\frac{13}{3}\right]+\left[\frac{13}{3^2}\right]+\left[\frac{13}{3^3}\right]=5\Longrightarrow 13!=B\times 6^5$$

KAMKAR

مثال۹: عدد $362!$ بر 7^k بخش پذیر است بزرگترین مقدار k کدام است ؟ (آزاد ۷۷)

۱) ۵۱ ۲) ۵۸ ۳) ۵۷ ۴) ۵۹

KAMKAR

مثال۹: عدد $362!$ بر 7^k بخش پذیر است بزرگترین مقدار k کدام است ؟ (آزاد ۷۷)

۱) ۵۱ ۲)۵۸ ۳)۵۷ ۴)۵۹

حل: بزرگترین توان عامل ۷ برابر است با :

$$\left[\frac{362}{7}\right]+\left[\frac{362}{7^2}\right]+\left[\frac{362}{7^3}\right]+\left[\frac{362}{7^4}\right]=59$$

عدد اول : هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ که که هیچ شمارنده مثبتی بجز ۱ و خودش نداشته باشد عدد اول گوئیم مانند :

۲ و ۳ و۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و .....

عدد مرکب: هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که اول نباشد عدد مرکب است مانند: $4, 6, 8, 9, \ldots$

تذکر۴: عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.بنابراین می توان نوشت : $\mathbb{N} = \{1\} \cup \{\text{اعداد اول}\} \cup \{\text{اعداد مرکب}\}$

نکته ۷ : هر عدد صحیح به جز ۱ و 1- حداقل یک مقسوم علیه اول دارند.

نکته ۸: بی نهایت عدد اول وجود دارد.

قضیه: اگر n عددی مرکب باشد آنگاه حداقل یک مقسوم علیه اول کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ دارد.

طرز تشخیص اول بودن یک عدد: برای اینکه مشخص کنیم عددی اول است یا مرکب ، آن را بر تمام اعداد اول کمتر یا مساوی جذر خودش تقسیم می کنیم اگر بر هیچ کدام بخش پذیر نباشد آنگاه طبق قضیه قبل اول است و گرنه مرکب است.

مثال۱۰: مشخص کنید ۱۴۷ اول است یا مرکب؟

حل : اعداد اول کمتریا مساوی $\sqrt{147}$ عبارتند از ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و۱۱ وچون $3 \mid 147$ پس ۱۴۷ مرکب است.

KAMKAR

تمرین ۱۲: مشخص کنید اعداد ۱۳۱ و ۴۰۷ اول هستند یا مرکب؟

KAMKAR

تمرین ۱۳: اگر $a > 1$ و $a \in \mathbb{N}$ و $a|5k+3$, $a|9k+4$ نشان دهید a عددی اول است .

KAMKAR

تمرین ۱۴: به ازای چند عدد اول p عدد $48p+1$ مجذور کامل یک عدد طبیعی است ؟ (کنکور ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

KAMKAR

تمرین ۱۴: به ازای چند عدد اول p عدد $48p+1$ مجذور کامل یک عدد طبیعی است ؟ (کنکور ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: (گزینه ۲)

چون $48p+1$ فرد است و $48p+1=n^2$ پس n فرد است . یعنی $n=2k+1$

لذا داریم :

$$48p=n^2-1=(n-1)(n+1)=2k(2k+2)=4k(k+1)\xRightarrow{\div 4}12p=k(k+1)$$

$\Rightarrow p=11$ یا 13

در سایر حالات زیر p اول نیست . پس برای p دو عدد اول وجود دارد .

$$12p=2\times 6p=3\times 4p=4\times 3p=6\times 2p=k(k+1)$$

KAMKAR

تمرین ۱۵ : ۹۹ عدد طبیعی متوالی بنویسید که هیچکدام اول نباشند .

KAMKAR

تست۱: اگر $3n^2 - 4n + 2 \mid 1$ چند مقدار طبیعی برای n وجود دارد؟

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

KAMKAR

تست۱: اگر $3n^2 - 4n + 2 \mid 1$ چند مقدار طبیعی برای n وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: **گزینه ۲**

$$3n^2 - 4n + 2 \mid 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3n^2 - 4n + 2 = 1 \Rightarrow 3n^2 - 4n + 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب}=0} n = 1 , n = \frac{1}{3} \\ \text{یا} \\ 3n^2 - 4n + 2 = -1 \Rightarrow 3n^2 - 4n + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$$

از مقادیر حاصل برای n فقط یک مقدار $n = 1$ عدد طبیعی است.

KAMKAR

تست۲ : اگر $\circ \mid n^2 + 5$ مجموعه مقادیر ممکن برای n کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\mathbb{Z}$

KAMKAR

تست۲ : اگر $n^2+5 \mid 0$ مجموعه مقادیر ممکن برای n کدام است؟

۱) $\emptyset$ ۲) $\{1\}$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\mathbb{Z}$

پاسخ: گزینه ۴

چون صفر بر هر عدد صحیح بخش پذیر است پس n هر عدد صحیح می تواند باشد .

KAMKAR

تست۳ : اگر $d \mid 3n-1$ و $d \mid 2n+4$ آنگاه چند عدد طبیعی برای d وجود دارد ؟

۱) ۴ ‏ ‏ ۲) ۸ ‏ ‏ ۳) ۶ ‏ ‏ ۴) ۱۲

KAMKAR

تست ۳ : اگر $d \mid 3n-1$ و $d \mid 2n+4$ آنگاه چند عدد طبیعی برای d وجود دارد ؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} d \mid 2n+4 \\ d \mid 3n-1 \end{cases} \Rightarrow d \mid 3(2n+4)-2(3n-1)=14 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=1,2,7,14$$

KAMKAR

تست ۵: به ازای چند مقدار صحیح n رابطه $n-4 \mid n^2-5n+28$ برقرار است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

تست ۵: به ازای چند مقدار صحیح n رابطه $n-4 \mid n^2-5n+28$ برقرار است ؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینه ۴

$$n-4 \mid n^2-5n+28 = f(n),\ n-4=0 \Rightarrow n=4 \Rightarrow f(4)=24 \in \mathbb{Z}$$

$$n-4 \mid f(4)=24 \Rightarrow n-4 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

۱۶ مقدار برای $n-4$ وجود دارد پس ۱۶ مقدار صحیح برای n حاصل می شود و تمام این مقادیر در رابطه

$n-4 \mid n^2-5n+28$ صدق می کنند .پس گزینه ۴ درست است .

KAMKAR

تست ۶ : برای چند عدد طبیعی n رابطه $2n+1 \mid 2n^2-3n+3$ برقرار است؟

۱)هیچ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

KAMKAR

تست ۶ : برای چند عدد طبیعی n رابطه $2n+1 \mid 2n^2-3n+3$ برقرار است؟

۱)هیچ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۳

$$2n+1 \mid 2n^2-3n+3=f(n) \;, 2n+1=0 \Rightarrow n=-\frac{1}{2} \;, f\left(-\frac{1}{2}\right)=5\in\mathbb{Z}$$

$$2n+1 \mid f\left(-\frac{1}{2}\right)=5 \Rightarrow 2n+1=\pm1\,,\pm5 \;\Rightarrow n=0\,,-1\,,2\,,-3$$

در بین تمام مقادیر بدست آمده برای n فقط یک مقدار طبیعی $n=2$ وجود دارد پس گزینه ۳ درست است .

تست ۸ : در منحنی نمایش تابع $y=\frac{x-2}{x+1}$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) بی شمار ۳) ۲ ۴) صفر

KAMKAR

تست ۸ : در منحنی نمایش تابع $y = \frac{x-2}{x+1}$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) بی شمار ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

$$y = \frac{x-2}{x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+1 \mid x-2 = f(x) \ , x+1=0 \Rightarrow x=-1 , f(-1) = -3 \in \mathbb{Z}$$

$$x+1 \mid f(-1) = -3 \Rightarrow x+1 = \pm1, \pm3 \Rightarrow x = 0 , -2 , 2 , -4$$

چون ۴ مقدار صحیح برای x حاصل شد و به ازای این مقادیر y هم صحیح می شود پس منحنی دارای ۴ نقطه با مختصات صحیح است . پس گزینه ۱ درست است .

KAMKAR

تست۱۱: به ازای چند عدد طبیعی n داریم : $n^2 + 2 \mid 5n - 4$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

KAMKAR

تست ۱۱: به ازای چند عدد طبیعی n داریم : $n^2+2 \mid 5n-4$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱

$$\begin{cases} n^2+2 \mid 5n-4 \\ n^2+2 \mid n^2+2 \end{cases} \Rightarrow n^2+2 \mid 25(n^2+2)-(5n-4)(5n+4)=66$$

$$\Rightarrow n^2+2 = 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 6 \text{ یا } 11 \text{ یا } 22 \text{ یا } 33 \text{ یا } 66 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \text{ یا } 8$$

در بین تمام اعداد حاصل فقط اعداد ۲ و ۳ در رابطه $n^2+2 \mid 5n-4$ صدق می کنند و تعداد آنها ۲ است .

KAMKAR

تست ۱۲ : مجموع ارقام کوچکترین عدد طبیعی که مضرب ۱۱ بوده و مربع آن بر ۳۱۵ بخش پذیر باشد کدام است ؟ (کنکور۷۶)

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

KAMKAR

تست ۱۲ : مجموع ارقام کوچکترین عدد طبیعی که مضرب ۱۱ بوده و مربع آن بر ۳۱۵ بخش پذیر باشد کدام است ؟ (کنکور۷۶)

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنید کوچکترین عدد مورد نظر a باشد. پس :

$$\begin{cases} 11 \mid a \\ 315 \mid a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11^2 \mid a^2 \\ 3^2 \times 5 \times 7 \mid a^2 \end{cases} \Rightarrow min(a^2) = 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2$$

$$\Rightarrow min(a) = 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1155 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 1 + 1 + 5 + 6 = 12$$

KAMKAR

تست ۱۳ : به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$ اگر $\alpha \mid 13n+3$ و $\alpha \mid 7n+4$ و $\alpha \neq 1$ باشد. آنگاه مجموع ارقام کوچکترین عدد n کدام است ؟(کنکور ۹۸) .

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

KAMKAR

تست ۱۳ : به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$ اگر $\alpha \mid 13n+3$ و $\alpha \mid 7n+4$ و $\alpha \neq 1$ باشد. آنگاه مجموع ارقام کوچکترین عدد n کدام است ؟(کنکور ۹۸) .

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases}\alpha \mid 13n+3\\ \alpha \mid 7n+4\end{cases} \Rightarrow \alpha \mid 13(7n+4)-7(13n+3)=31 \xrightarrow{\alpha\neq 1} \alpha=\pm 31$$

$$\begin{cases}\pm 31 \mid 13n+3\\ \pm 31 \mid 7n+4\end{cases} \Rightarrow \pm 31 \mid 2(7n+4)-1(13n+3)=n+5 \Rightarrow n+5=\pm 31k$$

$$\Rightarrow n=\pm 31k-5 \Rightarrow \begin{cases}n=-31k-5\\ n=+31k-5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k=-1 \Rightarrow \min(n)=26\\ k=1 \Rightarrow \min(n)=26\end{cases}$$

$\Rightarrow$ جمع ارقام $=2+6=8$

KAMKAR

تست ۱۹ : اگر $a-b \mid a+b$ کدام نتیجه گیری در حالت کلی نمی تواند درست باشد؟

۱) $a-b \mid 2a$ ۲) $a-b \mid 4a+b$ ۳) $a-b \mid 3a+b$ ۴) $a-b \mid 2b$

KAMKAR

تست ۱۹ : اگر $a-b \mid a+b$ کدام نتیجه گیری در حالت کلی نمی تواند درست باشد؟

۱) $a-b \mid 2a$ ۲) $a-b \mid 4a+b$ ۳) $a-b \mid 3a+b$ ۴) $a-b \mid 2b$

پاسخ: (گزینه ۲)

طبق استدلالهای زیر گزینه های ۱ و ۳ و ۴ نتیجه می شوند. ولی گزینه ۲ نتیجه نمی شود.

$$\begin{cases} a-b \mid a+b \\ a-b \mid a-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b \mid (a+b)-(a-b)=2b \\ a-b \mid (a+b)+(a-b)=2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b \mid 2b \\ a-b \mid 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b \mid a+b \\ a-b \mid 2a \end{cases} \Rightarrow a-b \mid 2a+(a+b)=3a+b$$

KAMKAR

تست ۲۰: اگر $112 \mid b^3$, $135 \mid a^2$ کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۳۹　　۲) ۷۳　　۳) ۵۳　　۴) ۵۹

KAMKAR

تست ۲۰: اگر $b^3 \mid 112$ ، $a^2 \mid 135$ کمترین مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) ۳۹   ۲) ۷۳   ۳) ۵۳   ۴) ۵۹

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases} 112 = 2^4 \times 7 \mid b^3 \\ 135 = 3^3 \times 5 \mid a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min(b^3) = 2^6 \times 7^3 \\ \min(a^2) = 3^4 \times 5^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \min(b) = 2^2 \times 7 = 28 \\ \min(a) = 3^2 \times 5 = 45 \end{cases} \Rightarrow \min(a+b) = 28 + 45 = 73$$

KAMKAR

تست ۲۲ : باقی مانده $1000!$ بر ۱۹۹۶ کدام است؟ (آزاد ۷۴)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) !۴

KAMKAR

تست ۲۲ : باقی مانده $1000!$ بر ۱۹۹۶ کدام است؟ (آزاد ۷۴)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) !۴

پاسخ: گزینه ۱

$$1000! = 1000 \times 999 \times 998 \times \cdots \times 2 \times 1$$

$$= (998 \times 2) \times \overbrace{(1000 \times 999 \times \cdots \times 3 \times 1)}^{q \in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow 1000! = 1996q \Rightarrow 1996 \mid 1000! \Longrightarrow \text{باقیمانده} = 0$$

KAMKAR

تست ۲۷: چند عدد طبیعی دو رقمی به مجموعه $\{n : 33 \mid 4^n - 1\}$ تعلق دارد ؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

KAMKAR

تست ۲۷: چند عدد طبیعی دو رقمی به مجموعه $\{n : 33 \mid 4^n - 1\}$ تعلق دارد ؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

پاسخ: گزینه ۳

$$33 \mid 4^n - 1 \Rightarrow 2^5 + 1^5 \mid 2^{2n} - 1^{2n} \Rightarrow \frac{2n}{5} = \text{عدد زوج}$$

$\frac{2n}{5}$ باید زوج باشد پس باید عدد دورقمی n مضرب ۵ باشد یعنی :

$$n = 2 \times 5\ , \quad 3 \times 5\ , \quad 4 \times 5\ , \ldots , \quad 19 \times 5 \Rightarrow \text{تعداد} = 18$$

KAMKAR

تست ۳۰ : از رابطه $a^5 \mid b^6$ کدام رابطه را می توان نتیجه گرفت؟

۱) $a \mid b$ ۲) $a^7 \mid b^8$ ۳) $a^2 \mid b^3$ ۴) $a^{10} \mid b^{11}$

KAMKAR

تست ۳۰ : از رابطه $a^5 \mid b^6$ کدام رابطه را می توان نتیجه گرفت؟

۱) $a \mid b$ ۲) $a^7 \mid b^8$ ۳) $a^2 \mid b^3$ ۴) $a^{10} \mid b^{11}$

پاسخ: گزینه ۳

$$a^5 \mid b^6 \xRightarrow{\begin{vmatrix}5 & 6\\2 & 3\end{vmatrix}=15-12=3>0} a^2 \mid b^3$$

KAMKAR

تست ۳۶ : نمایش اعشاری $5^{41} \times 56!$ به چند صفر ختم می شود ؟

۱) ۱۳   ۲) ۵۴   ۳) ۵۳   ۴) ۱۷

KAMKAR

تست ۳۶ : نمایش اعشاری $56! \times 5^{41}$ به چند صفر ختم می شود؟

۱) ۱۳ ۲) ۵۴ ۳) ۵۳ ۴) ۱۷

پاسخ: گزینه ۳

$$56! \text{ توان 2 در } = \left[\frac{56}{2^1}\right] + \left[\frac{56}{2^2}\right] + \cdots + \left[\frac{56}{2^5}\right] + 0 = 53$$

$$56! \text{ توان 5 در } = \left[\frac{56}{5}\right] + \left[\frac{56}{5^2}\right] + 0 = 13$$

$$56! \times 5^{41} = (a \times 2^{53} \times 5^{13}) \times 5^{41} = a \times 2^{53} \times 5^{54}$$
$$= 5a(2^{53} \times 5^{53}) = k \times 10^{53}$$

پس این عدد به ۵۳ صفر ختم می شود.

KAMKAR

تست ۴۱ : چند عدد اول کمتر از ۵۰ وجود دارد که $50! + 10!$ بر آنها بخش پذیر باشد؟

۱) ۴ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۱

KAMKAR

تست ۴۱ : چند عدد اول کمتر از ۵۰ وجود دارد که $50! + 10!$ بر آنها بخش پذیر باشد؟

۱) ۴   ۲) ۱۰   ۳) ۱۲   ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه ۱

$$50! + 10! = 10!\,(11 \times 12 \times 13 \times \cdots \times 50 + 1) = 10! \times A$$

A بر هیچکدام از اعداد اول کمتر از ۵۰ بخش پذیر نیست .ولی $10!$ بر اعداد اول ۲ و ۳ و ۵ و ۷ بخش پذیر است پس $50! + 10!$ هم بر همین ۴ عدد بخش پذیر است .

KAMKAR

پایان

KAMKAR